

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای

گسترده

تالیف: دکتر بهروز قلی زاده

ناشر: انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری: واحد آموزشی انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ: واحد فناوری انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل اول : حساب گزاره ها

تعریف : در یک استدلال هر یک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را **فرض** یا **مقدم** و عبارت آخر را **نتیجه** یا **تالی** مینامیم.

- یک استدلال زمانی **معتبر** است که اگر فرضهای آن **درست** باشد نتیجه نیز **درست** است.
- جملات یا راست هستند یا دروغ ولی هرگز نمیتوانند هم راست باشند هم دروغ. چنین جملاتی را **گزاره** می نامیم.

قاعده ی طرد شق ثالث : گزاره ای که دروغ نیست پس راست است و بر عکس.

گزاره : یک جمله ی خبری است که یا راست است یا دروغ ولی نه هر دو.

قضیه : گزاره ای که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان ثابت کرد.

تشکیل گزاره های جدید از روی گزاره های قبلی (هروف پیوندی مبنا) :

- **هرف پیوندی ((و))، ((عطف))، ((و)) :** زمانی راست است که هر دو راست باشد.
 - **هرف پیوندی ((یا))، ((فصل))، ((و)) :** زمانی راست است که یکی از گزاره ها راست باشد.
 - **نقیض ((~)) یا نفی یک گزاره ها :** ارزش گزاره ی اول را نفی میکند.
 - **جدول درستی :** روشی برای تجزیه و تحلیل ارزشهای گزاره ها
- نکته :** در نوشتن جدول درستی اگر n گزاره ی مبنا داشته باشیم 2^n ترکیب داریم.

مراحل ارزیابی جدول :

1. داخلی ترین پرانتز
2. عمل $\sim$
3. عمل $\wedge$ و $\vee$

گزاره ی راستگو : ارزش درستی گزاره های مبنای تشکیل دهنده آن همواره راست باشد.

نکته : دو گزاره را به طور منطقی هم ارزشگویم اگر به ازای هر ترکیب همسان از ارزش گزاره های مبنای تشکیل دهنده آنها مقادیر درستی یکسانی داشته باشند. (با گزاره های هم ارزش میتوان گزاره های پیچیده را با گزاره های ساده جایگزین کرد)

$$p \equiv q$$

گزاره ی شرطی ($p \rightarrow q$) : گزاره p را مقدم و q را تالی مینامیم و این گزاره زمانی نادرست است که مقدم

درست ولی تالی نادرست باشد.

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim(p \wedge \sim q) \quad \text{قضیه:}$$

تعاریف شرطی:

- اگر p آنگاه q
- p اگر q
- p تنها اگر q
- P شرط کافی برای q است
- q شرط لازم برای p است

تعریف: اگر $p \rightarrow q$ گزاره‌ی شرطی باشد، گزاره‌ی $\sim p \rightarrow \sim q$ را عکس نقیض، $q \rightarrow p$ را عکس و $\sim p \rightarrow \sim q$ را وارون آن گزاره میگوییم.

فواصل گزاره‌ها:

$$q \vee p \equiv p \vee q, \quad q \wedge p \equiv p \wedge q \quad \text{جابجایی:}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r), \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad \text{شرکت پذیری:}$$

$$\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q), \quad \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q) \quad \text{قانون دمورگان:}$$

$$p \equiv p \vee p, \quad p \equiv p \wedge p \quad \text{فرد توانی:}$$

پخش پذیری:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r), \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

$$T \equiv p \vee T, \quad p \equiv p \vee F, \quad p \equiv p \wedge T, \quad F \equiv p \wedge F \quad \text{همانی:}$$

$$T \equiv p \vee \sim p, \quad F \equiv p \wedge \sim p \quad \text{متمم:}$$

$$\sim \sim p \equiv p \quad \text{نقیض دوگانه:}$$

بیزی: $p \equiv p \vee (p \wedge q)$, $p \equiv p \wedge (p \vee q)$

گزاره ی دشرطی ($p \Rightarrow q$): اگر ارزش دو گزاره ی تشکیل دهنده ی آن یکسان باشند آنگاه ارزش آن

راست است و به این صورت بیان میشود: p اگر و تنها اگر q

$$p \Rightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$$

روشهای اثبات:

q از $p_1, p_2, \dots, p_n$ نتیجه میشود $\Rightarrow$ یک راستگو باشد $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$

نماد $\vdash$ (بنابراین):

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$$

- در گزاره ی فوق p_i مقدم ها و مفروضات گزاره و q نتیجه می باشد.
- مجموعه ی فوق در کل یک استنتاج می باشد.

چند قاعده ی مهم استنتاج:

$$p \vdash p \vee q$$

قیاس فصلی

$$p \wedge q \vdash p$$

قیاس تفصیصی

$$p, q \vdash p \wedge q$$

قیاس عطفی

$$p, p \Rightarrow q \vdash q$$

قیاس استنتاجی

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$$

قیاس تعدی

$$p \Rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$$

قیاس عکس

استدلال غلط: استدلالی است که برای بعضی حالات مقدم های آن راست ولی تالی دروغ باشد

اثبات غیر مستقیم:

یک استلزام منطقی با عکس نقیض آن هم ارز است:

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

زیرا که گزاره ی روبرو یک راستگو است

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

در این اثبات به جای آن که ثابت کنیم به طور مستقیم $p \rightarrow q$ درست است، فرض می کنیم که q دروغ است و نشان می دهیم که در صورت اشیر p نیز دروغ است.

اثبات به وسیله ی برهان خلف:

این روش بر پایه ی راستگوی

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

و یا قیاس

$$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$$

بنا شده است.

بدین معنی که اگر گزاره ی p به گزاره ی q منجر شود آنگاه خود p باید دروغ باشد.

تناقض: گزاره ای که ارزش آن صرف نظر از مقادیر متغیرهای ظاهر شده در آن همواره دروغ است.

نکته: هر گزاره ای که به یک تناقض منجر شود باید دروغ باشد.

نکته: اگر همه ی p_i ها راست و $\sim q$ دروغ باشد در نتیجه q راست است. (برهان خلف)

گزاره نما: عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهای به کار رفته در آن مشخص شود به گزاره تبدیل شود.

- گزاره نمایی که تنها شامل یک متغیر باشد **1-مکانی**، شامل دو متغیر باشد **2-مکانی** و اگر شامل n متغیر باشد **n-مکانی** نامیده میشود.

- مجموعه مقادیری که میتواند جایگزین یک متغیر موجود در گزاره نما شود **جهان** نامیده می شود.
 - یک گزاره نمای n -مکانی را **ارضا شدنی** می گوئیم هرگاه یک n تایی موجود باشد که آن را ارضا کند
 - اگر تمامی n تایی ها موجب ارضای آن شوند گزاره نمای مذکور را **معتبر** خواهیم گفت.
 - دو گزاره نما را هم ارز می گوئیم** هرگاه به ازای کلیه ی مقادیر ممکن از متغیرهایشان ارزش درستی یکسان داشته باشند.
- $$X_{(x)} \rightarrow Y_{(x)} \text{ هم ارز معتبر است}$$

سورها

سور جهانی (عمومی): به مقادیر ویژه ای از a و b بستگی ندارد، بلکه وابسته به این است که عبارت مزبور به ازای همه ی مقادیر a و b راست است.

کزاره نما به ازای هر مقداری که به متغیر a منسوب شود راست است:

$$\forall a \ R(a)$$

سور وجودی: متغیری در یک گزاره نما که می توان با انتساب مقدار مناسبی برای متغیر یاد شده به یک گزاره ی راست

تبدیل کرد.

$$\exists a \ R(a)$$

$\forall x \ P(x)$ تمامی مقادیر از جهان متغیر x گزاره نمای P را ارضا می کند. (جهانی)

$\exists x \ P(x)$ دست کم یک مقدار از جهان متغیر x وجود دارد که P را ارضا کند. (وجودی)

نقیض گزاره های سوردار:

- سورهای وجودی $\leftarrow$ ترکیب فصلی
- سورهای عمومی $\leftarrow$ ترکیب عطفی

$$\exists x \sim p(x) \equiv \sim [\forall x \ P(x)]$$

$$\forall x \sim p(x) \equiv \sim [\exists x \ P(x)]$$

منطق گزاره ای: حالت خاصی از منطق گزاره نماهاست که در آن هیچ کدام از گزاره ها شامل سور و متغیر نیست.

پهار قاعده ی موه استنتاج:

تعمیم وجودی

$$P(a) \vdash \exists X \ P(x)$$

تعمیم جهانی

$$P(a) \vdash \forall X \ P(x)$$

- a یک عضو دلخواه از جهان مورد بحث است.

وجود لفظه ای

$$\exists X \ P(x) \vdash P(a)$$

- a عضو ویژه از یک جهان متغیر x به گونه ای که P را ارضا کند

$$\forall x P(x) \vdash P(a)$$

جهان لمظه ای

• a هر عضوی از جهان متغیر X می تواند باشد.

اعمال سورها بر روی ترکیب های عطفی و فصلی در گزاره نماها

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x [P(x) \wedge Q(x)]$$

$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x [P(x) \wedge Q(x)]$$

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \forall x [P(x) \vee Q(x)]$$

هم ارز نیستند

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

هم ارز نیستند

$$\forall x [P(x) \vee Q] \equiv \forall x [P(x) \wedge Q]$$

Q گزاره ای است که شامل متغیر X نیست

استقرای ریاضی

اصل استقرای ریاضی قاعده ی استتایی را در اختیار ما قرار می دهد

$$P(1), \forall x [P(k) \Rightarrow P(k+1)] \vdash \forall n P(n)$$

1. $P(1)$ راست است

2. $\forall k \geq 1$, $P(k)$ و $P(k+1)$ را نتیجه می دهد

3. $P(n)$ راست و $\forall k \geq n$ و $P(k)$ نتیجه می دهد $P(k+1)$ را.

- **مبنای استقرا:** نشان می دهیم $P(n)$ ، راست است
- **فرض استقرا:** فرض کنیم برای هر $k \geq n$ ، $P(k)$ ، راست است
- **مرحله استقرا:** با استفاده از فرض نشان دهیم $P(k+1)$ ، راست است

بازگشت: روشن تعیین یک تابع می باشد، یک مجموعه و یا یک الگوریتم را که تابعی از خودش باشد بازگشت گوئیم.

تابع بازگشتی فاکتوریل: $f(0) = 1$ ، $\forall n \geq 0$ ، $f(n+1) = (n+1)f(n)$ ، $f(n) = n!$

تابع تصاعد حسابی: $A(0) = a$ ، $\forall n \geq 0$ ، $A(n+1) = A(n) + d$ ، $A(n) = a + nd$

فیبوناچی: $F_0 = 0$ ، $F_1 = 1$ ، $\forall n \geq 1$ ، $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

استقرای ریاضی قوی: فرض کنید $P(n)$ عبارتی باشد که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n مقدار آن یا راست و یا دروغ باشد به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $P(n)$ ، راست است. هرگاه عدد صحیح مثل $q \geq 1$ موجود باشد به گونه ای که: $P(1)$ و $P(2)$ و ... و $P(q)$ همه راست باشند، برای هر $k \geq q$ با فرض راست بودن $P(i)$ و $1 \leq i \leq k$ بتوان راست بودن $P(k+1)$ را نتیجه گرفت.

روش اثبات:

1. **مبنای استقرا:** $p(1)$ و $P(2)$ و ... و $P(q)$ همه راست باشند.
2. **فرض استقرا:** فرض اینکه $P(i)$ و $1 \leq i \leq k$ ، راست هستند که در آن $k \geq q$
3. **مرحله استقرا:** نشان دادن اینکه $P(k+1)$ ، راست است.

پایان فصل اول

فصل دوم: روابط

فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشند. یک رابطه دودویی R از A به B زیر مجموعه ای از $A \times B$ است.

$$R \subseteq A \times B, \quad (a, b) \in R \Rightarrow aRb$$

اگر $A = B \Rightarrow R$ یک رابطه از A به B است $R \Rightarrow$ یک رابطه در A است.

ماتریس و روابط

اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه میتوان ماتریسی $n \times m$ مثل $M_R = [M_{ij}]$ را نمایش داد:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{و} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i, b_j) \in R \\ 0 & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

نکته: ماتریسی که فقط دارای مؤلفه های صفر و یک باشد **ماتریس بولی** نامیده می شود.

نکته: اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه **مجموعه نسبی x نسبت به R** وجود دارد که با $R(x)$ نمایش

$$R_{(x)} = \{y \mid y \in B, xRy\}$$

دارد می شود.

قضیه: اگر R یک رابطه از A به B و A_1 و A_2 دو زیر مجموعه از A باشد آنگاه داریم:

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow R(A_1) \subseteq R(A_2)$$

$$R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$$

$$R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$$

قضیه: اگر R و S دو رابطه از A به B باشند، اگر به ازای هر $a \in A$ ، $R(a) = S(a)$ باشد آنگاه $S = R$ است.

تعریف: اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ در ماتریس بولی $n \times m$ باشند آنگاه $A \vee B$ و $A \wedge B$ به صورت زیر است:

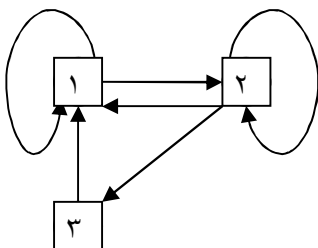
$$A \vee B = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_{ij} = 1 \text{ or } b_{ij} = 1) \\ 0 & \text{if .not} \end{cases} \quad A \wedge B = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_{ij} = 1 \text{ and } b_{ij} = 1) \\ 0 & \text{if .not} \end{cases}$$

تعریف: حاصلضرب بولی $A \odot B$ برای دو ماتریس A و B به اندازه $n \times p$ و $m \times p$ به صورت زیر است:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_{ik} = 1, b_{kj} = 1, \exists k, 1 \leq k \leq p) \\ 0 & \text{if .not} \end{cases}$$

گراف های سوردار: اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه در A باشد رابطه R را به صورت نموداری نمایش داد. یک دایره کوچک برای هر کدام از عناصر رسم کرده و این دایره ها را به عنوان رئوس یاد خواهیم کرد و خطوط سورداري به نام یال که از راس a_i به راس a_j رسم می کنیم $a_i R a_j \Leftrightarrow$

مثال:



نکته: مسیری که از راسی شروع شده و به خودش فاصله پیدا کند **مدار** نامیده می شود.

مدار به طول یک را **حلقه** می نامیم.

هر یال در گراف سوردار یک مسیر به طول یک تلقی می شود.

تعریف: $xR^\infty y$ ، هرگاه مسیری از x به y در A موجود باشد. در بعضی اوقات R^∞ را رابطه (مسیر) ارتباطی برای A می گویند.

نکته: یک مسیر به طول n باید دارای $n+1$ عنصر از A باشد. (عناصر الزاما متمایز نیستند)

$$M_{R^n} = M_R \odot M_R$$

قضیه: اگر R یک رابطه در $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ باشد آنگاه

نکته: مکان $a(i, j)$ از ماتریس $M_R \odot M_R$ دارای مقدار 1 است اگر و تنها اگر $n_{ij} = 1$ باشد.

قضیه: فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و R یک رابطه در A باشد آنگاه:

$$M_{R^n} = M_R \odot M_R \odot \dots \odot M_R \quad (n \text{ بار})$$

رابطه ی دسترسی: اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه در A باشد R^* یک رابطه ی دسترسی پذیر است.
(I_n ماتریس واحد $n \times n$ است و n تعداد عناصر مجموعه A است)

$$xR^*y \Leftrightarrow xR^\infty y \quad \text{یا} \quad x=y$$

$$M_{R^*} = M_{R^\infty} \vee I_n$$

خواص روابط

روابط بازتابی: رابطه ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ باشد آنگاه aRa .

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in R(a)$$

- در ماتریس یک رابطه بازتابی همه عناصر آن قطر اصلی ماتریس می باشند.
- گراف سوردار یک رابطه بازتابی دارای حلقه برای تک تک رئوس است.
- روابط ضد بازتابی:** رابطه ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ آنگاه aRa .
- در ماتریس یک رابطه ضد بازتابی قطر اصلی آن همگی صفر می باشند.
- گراف سوردار یک رابطه ضد بازتابی فاقد حلقه می باشد.

روابط متقارن و ضد متقارن: رابطه R در مجموعه A متقارن است اگر دو عنصر متمایز a و b موجود باشد بطوریکه aRb و bRa و $a \neq b$. در غیر این صورت نا متقارن است:

$$a \in R(b) \Leftrightarrow b \in R(a) \quad \text{نکته: نتیجه می گیریم که زمانی که رابطه نا متقارن است و اگر } aRb \text{ و } bRa \text{ آنگاه } a=b$$

- یک ماتریس زمانی متقارن است که $M_R = M_R^T$. (یعنی ماتریس با ترانواده ی خود برابر باشد)
- یک ماتریس زمانی ضد متقارن است که اگر $i \neq j$ بود یکی از عناصر M_{ij} یا M_{ji} باید مساوی صفر باشد.
- یک ماتریس می تواند نه متقارن باشد نه ضد متقارن.
- در گرافهای سوردار یک رابطه متقارن اگر یالی از راس i به j موجود باشد آنگاه یالی نیز از j به i موجود می باشد و هیچ شرطی برای $i=j$ وجود ندارد.
- اگر شرط فوق در گراف وجود نداشت آن گراف مربوط به یک رابطه ی ضد متقارن است.

روابط متعدی: رابطه R در A متعدی است هرگاه برای $a, b, c \in A$ آنگاه:

$$aRb, bRc \Rightarrow aRc \quad \text{متعدی}$$

$$aRb, bRc \Rightarrow aRc \quad \text{نامتعدی}$$

نکته: یک رابطه متعدی را می توان از روی ماتریس رابطه ی آن $M_R = [m_{ij}]$ تشخیص داد اگر

$$m_{ik} = 1, m_{kj} = 1 \Rightarrow m_{ij} = 1$$

همچنین با توجه به گراف سوردار داریم که اگر از a به c مسیری به طول 2 در R داشته باشیم آنگاه یک یال نیز از a به c داریم. به عبارتی:

$$aRb, bRc \equiv aR^2c \Rightarrow aRc \Rightarrow R^2 \subseteq R$$

قضیه: مفهوم هندسی متعدی بودن رابطه R در مجموعه A چنین است که اگر مسیری به طول بیشتر از یک از a به a راس b موجود باشد آنگاه یالی از a به b موجود باشد.

متعدی بودن $\Leftrightarrow \forall n \geq 1, R^n \subseteq R$

نکته: در ضمن متعدی بودن رابطه R را می توان به این صورت توضیح داد:

$$b \in R(a), c \in R(b) \Rightarrow c \in R(a)$$

روابط هم ارزی: رابطه R در A را هم ارزش گوییم هرگاه بازتابی، متقارن و متعدی باشد.

- اگر P یک افراز از مجموعه A باشد بنابر این P را میتوان برای تشکیل یک رابطه R هم ارزی در A به کار برد.
- مجموعه های موجود در افراز P را **بلوک های P** گویند.
- اگر a, b, c در بلوک P از مجموعه A باشند و سه خاصیت بازتابی و تقارن و تعدی را دارا باشند آنگاه R یک رابطه R هم ارزی تعیین شده توسط افراز P می باشد.
- هر عضو از یک بلوک فقط و فقط با اعضای همان بلوک در رابطه است.

قضیه: فرض کنید R یک رابطه هم ارزی در A و $a \in A, b \in A$ باشد در این صورت aRb اگر و تنها اگر $R(a) = R(b)$ باشد.

قضیه: اگر R یک رابطه هم ارزی در A و P مجموعه P همگی مجموعه های نسبی و مجزای $R(a)$ برای $a \in A$ باشد در این صورت P یک افراز برای A و R یک رابطه هم ارزی تعیین شده توسط P است.

تعریف: اگر R یک رابطه هم ارزی در A باشد آنگاه $R(a)$ ها را کلاسهای هم ارزی R می گوئیم.
 (شامل همه کلاسهای هم ارز A/R)
 $R(a) = [a]$

عملیات بر روابط

اگر S و R دو رابطه از A به B باشد این روابط مجموعه ای از زوجهای مرتب هستند که تمامی اعمال مانند اجتماع و اشتراک و تفاضل و ... اعمال کرد

$$\bar{R} : a\bar{R}b \Leftrightarrow aRb \quad \text{متعم}$$

$$a(R \cup S)b \Leftrightarrow aRb \text{ یا } aSb \quad \text{اجتماع}$$

$$a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb \text{ و } aSb \quad \text{اشتراک}$$

$$R^{-1} : aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a \quad \begin{cases} \text{Dom}(R^{-1}) = \text{Ran}(R) \\ \text{Dom}(R) = \text{Ran}(R^{-1}) \end{cases} \quad \text{معکوس}$$

نکته: R^{-1} شامل همه زوجهای مرتب R است که به صورت معکوس نوشته شده اند. $(R^{-1})^{-1} = R$

نکته: در ماتریس معکوس جای سطر و ستون عوض می شود $(M_R)^{-1} = (M_R)^T$

تعریف: برای ماتریس بولی $M = [m_{ij}]$ ، متمم آن یعنی $\bar{M} = [\bar{m}_{ij}]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{m}_{ij} = \begin{cases} 0 & m_{ij} = 1 \\ 1 & m_{ij} = 0 \end{cases}$$

قضیه: فرض کنید که R و S دو رابطه از A به B باشد.

- 1) $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- 2) $R \subseteq S \Rightarrow \bar{S} \subseteq \bar{R}$
- 3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- 4) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- 5) $\overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S}$
- 6) $\overline{(R \cap S)} = \bar{R} \cup \bar{S}$

7) اگر R بازتابی باشد آنگاه R^{-1} نیز بازتابی است.

8) اگر R بازتابی باشد آنگاه $\bar{R}$ ضد بازتابی است.

9) اگر R و S بازتابی باشند آنگاه $R \cup S$ و $R \cap S$ نیز بازتابی هستند.

نکته: رابطه R در A متقارن است $\Leftrightarrow R = R^{-1} \Leftrightarrow M_R = (M_R)^T = (M_R)^{-1} = M_R$

قضیه: اگر R متقارن باشد آنگاه $\bar{R}, R^{-1}$ نیز متقارن هستند.

همچنین اگر R, S متقارن باشند $R \cup S, R \cap S$ نیز متقارن هستند.

$$1) (R \cap S)^2 \subseteq R^2 \cap S^2$$

2) اگر R و S متعدی باشند آنگاه $R \cap S$ متعدی است.

3) اگر R و S رابطه هم ارزی باشد آنگاه $R \cap S$ نیز رابطه هم ارزی است.

بستارها

اگر R یک رابطه در A باشد ممکن است بعضی از خصوصیات هم ارزی را نداشته باشد. می‌فواهیم با افزودن زوجیهایی به آن رابطه ای بدست آوریم که ویژگی های مورد نظر را داشته باشد.

بستار بازتابی: اگر R یک رابطه در A باشد که بازتابی نباشد بعضی از زوجهای رابطه Δ در R را اضافه می‌کنیم تا کوچکترین رابطه بازتابی شامل R تشکیل شود.

$$R_1 = R \cup \Delta$$

بستار متقارن: به طور فرض داریم رابطه R رابطه ای در A باشد که متقارن نباشد. اگر زوجی مثل $(x, y) \in R$ باشد ولی $(y, x) \notin R$ باشد، بدیهی است $(y, x) \in R^{-1}$. بنابراین برای تبدیل به رابطه متقارن باید زوجهای رابطه R^{-1} را به آن اضافه کنیم.

$$R \cup R^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1}$$

$R \cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه ی متقارن است.

نکته: بستار متقارن R را می‌توان به روش هندسی رسم کرد. به این صورت که همه یالها در گراف سوردار R به یالهای دو طرفه در $R \cup R^{-1}$ تبدیل شود.

بستار متعدی و الگوریتم وارشال

تفصیه: اگر R یک رابطه در A باشد آنگاه بستار متعدی R رابطه R^∞ است.

تفصیه: اگر $|A| = n$ (تعداد اعضا) و R یک رابطه در A باشد $R^\infty = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$

الگوریتم وارشال: فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و R یک رابطه در A باشد. اگر $x_m, \dots, x_2, x_1$ مسیری در R باشد. هر راس غیر از x_m, x_1 را راس دافلی مسیر فواهیم گفت. الگوریتم وارشال در دو مرحله فلامه می‌شود:

(1) ابتدا همه مقادیر W_{k-1} را به W_k منتقل می‌کنیم

(2) فرض کنید که در مکانهای $p_1, p_2, \dots$ در ستون k ام ماتریس W_{k-1} و هم چنین در مکانهای $q_1, q_2, \dots$

در سطر k ام همان ماتریس مقدار 1 داشته باشیم، در این صورت در مکانهای (p_i, q_j) در ماتریس

W_k مقدار 1 قرار دهیم، این الگوریتم را با $W_0 = M_R$ آغاز کرد و W_k های بعدی را تا رسیدن به

$W_n = M_R$ ($n = |A|$) ادامه می‌دهیم.

کاربرد جالب بستار متعدی در روابط هم ارزی است. اگر S, R دو رابطه هم ارزی باشند در این صورت $R \cap S$ نیز یک رابطه هم ارزی است. $R \cap S$ بزرگترین زیر مجموعه مشمول در S, R است.

تفصیه: اگر S, R دو رابطه هم ارزی در مجموعه A باشند در نتیجه کوچکترین رابطه هم ارزی شامل S, R ، رابطه $(R \cup S)^\infty$ است.

ترکیب روابط: اگر C, B, A سه مجموعه و R رابطه ای از A به B و S رابطه ای از B به C باشد رابطه جدید از A به C را ترکیب S, R می نامیم و به SoR می خوانیم.

$$\left. \begin{matrix} a \in A \\ c \in C \end{matrix} \right\} a(SoR)c \Leftrightarrow b \in B, \left\{ \begin{matrix} aRb \\ bSc \end{matrix} \Rightarrow a(SoR)c \right.$$

$$a \xrightarrow{R} b \xrightarrow{S} c \Rightarrow SoR(A_1) = S(R(A_1)), A_1 \subseteq A$$

قضیه: اگر D, C, B, A چهار مجموعه و R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C و T یک رابطه از C به D باشد داریم:

$$\left\{ \begin{matrix} aRb \\ bSc \\ cTd \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} To(SoR) = (ToS)oR \\ (SoR)^{-1} = R^{-1}oS^{-1} \end{matrix}$$

پایان فصل دوم

فصل سوم: توابع

تعریف: اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع f از A به B به صورت $f: A \rightarrow B$ نمایش داده می شود.

اگر $a \in \text{Dom}(f)$ باشد فقط شامل یک عضو از B است و اگر $a \notin \text{Dom}(f)$ باشد $f(a) = f$ می باشد.

نکته: رابطه f به صورت زوجهای مرتب تعریف می شود: $\{(a, f(a)) \mid a \in \text{Dom}(f)\}$ شکل

تابع نگاشت یا تبدیل: a برابر است با آرگومان تابع f و $b = f(a)$ برابر است با مقدار تابع برای آرگومان.

نکته: $f(a)$ را تصویر a تحت تبدیل f می گویند.

ترکیب توابع: اگر f و g دو تابع باشند به صورت $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ g: B \rightarrow C \end{cases}$ و چون f و g دو رابطه هستند پس ترکیب آنها $(g \circ f)$ نیز یک رابطه است.

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b)$$

$$a \in \text{Dom}(g \circ f)$$

$$g \circ f(a) = c \quad \text{جواب منحصراً به فرد}$$

توابع ویژه (پوشا و یک به یک): اگر f تابعی از A به B باشد گوییم f همه جا تعریف شده است

$$\text{اگر } \text{Dom}(f) = A \text{ و } \text{پوشاست اگر } \text{Ran}(f) = B$$

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \\ \text{or} \\ f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b \end{cases} \quad \text{و } f \text{ یک به یک است هرگاه:}$$

همچنین $f: A \rightarrow B$ را **وارون پذیر** گویند هرگاه رابطه f^{-1} نیز یک تابع باشد.

نکته: یک تابع الزاماً وارون پذیر نیست.

چند قضیه: هرگاه $f: A \rightarrow B$ آنگاه

(1) f^{-1} یک تابع از B به A است $\Leftrightarrow f$ یک به یک است.

(2) اگر f^{-1} یک تابع باشد $\Leftarrow f^{-1}$ یک به یک است.

(3) f^{-1} همه جا تعریف شده باشد $\Leftrightarrow f$ پوشا باشد.

(4) f^{-1} پوشاست - همه جا تعریف شده باشد.

$$I_B \circ f = f \quad (5)$$

$$f \circ I_A = f \quad (6)$$

(7) $f^{-1} \circ f = I_A$ اگر f تناظر یک به یک باشد

(8) $f \circ f^{-1} = I_B$ اگر f تناظر یک به یک باشد

(9) اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow A$ توابعی باشند به گونه ای که $g \circ f = I_A$ و $f \circ g = I_B$ ،
در این صورت f یک تناظر یک به یک بین A و B و g یک تناظر یک به یک بین B و A بوده و
هر دو وارون همدیگر می باشند.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

(10) اگر A و B دو مجموعه متناهی با تعداد عناصر یکسان و $f: A \rightarrow B$ یک تابع همه جا تعریف
شده باشد آنگاه:

الف) اگر f پوشا باشد $\Leftarrow f$ یک به یک است

ب) اگر f یک به یک باشد $\Leftarrow f$ پوشاست

اصل لانه کبوتر

$f: A \rightarrow B$ تابعی با دامنه و برد متناهی می باشد

f یک به یک باشد آنگاه $m = n$ تعداد عناصر (کبوتران) $|Dom(f)| = n$

f یک به یک نباشد آنگاه $m < n$ تعداد عناصر (لانه ها) $|Ran(f)| = m$

تعریف: اگر n کبوتر به m لانه منسوب شود و $m < n$ ، آنگاه دست کم یک لانه شامل دو کبوتر یا
بیشتر است.

تعمیم اصل لانه کبوتر: اگر m لانه وجود داشته باشد ولی تعداد کبوترها بیشتر از $n = 2m$ باشد، بریعی
است که سه کبوتر و یا بیشتر باید به یکی از لانه ها منسوب شوند.

نکته: به عبارتی اگر n کبوتر به m لانه منسوب شود یکی از لانه ها دست کم $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ (کمران بالای تقسیم) و یا $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ کبوتر باشد.

پایان فصل سوم

فصل چهار: مجموعه های مرتب

1. رابطه R در A را ترتیب جزئی گوئیم هرگاه بازتابی ضد متقارن و متعدی باشد مجموعه A را همراه ترتیب جزئی R مجموعه با **ترتیب جزئی** نامیده و آن را با (A, R) نمایش خواهیم داد.
2. اگر $(A, \leq)$ و $(B, \leq)$ دو مجموعه با ترتیب جزئی باشند در این صورت $(A \times B, \leq)$ نیز یک مجموعه با ترتیب جزئی است که در آن ترتیب جزئی به صورت زیر تعریف شده است:

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ اگر } a \leq a' \text{ و } b \leq b' \text{ در } B \text{ باشد}$$

ترتیب جزئی $\leq$ تعریف شده برای حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را ترتیب جزئی **حاصل ضرب** میگویند. اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد گوئیم که $a < b$ هرگاه $a \leq b$ ولی $a \neq b$ باشد. فرض کنید که $(A, \leq)$ و $(B, \leq)$ دو مجموعه با ترتیب جزئی باشد. یک ترکیب دیگر در $A \times B$ که با $\prec$ نمایش داده میشود به وسیله زیر تعریف میشود:

$$(a, b) \prec (a', b') \text{ اگر } a < a' \text{ یا } (a = a' \text{ و } b < b')$$

این ترتیب را ترتیب **قاموسی** میگوئیم. وقتی که A و B مجموعه های کاملاً مرتب باشند در این صورت ترتیب قاموسی $\prec$ در $A \times B$ نیز یک ترتیب کامل است.

فرض کنید که Σ یک مجموعه متناهی از علائم باشد در این صورت یک رشته متناهی (شامل صفر عنصر) انتفا ب شده از Σ را بدون نوشتن ویرکول بین عناصر نمایش داده و آنرا یک کلمه روی Σ خواهیم گفت. Σ را الفبا مینامیم. طول کلمه w را با $|w|$ نمایش خواهیم داد. کلمه به طول صفر را با Λ نمایش داده و از آن به نام کلمه تهی یاد خواهیم کرد. مجموعه تمام کلمات به طول k به صورت Σ^k نمایش داده میشود این بدین معناست که:

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \{\Lambda\} \\ \Sigma^{k+1} &= \{wa \mid w \in \Sigma^k, a \in \Sigma\} \end{aligned}$$

مجموعه کلمات با هر طولی روی Σ مجموعه $\Sigma^k = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k$ خواهد بود. همچنین مجموعه تمامی کلمات غیر تهی روی Σ مجموعه $\Sigma^+ = \bigcup_{k \geq 1} \Sigma^k$ است. بنابراین برای هر $w \in \Sigma^k$ داریم $|w| = k$. اگر $w, y \in \Sigma^*$ به طوری که $|w| = n$ و $|y| = m$ ، به عبارت دیگر $w = w_1 w_2 \dots w_n$ و $y = y_1 y_2 \dots y_m$ در این صورت الفاق دو کلمه را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$wy = w_1 w_2 \dots w_n y_1 y_2 \dots y_m$$

که کلمه ای به طول $n+m$:

$$|wy| = n + m$$

گراف سو دار یک ترتیب جزئی دارای هیچ دوری به طول بزرگتر از یک نیست.

نمودار هاس:

فرض کنید A یک مجموعه متناهی باشد میدانیو که گراف سو دار یک ترتیب جزئی در A دارای هیچ دوری به طول بیشتر از یک نیست. از طرف دیگر چون یک ترتیب جزئی یک رابطه بازتابی است هر راسی در گراف سو دار یک ترتیب جزئی شامل حلقه است برای سادگی کار همه حلقه ها را از گراف سو دار حذف میکنیم و همه یالهای را که به وسیله یک رابطه متعدی به وجود آمده اند نیز حذف میکنیمو قرارداد میکنیم که جهت یالهای گراف سو دار یک ترتیب جزئی را به طرف بالا رسم میکنیم لزه میتوانیم جهت این یالها را حذف کنیم،بالافره دواير نمایش دهنده رئوس را نیز توسط نقاط نمایش خواهیم داد.

اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه جزئی و $(A, \geq)$ دوگان ان باشد در این صورت نمودار هاس $(A, \geq)$ وارون هاس $(A, \leq)$ خواهد بود.

اگر $a \leq b$ انگاه $a \in B$ فرایند تشکیل یک ترتیب کامل مثل $\langle T \rangle$ را ترتیب توپولوژیکی میگویند. (اگر $a \leq b$ انگاه a باید قبل از b وارد شود.

فرض کنید که $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ دو مجموعه با ترتیب جزئی و $f: A \rightarrow A'$ یک تناظر یک به یک بین A, A' باشد. تابع f را یک تابع یکریختی از $(A, \leq)$ به $(A', \leq')$ خواهیم گفت هر گاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$a \leq b \text{ اگر و تنها اگر } f(a) \leq' f(b)$$

اگر یک تابع یک ریختی میان دو مجموعه با ترتیب جزئی $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ وجود داشته باشد در این صورت خواهیم گفت که $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ یکریخت هستند.

(اصل تناظر) اگر عناصر B نسبت به یکدیگر و یا نسبت به دیگر عناصر A دارای خاصیتی باشند و اگر این خاصیت را بتوان به طور کامل به وسیله $\leq$ تعریف کرد در این صورت عناصر B' نیز باید دارای همان خاصیت تعریف شده به وسیله $\leq'$ باشند.

• اگر f یک تابع یک ریختی باشد و هر بر چسب a در H را به $f(b)$ تبدیل کنیم H به نمودار هاس $(A', \leq')$ تبدیل میشود و بر عکس:

• هر گاه با جایگزاری هر بر چسب به وسیله $f(a)$ ، H به نمودار هاس $(A', \leq')$ تبدیل شود f یک تابع یکریختی خواهد بود.

عنصر $a \in A$ را یک عنصر ماکزیمال A خواهیم گفت اگر برای هیچ عضو $c \in A$ رابطه $a < c$ برقرار نباشد.

عضو $a \in A$ را یک عضو مینیمال A خواهیم خواند اگر برای هیچ عضو $a \in A$ رابطه $c < b$ برقرار نباشد. مجموعه Z با ترتیب جزئی و متعارف $\leq$ نه دارای عضو ماکزیمال است و نه عضو مینیمال.

فرض کنید که $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی متناهی باشد در این صورت A دست کم دارای $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ و یک عضو مینیمال است.

عنصر $a \in A$ بزرگترین عضو A خوانده میشود هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $x \leq a$. به همین ترتیب عضو $a \in A$ کوچکترین عضو A خوانده میشود هرگاه رابطه $a \leq x$ به ازای هر $x \in A$ برقرار باشد.

یک مجموعه با ترتیب جزئی حداکثر دارای یک بزرگترین عضو و یک کوچکترین عضو است. بزرگترین عضو یک مجموعه با ترتیب جزئی را در صورت وجود با I نمایش میدهیم و اغلب آنرا **عضو واحد** مینامیم. به طریق مشابه کوچکترین عضو یک مجموعه با ترتیب جزئی را در صورت وجود با O نمایش داده و آنرا **عضو صفر** مینامیم.

مجموعه با ترتیب جزئی A و زیر مجموعه B از آن را در نظر بگیرید یک عضو $a \in A$ کرانه بالائی B خوانده میشود هرگاه به ازای همه $b \in B$ داشته باشیم $b \leq a$. به همین ترتیب عضو $a \in A$ کرانه پائینی B خوانده میشود هرگاه به ازای تمامی $b \in B$ داشته باشیم $a \leq b$.

فرض کنید A یک مجموعه با ترتیب جزئی و B زیر مجموعه ای از آن باشد عضو $a \in A$ را کوچکترین کرانه بالائی (LUB) برای B فوایم گفت هرگاه اولاً a یک کرانه بالائی برای B بوده و ثانیاً اگر a' نیز یک کرانه بالائی برای B باشد انگاه $a \leq a'$ بنابراین $a = LUB(B)$ اگر با ازای هر $b \in B$ ، $b \leq a$ ؛ و اگر $a' \in A$ نیز یک کرانه بالائی برای B باشد $(b \in B \text{ به ازای همه } b \leq a')$ انگاه $a \leq a'$.

به طریق مشابه یک عضو $a \in A$ را بزرگترین کرانه پائینی (GLB) برای B فوایم گفت اگر a یک کرانه پائینی برای B باشد و اگر a' نیز یک کرانه پائینی برای B باشد انگاه $a' \leq a$. بنابراین $a = GLB(B)$ اگر به ازای هر $b \in B$ ، $a \leq b$ و اگر $a' \in A$ نیز یک کرانه پائینی برای B باشد (به ازای هر $b \in B$ و $a' \leq b$) انگاه $a' \leq a$.

طبق معمول کرانه های بالائی در $(A, \leq)$ متناظر با کرانه های پائینی در $(A, \geq)$ (برای هر مجموعه همسان از عناصر) و کرانه های پائینی در $(A, \leq)$ متناظر با کرانه های بالائی در $(A, \geq)$ هستند.

فرض کنید که $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد. در این صورت یک زیر مجموعه B از A حداکثر دارای یک LUB و یک GUB است.

فرض کنید که $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ مجموعه های با ترتیب جزئی یکریخت تحت تابع یکریختی $f: A \rightarrow A'$ باشند.

(الف) اگر a یک عنصر ماکزیمال (مینیمال) $(A, \leq)$ باشد در این صورت $f(a)$ یک عنصر ماکزیمال (مینیمال) $(A', \leq')$ است.

(ب) اگر a بزرگترین (کوچکترین) عضو $(A, \leq)$ باشد در این صورت $f(a)$ بزرگترین (کوچکترین) عضو $(A', \leq')$ است.

(ج) اگر a یک کرانه بالائی برای (کرانه پائینی و LUB, GLB) برای زیر مجموعه B از A باشد در این صورت $f(a)$ نیز یک کرانه بالائی برای (کرانه پائینی و LUB, GLB) برای زیر مجموعه $f(B)$ از A' است.

(د) اگر هر زیر مجموعه از $(A, \leq)$ دارای یک LUB, GLB باشد در این صورت هر زیر مجموعه از $(A', \leq')$ نیز دارای یک LUB, GLB است.

یک **مشبکه** مجموعه ای با ترتیب جزئی مثل $(L, \leq)$ است که در آن هر زیر مجموعه شامل دو عنصر مثل $\{a, b\}$ دارای یک LUB و یک GLB باشد در این صورت $LUB(\{a, b\})$ را با $a \vee b$ نمایش داده و آنرا وست a و b خواهیم گفت به طریق مشابه $GLB(\{a, b\})$ را با $a \wedge b$ نمایش داده و آنرا رسر a و b مینامیم.

اگر $(L_1, \leq)$ و $(L_2, \leq)$ دو مشبکه باشند در این صورت $(L, \leq)$ نیز یک مشبکه است که در آن $L = L_1 \times L_2$ و ترتیب جزئی $\leq$ در L همان ترتیب جزئی حاصلضرب است.

فرض کنید که $(L, \leq)$ یک مشبکه باشد زیر مجموعه نا تهی S از L را زیر مشبکه برای L میگوئیم هرگاه به ازای هر $a, b \in S$ عناصر $a \vee b$ و $a \wedge b$ (که در L تعین میشوند) در مجموعه S نیز قرار داشته باشند.

مشبکه های یکریخت: فرض کنید $f: L_1 \rightarrow L_2$ یک تابع یکریختی از $(L_1, \leq_1)$ به $(L_2, \leq_2)$ باشد در این صورت L_1 اگر و تنها اگر L_2 یک مشبکه باشد، در حقیقت اگر a و b عناصر L_1 باشند آنگاه $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ و $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. اگر دو مشبکه یکریخت باشند آنها را مشبکه های یکریخت مینامیم.

خواص مشبکه ها :

1. $a \leq a \vee b$ و $b \leq a \vee b$ (یک کرانه بالائی برای a و b است)
2. اگر $a \leq c$ و $b \leq c$ انگاه $a \vee b \leq c$ (کوچکترین کرانه بالائی برای a و b است).
3. $a \wedge b \leq a$ و $a \wedge b \leq b$ (یک کرانه پائینی برای a و b است).
4. اگر $c \leq a$ و $c \leq b$ انگاه $c \leq a \wedge b$ (بزرگترین کرانه پائینی برای a و b است).

اگر L یک مشبکه باشد انگاه به ازای هر a و b از L داریم:

$$(الف) \quad a \vee b = b \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a \leq b$$

$$(ب) \quad a \wedge b = a \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a \leq b$$

$$(ج) \quad a \wedge b = a \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a \vee b = b$$

فرض کنید L یک مشبکه باشد انگاه داریم:

1. قاصیت خود توانی

$$(الف) \quad a \vee a = a \quad (ب) \quad a \wedge a = a$$

2. قاصیت جابجائی

$$(الف) \quad a \vee b = b \vee a \quad (ب) \quad a \wedge b = b \wedge a$$

3. قاصیت شرکت پذیری

$$(الف) \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \quad (ب) \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

4. قاصیت جذبی

$$(الف) \quad a \vee (a \wedge b) = a \quad (ب) \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

فرض کنید که L یک مشبکه باشد انگاه برای هر a, b, c از L چنین داریم:

$$1. \quad a \leq b \quad \text{اگر} \quad a \vee b = b$$

$$(الف) \quad a \vee b \leq b \vee c$$

$$(ب) \quad a \wedge b \leq b \wedge c$$

$$2. \quad a \leq c \quad \text{و} \quad b \leq c \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a \vee b \leq c$$

$$3. \quad c \leq a \quad \text{و} \quad c \leq b \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad c \leq a \wedge b$$

$$4. \quad a \leq b \quad \text{اگر} \quad c \leq d$$

$$(الف) \quad a \vee c \leq b \vee d$$

$$(ب) \quad a \wedge c \leq b \wedge d$$

مشبکه های ویژه :

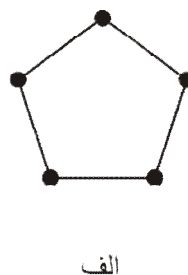
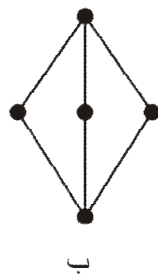
- مشبکه L را مصدود کوئیم هر گاه دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد
- فرض کنید که $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مشبکه متناهی باشد در این صورت L مصدود است
- مشبکه L را پفشپزیر کوئیم هر گاه به ازای هر a, b, c از L روابط زیر برقرار باشد:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (\text{الف})$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (\text{ب})$$

اگر L پفش پذیر نباشد ان را **پفش ناپذیر** مینامیم.

مشبکه L پفش ناپذیر است اگر و تنها اگر شامل زیر مشبکه های یکریفت با یکی از مشبکه های اشکال زیر باشد.



فرض کنید که L یک مشبکه مصدود دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد. همچنین فرض کنید که $a \in L$ ، عنصر $a' \in L$ را متمم a کوئیم هر گاه $a \wedge a' = O$ و $a \vee a' = I$. از این تعریف مشاھره میشود که $O' = I$ و $I' = O$.

فرض کنید که L یک مشبکه مصدود و پفش پذیر باشد اگر یک متمم برای عضوی وجود داشته باشد در این صورت این متمم منمصر به فرد است.

مشبکه $(L, \leq)$ را متمم دار کوئیم هر گاه مصدود بوده و هر عضو ان متمم داشته باشد.

جبر بول :

قبلا دیدیم که اگر S یک مجموعه دلفواه و $L = P(S)$ باشد انگاه $(L, \subseteq)$ یک مشبکه است این مشبکه دارای ویژگی های متنوعی است که یک مشبکه در حالت عمومی فاقد انهاست. به همین دلیل این نوع مشبکه ها برای کارکردن بسیار ساده بوده و نقش مهمی را در کاربردهای مختلف ایفا میکنند.

اگر $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ دو مجموعه دلخواه و متناهی با n عنصر باشند در این صورت شبکه های $(P(S_1), \subseteq)$ و $(P(S_2), \subseteq)$ یکریخت هستند.

نکته: برای هر $n=0,1,2,\dots$ فقط یک نوع شبکه به صورت $(P(S), \subseteq)$ وجود دارد این شبکه مستقل از عناصر S بوده و فقط به مقدار n بستگی دارد. تعداد عناصر این شبکه برابر 2^n است.

یک شبکه متناهی را **جبر بول** کوئیم هرگاه به ازای یک عدد صحیح و مثبت n یکریخت با B_n باشد.

قاعده جایگزینی برای جبر بول

فرض کنید که $(L, \leq)$ یک جبر بول x, y, z سه عضو دلخواه از آن و I و O نیز به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عضو آن باشد. نیز فرض کنید A, B, C سه زیر مجموعه دلخواه از مجموعه S و به عبارتی دیگر سه عضو از $(P(S), \subseteq)$ باشند در این صورت هر ویژگی برای عناصر دلخواه از $(P(S), \subseteq)$ را میتوان با جایگزین کردن $\vee$ به جای $\cup$ و $\wedge$ به جای $\cap$ و $\leq$ به جای $\subseteq$ عینا به همان ویژگی برای عناصر دلخواه از $(L, \leq)$ منتقل کرد.

جدول صفحه ی 58! کتاب درسی مطالعه شود

برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، B_n مساوی با n بار حاصل ضرب B در خودش است که در آن ترتیب جزئی در $B \times B \times \dots \times B$ (n بار) همان ترتیب جزئی حاصلضرب است.

توابع و چند جمله ای های بولی:

(تابع بولی) تابع $f: B_n \rightarrow B$ را که دامنه آن B_n و برد آن مجموعه $B = \{0,1\}$ است تابع بولی مینامیم.

(چند جمله ای های (عبارات) بولی) فرض کنید که $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه ای از n متغیر بولی باشد یک چند جمله ای بولی $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ روی متغیر n بولی $x_1, x_2, \dots, x_n$ به صورت بازگشتی زیر تعریف میشود:

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ چند جمله ای های بولی هستند.

2. نمادهای 0 و 1 چند جمله ای های بولی هستند.

3. اگر $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دو چند جمله ای بولی باشند در این صورت عبارات $(P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n))$ و $(P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n))$ نیز چند جمله ای های بولی هستند.

4. اگر $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک چند جمله ای بولی است انگاه $(P(x_1, x_2, \dots, x_n))'$ نیز یک چند جمله ای بولی است.

5. هیچ چند جمله ای بولی دیگری روی متغیرهای بولی $x_1, x_2, \dots, x_n$ غیر از چند جمله ای های حاصل از اعمال چهارگانه فوق وجود ندارد.

اگر $f: B_n \rightarrow B$ انگاه $S(f)$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$S(f) = \{b \in B_n \mid f(b) = 1\}$$

از قضیه بالا نتیجه زیر را میگیریم:

فرض کنید که f, f_1, f_2 سه تابع بولی از B_n به B باشند در این صورت

(الف) اگر $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2)$ انگاه به ازای همه $b \in B_n$ ، $f(b) = f_1(b) \vee f_2(b)$.

(ب) اگر $S(f) = S(f_1) \cap S(f_2)$ انگاه به ازای همه $b \in B_n$ ، $f(b) = f_1(b) \wedge f_2(b)$.

نکته: هر تابع $f: B_n \rightarrow B$ را میتوان به وسیله یک عبارت بولی تولید کرد.

تعاریف:

لیترال: یک لیترال یک متغیر بولی و یا متمم آن است.

کمینه: یک جمله کمینه روی n متغیر بولی $x_1, x_2, \dots, x_n$ عبارت بولی $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n$ است که در آن هر لیترال $\bar{x}_i$ ، $1 \leq i \leq n$ یا برابر متغیر بولی x_i و یا برابر متمم آن یعنی x'_i است.

یک عبارت بولی روی n متغیر بولی $x_1, x_2, \dots, x_n$ را یک شکل نرمال فصلی یا به طور اخص **dnf** کوئیم هرگاه به صورت وست هائی از جملات کمینه روی n متغیر بولی مزبور بیان شده باشد.

بیان یک عبارت بولی به صورت یک dnf با استفاده از خواص جبر بول:

در فرایند ساده کردن مدارها قوانین دمورگان و بشپزیری بسیار مفید هستند

مثال: عبارت بولی $x \wedge (y \vee z')$ را به صورت یک dnf بیان کنید.

$$(x \wedge y \vee (x \wedge z'))$$

با استفاده از قانون پوشپذیری نتیجه میشود

با توجه به اینکه $w \vee w' = I$ و $w \wedge I = w$ لذا

$$\begin{aligned} & [(x \wedge y) \wedge (z \vee z')] \vee [(x \wedge z') \wedge (y \vee y')] = \\ & [(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z')] \vee [(x \wedge z' \wedge y) \vee (x \wedge z' \wedge y')] = \\ & (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge z' \wedge y) \vee (x \wedge y' \wedge z') \end{aligned}$$

و با

توجه به

قانون فـود تـوانی

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z')$$

دو عبارت بولی را هم ارز میگوئیم اگر هر دو نمایش دهنده تابع بولی یکسان باشند بنابراین دو عبارت بولی هم ارز هستند اگر و تنها اگر دارای یک dnf باشند.

نقشه کارنو

الف) بررسی حالت $n = 2$

در این حالت، f یک تابع بولی از دو متغیر، مثل x و y است. شکل زیر ماتریس 2×2 را نشان می دهد که هر کدام از خانه های آن حاوی یک عنصر b از B_2 است. در شکل، هر کدام از این b ها را با جمله ی کمینه متناظر جایگزین کرده ایم. برپسب خانه ها در این شکل صرفاً به خاطر ارباع بوده و از این به بعد از نوشتن آنها خودداری می کنیم، اما فرض بر این است که خواننده بتواند جای آنها را به خاطر بسپارد. در شکل مشاهده می شود که متغیر x' در هر دو خانه ی سطر اول ظاهر شده است. به طریق مشابه متغیر x در خانه های سطر دوم ظاهر شده است. با توجه به این مطالب این دو سطر را به ترتیب با x' و x برپسب زده ایم. همین طور برای دو ستون برپسب y .

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

ب

00	01
10	11

الف

نکته: وقتی مقادیر تابع بولی $f: B_2 \rightarrow B$ دقیقاً یک سطر و یا یک ستون را پر کرده باشند، در این صورت برپسب آن سطر و یا ستون هم ارز با تابع بولی f خواهد بود. البته اگر مقدار یک تابع f فقط یک خانه از ماتریس را پر کند، در این صورت f به وسیله ی جمله ی کمینه ی متناظر تولید می شود. می توان نشان داد که هر چه نواحی شامل مقدار یک برای تابع f بزرگتر باشد، به همان اندازه عبارت بولی متناظر با f کوچکتر خواهد بود.

ب) حالت $n = 3$

در این حالت تابع بولی f از B_3 به B تعریف شده است. بنابر این فرض کنید که f تابعی از متغیرهای بولی x, y, z است. نقشه کارنو در این حالت به وسیله ی یک ماتریس 2×4 نمایش داده می شود. جدولهای زیر به ترتیب الف و ب عنصر B_3 و جملات کمینه متناظر با آنها را در داخل خانه های ماتریس نشان می دهند.

	y'		y	
x'	$x' \wedge y' \wedge z'$	$x' \wedge y' \wedge z$	$x' \wedge y \wedge z$	$x' \wedge y \wedge z'$
x	$x \wedge y' \wedge z'$	$x \wedge y' \wedge z$	$x \wedge y \wedge z$	$x \wedge y \wedge z'$

	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

ب

الف

نکته: مقادیر یک تابع بولی $f: B_3 \rightarrow B$ را می توانیم به صورت اجتماعی از نواحی مستطیل شکل بنویسیم.

ج) حالت $n = 4$

در اینجا، توابع بولی از B_4 به B تعریف شده اند که شامل 4 متغیر مثل x, y, z و w هستند. در جدول زیر توزیع ورودی ها و برپسب مستطیل های متناظر، برای چنین توابعی نشان داده شده است. در این حالت فرض بر این است که ستون اول و آخر و هم چنین سطر اول و آخر مجاور هم هستند. در این حالت نیز به جستجوی مستطیلهایی به ابعاد توانی از دو خواهیم بود (1,2,4).

	z'		z	
x'				
x				

	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

ب

الف

فصل پنجم: روابط بازگشتی

یک دنباله را به روش های متنوع می توان تعریف کرد:

1- نوشتن چندین جمله اول به امید رسیدن به یک الگو یا فرمول عمومی (ابهام انگیز است).

2- ارائه یک فرمول صریح برای جمله n ام.

3- استفاده از مفاهیم بازگشتی.

- روش سوم اولاً به یک معادله به نام رابطه بازگشتی نیاز دارد که جمله n ام را به چند جمله قبلی مرتبط می کند. و ثانیاً مقادیر چند جمله اول را می خواهد که به آنها شرایط مرزی می گوئیم. (دنباله فیبوناچی)

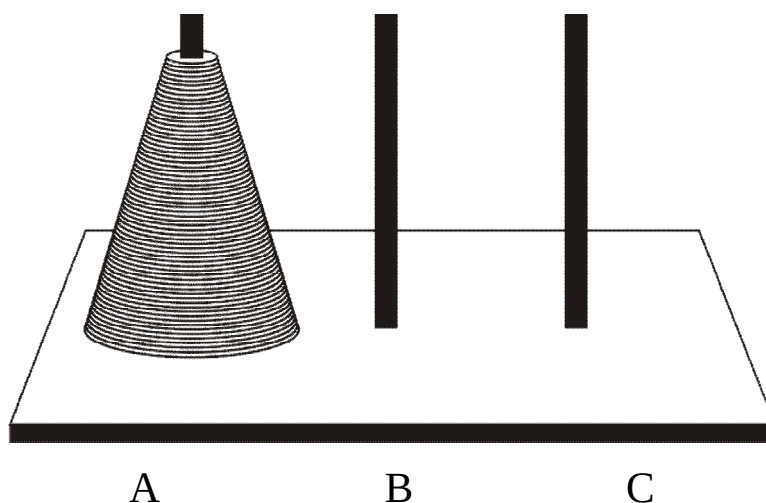
- تعریف دنباله به صورت بازگشتی معادل به کار بردن استقرای ریاضی است. شرایط مرزی مثابه پایه استقرا و رابطه بازگشتی مثابه مرحله استقراست.

تعریف: یک رابطه بازگشتی فرمولی است که جمله n ام را به k جمله پیشین مرتبط می سازد که $n \geq k$ و $k \geq 1$. شرایط مرزی ارائه مقادیر برای $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ است. k مرتبه ی رابطه ی بازگشتی می باشد.

- یک رابطه بازگشتی با شرایط مرزی متفاوت دنباله های متعدد تولید می کند.

* حل یک مسئله بصورت بازگشتی به معنای پیدا کردن راهی برای شکستن مسئله مزبور به زیر مسائلی است که صورت ظاهری آن ها مشابه به مسئله اولیه است. این روند تکرار می شود تا آخرین زیر مسئله به سادگی حل شود. گام بعدی تلفیق و ترکیب جواب های حاصل و به دست آوردن جواب کلی است. این فرض که زیر مسائل کوچکتر قبلاً حل شده اند به تفکر بازگشتی معروف است. این سنت مشابه فرض استقرا در اثبات قضایاست.

مثال: برج هانوی ← بنابه افسانه ها یک معبد هندی دارای سه ستون الماس است که فراوانر 64 حلقه طلا به ترتیب نزولی قطرشان از پایین به بالا روی آنها قرار داده. راهبه ها باید این حلقه ها را به ستون آخر منتقل کنند و هرگز نباید یک حلقه بزرگتر روی کوچکتر قرار گیرد. اگر با اتمام کار، عمر جهان پایان یابد عمر جهان چقدر است؟



راه حل بازگشتی این چنین است که فرض می‌کنیم راهی برای انتقال $n-1$ حلقه به ستون دوم پیدا کرده‌ایم، حال باید حلقه‌ی آخر را به ستون سوم اضافه کرد و سپس 1 -حلقه را به ستون سوم رساند. حال اگر a_n ، $n \geq 1$ حداقل انتقال‌های لازم برای جابجایی n حلقه از یک ستون به ستون دیگر باشد می‌بینیم برای انتقال $n-1$ حلقه از A به B، a_{n-1} انتقال و برای انتقال حلقه n ام به C به یک انتقال و برای انتقال $n-1$ حلقه از B به C، a_{n-1} انتقال نیاز است پس $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ و شرط مرزی $a_1 = 1$ است. پس رابطه بازگشتی است

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

مثال: دنباله فیبوناچی ← این رابطه منصوب به لئوناردو پیزا ریاضیدان قرون وسطایی است و بر این اساس است که: در ابتدای سال یک جفت خرگوش داریم. هر جفت خرگوش در ماه اول تولد صاحب بچه نمی‌شوند ولی در ماه‌های دیگر یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند و هیچ خرگوشی از بین نمی‌رود. تعداد خرگوش‌ها در انتهای سال؟

تعداد خرگوش‌های متولد شده ماه n ام برابر تعداد خرگوش‌های ماه $n-2$ است زیرا خرگوش‌های ماه $n-1$ هنوز تولید مثل نکرده اند پس اگر F_0 تعداد خرگوش‌های ماه n باشد، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ و $F_1 = 1$ و $F_0 = 1$ است.

مثال: مجموعه اعداد دودویی n رقمی فاقد الگوی 11 چند عضو دارد؟

می دانیم $S_0 = 0$ و $S_1 = 2$ و می دانیم که برای سافتین اعداد n ، رقمی باید به اعداد $n-1$ ، رقمی 0 یا 1 اضافه کنیم. اضافه کردن 0 مشکلی ایجاد نمی کند، پس به همان تعداد $n-1$ ، رقمی عدد داریم ولی در اضافه کردن 1 باید مواظب باشیم الگوی 11 ایجاد نشود، بنابراین داریم $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ و $n \geq 2$.

مثال: تعداد افرازهای ممکن یک مجموعه n عضوی به زیرمجموعه‌ی غیر تهی که با $S_{n,r}$ نشان می‌دهیم را حساب کنید. اعداد $S_{n,r}$ به اعداد استرلینگ نوع دوم معروف هستند.

این مجموعه را می توان به دو گروه شامل $\{x_n\}$ و فاقد $\{x_n\}$ تقسیم کرد. تعداد افرازهای $S_{n,r}$ که شامل $\{x_n\}$ باشند که با تعداد $S_{n-1,r-1}$ برابر است اما تعداد گروه دوم برابر $rS_{n-1,r}$ می باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} S_{n,r} = S_{n-1,r-1} + rS_{n-1,r} & 1 \leq r \leq n \\ S_{n,1} = 1, S_{n,n} = 1 & n \geq 1 \end{cases}$$

گاهی از اوقات، بویژه وقتی به جملات با اندیس بزرگتر نیاز داریم یا فواصل عمومی دنباله را می‌خواهیم به فرمول صریح نیاز داریم که آن را جواب رابطه بازگشتی گوئیم.

حل روابط بازگشتی با استفاده از جایگزینی با تکرار:

این روش برای حل روابط بازگشتی مرتبه اول بسیار مناسب است.

مثال:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + f(n) & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \rightarrow a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$a_1 = a_0 + f(1), a_2 = a_0 + f(1) + f(2) \dots$$

$$\begin{cases} a_n = ca_{n-1} + f(n) & n \geq 1 \\ a_0 = \text{const} \end{cases} \rightarrow a_n = c^n a_0 + \sum_{k=1}^n c^{n-k} f(k)$$

$$a_1 = ca_0 + f(1), a_2 = c^2 a_0 + cf(1) + f(2) \dots$$

مثال:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \rightarrow c = 2, f(n) = 1$$

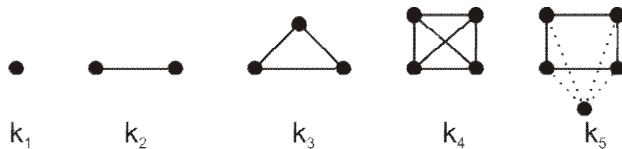
$$\rightarrow a_n = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} = 2^{n-1} + \dots + 2^0 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

مثال: مرتب سازی میبایی را در نظر بگیرید. تعداد مقایسه‌های لازم را مناسبه کنید.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \rightarrow c = 0, f(n) = n-1$$

$$\rightarrow a_n = \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

k_n شکلی است که از ترسیم یک n ضلعی با تمام اقطارش حاصل شده (کراف کامل) تعداد یالهای آن از رابطه‌ی $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$ بدست می‌آید.



تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب سازی ادغامی: در این روش ابتدا آرایه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را با تقسیم‌های متوالی به قسمت‌های دیگر تقسیم می‌کنیم، سپس مرتب سازی در راه بازگشت صورت می‌پذیرد و با هم ادغام می‌شوند.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + n - 1 & n \geq 2, n = 2^m \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$2a_{\frac{n}{2}} = 2\left[2a_{\frac{n}{4}} + \frac{n}{2} - 1\right] = 2^2a_{\frac{n}{4}} + n - 2$$

$$2^2a_{\frac{n}{4}} = 2^2\left[2a_{\frac{n}{8}} + \frac{n}{4} - 1\right] = 2^3a_{\frac{n}{8}} + n - 2^2$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} a_n - 2a_{\frac{n}{2}} &= n - 2^0 \\ 2a_{\frac{n}{2}} - 2^2a_{\frac{n}{4}} &= n - 2^1 \\ 2^{m-1}a_{\frac{n}{2^{m-1}}} - 2^ma_{\frac{n}{2^m}} &= n - 2^{m-1} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} a_n = (n - 2^0) + (n - 2^1) + \dots + (n - 2^{m-1}) \\ & \qquad \qquad \qquad = mn - (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{m-1}) = mn - (2^m - 1) \end{aligned}$$

- رابطه بازگشتی حالت خاصی از روابط تقسیم

و حل است، این روابط برای تجزیه و تحلیل

$$= mn - n + 1 \xrightarrow{m=\log_2^n} a_n = n \log_2^n - n + 1$$

الگوریتم‌های بازگشتی به کار می‌روند. فرمول عمومی یک رابطه‌ی تقسیم و حل به صورت

$$a_n = ca_{n/d} + f(n) \text{ است که } c \text{ و } d \text{ ثابت و } f(n) \text{ تابعی از } n \text{ است.}$$

حل روابط بازگشتی با استفاده از معادله مشخصه:

تعریف: اگر $k \in \mathbb{Z}^+$ و $c_n (\neq 0), \dots, c_{n-1} (\neq 0), c_{n-k} (\neq 0)$ اعداد حقیقی و a_n یک دنباله باشد آنگاه
 $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n), \quad n \geq k$ یک رابطه بازگشتی از مرتبه k است. اگر
 $f(n) = 0, \quad \forall n \geq 0$ رابطه بازگشتی را همگن (متجانس) و در غیر این صورت ناهمگن گوئیم.

روابط بازگشتی همگن مرتبه دو: $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$
 $c_n = cr^n$ در نظر گرفته می شود پس داریم $c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$ و $r, c \neq 0$. به این معادله، معادله مشخصه می گوئیم. که اگر r_1, r_2 ریشه های آن باشند سه حالت داریم:

$$r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$r_1 = r_2 = r \quad (2)$$

$$r_1 \neq r_2 \quad (3) \text{ و هر دو مقلط هستند.}$$

(1) در حالت اول جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ که c_1 و c_2 ثابت های دلخواهی هستند که با دانستن شرایط مرزی مشخص می شوند.

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 & n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

$$\text{معادله مشخصه: } r^2 + r - 6 = 0 \rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \rightarrow r_1 = 2, r_2 = -3$$

$$\rightarrow a_n = c_1 (2)^n + c_2 (-3)^n \rightarrow \begin{cases} a_0 = c_1 2^0 + c_2 (-3)^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = c_1 2^1 + c_2 (-3)^1 = 2c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow a_n = 2^n$$

مثال: عبارت مساباتی مجاز بدون پرانتز شامل 0 تا 9 و +, * و / را در نظر می گیریم. اگر a_n تعداد این مسابقات مجاز باشد بریعی است $a_1 = 10$ و $a_2 = 100$ و $a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}, \quad n \geq 3$ چرا که در عبارات $n-1$ علامتی فقط یک عدد می توان اضافه کرد اما به $n-2$ علامتی ها می توان یکی از 29 علامت $0, +, 9, \dots, *, 9, \dots, /, 9, \dots$ را اضافه کرد.

$$\begin{cases} a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2} & n \geq 3 \\ a_1 = 10, a_2 = 100 \end{cases}$$

$$\rightarrow r^2 - 10r - 29 = 0 \rightarrow r_1, r_2 = 5 \pm 3\sqrt{6}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{5}{3\sqrt{6}} \left[(5 + 3\sqrt{6})^n - (5 - 3\sqrt{6})^n \right]$$

(2) در حالتی که ریشه ها موهومی اند باز جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ است که c_1 و c_2 موهومی اند. در عین حال وقتی ضرایب رابطه بازگشتی حقیقی است، جواب عمومی حاصل نیز حقیقی است.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad n \geq 0$$

$$z = x + iy \rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\rightarrow z^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad n \geq 0$$

(3) در حالتی که معادله ی مشخصه دارای ریشه مضاعف $r = r_1 = r_2$ است، جواب عمومی به صورت $a_n = (c_1 + nc_2)r^n$.

در حالت عمومی، اگر $c_n a_n + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$ و $c_n \neq 0$ ، $c_{n-k}, \dots, c_{n-1}$ اعداد حقیقی و r یک ریشه تکراری با مرتبه m ، $z \leq m \leq k$ باشد. آن قسمت از جواب عمومی که مربوط به ریشه ی r است عبارت است از $(A_0 + A_1 n + \dots + A_{m-1} n^{m-1})r^n$ که $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ ثابت های دلخواهی هستند.

مثال:

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_{n+2} - 4a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = 3, a_1 = 4, a_2 = 22 \end{cases} \rightarrow r^3 - 3r^2 + 4 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 2, r_3 = -1$$

$$\rightarrow a_n = (A_0 + A_1 n) 2^n + c(-1)^n$$

از جایگزینی شرایط مرزی داریم:

$$A_0 = 1, A_1 = 2, c = 2 \rightarrow a_n = (1 + 2n) 2^n + 2(-1)^n$$

روابط بازگشتی ناهمگن خطی با ضرایب ثابت:

رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه k و با ضرایب ثابت $a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \dots + c_{n-k}a_{n-k} = f(n)$ ، $n \geq k$ که $c_{n-k} \neq 0, \dots, c_{n-1}, c_n \neq 0$ اعداد ثابت حقیقی و $f(n)$ یک تابع غیر صفر است.

- رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه $2 \leftarrow n \geq 2$ ، $a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n)$ ، $c \neq 0$ و $f(n)$ تابع غیر صفر.

جواب عمومی این رابطه به صورت $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ که $a_n^{(h)}$ جواب عمومی رابطه ی بازگشتی همگن $a_n + ca_{n-1} + ba_{n-2} = 0$ است و $a_n^{(p)}$ یک جواب ویژه که بسته به $f(n)$ از راه های زیر بدست می آید.

(1) $f(n)$ بصورت یکی از حالت های جدول باشد و جوابی برای رابطه بازگشتی همگن نباشد $a_n^{(p)}$ هم مثل ستون دوم است.

(2) $f(n)$ حاصل جمعی از توابع ستون اول باشد $a_n^{(p)}$ هم حاصل جمع جملات متناظر در ستون دوم خواهد بود.

(3) وقتی یکی از مجموعدهای تابع $f(n)$ مثل $f_1(n)$ جوابی برای رابطه‌ی بازگشتی همگن باشد یعنی $f_1(n) = cr^n$ یا $f_1(n) = (c_1 + c_2 n)r^n$ که در آن r ریشه معادله مشخصه است. در چنین حالتی جواب ویژه‌ی منسوب به $f_1(n)$ را به کوچکترین توانی از n مثل n^s که در آن هیچ مجموعدهی از $n^s f_1(n)$ نباشد ضرب می‌کنیم. در این حالت $n^s f_1(n)$ قسمت متناظر از $a_n^{(p)}$ است.

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
c	A ثابت
ثابت	$A_0 + A_1 n$
n	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2$
n^2	$A_0 + A_1 n + \dots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t$
$n^t \quad t \in \mathbb{Z}^+$	Ar^n
$r^n \quad r \in \mathbb{R}$	$A \sin a n + B \cos a n$
$\sin a n$	$A \sin a n + B \cos a n$
$\cos a n$	$r^n (A_0 + A_1 n + \dots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t)$
$n^t r^n$	$Ar^n \sin a n + Br^n \cos a n$
$r^n \sin a n$	$Ar^n \sin a n + Br^n \cos a n$
$r^n \cos a n$	

توابع مولد:

مثال: اگر بفوایم 12 پرتقال را بین 3 نفر به ترتیبی که اولی حداقل 4 تا، دومی حداقل 2 تا و سومی حداقل 2 تا و حداقل 5 تا داشته باشند تقسیم کنیم چند حالت داریم؟
ضریب x^{12} برابر تعداد حالات است.

$$f(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \leftarrow \text{تابع مولد}$$

مثال: 24 توپ را از بین تعداد نامحدود توپ‌هایی با رنگ‌های قرمز، سبز، سفید و سیاه به گونه‌ای انتخاب کنیم که حداقل 6 توپ سیاه و به تعداد زوج توپ سفید داشته باشیم.
ضریب x^{24} جواب مساله است.

$$f(x) = (x^0 + x^1 + \dots + x^{18})(x^0 + x^1 + \dots + x^{24})(x^0 + x^2 + x^4 + \dots + x^{18})$$

تعریف: فرض کنید که $a_0, \dots, a_6, \dots$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد تابع

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

را تابع مولد رشته‌ی مزبور گوئیم.

مثال: $(1+x)^n$ تابع مولر برای رشته‌ی $c_n^0, c_n^1, c_n^2, \dots, c_n^n, 0, 0, 0, \dots$ است.

- برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ قضیه دو جمله‌ای نیوتون به صورت زیر است.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \dots + c_n^n x^n$$

این فرمول را برای n های منفی و حقیقی می‌توان تعمیم داد:

$$\forall n, r \in \mathbb{Z}^+, n \geq r \geq 0 \Rightarrow c_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

$$- \quad n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow c_{-n}^r = \frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} = \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!(n-r)!} = (-1)^r c_{n+r-1}^r$$

$\Rightarrow$ اگر

$$\forall n \Rightarrow c_n^0 = 1$$

مثال: برای $n \in \mathbb{Z}^+$ بسط سری مک‌لورن برای $(1+x)^{-n}$ به صورت زیر است.

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!} x^2 + \dots + \dots$$

$$= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-r+1)}{r!} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c_{n+r-1}^r x^r$$

لذا $(1+x)^{-n}$ تابع مولر رشته‌ی $c_{-n}^0, c_{-n}^1, c_{-n}^2, \dots$ است.

نکات مهم:

$$1 - (1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \dots + c_n^n x^n$$

$$2 - (1+ax)^n = c_n^0 + c_n^1 ax + c_n^2 a^2 x^2 + \dots + c_n^n a^n x^n$$

$$3 - (1+x^m)^n = c_n^0 + c_n^1 x^m + c_n^2 x^{2m} + \dots + c_n^n x^{nm}$$

$$4 - (1+x^{n+1})/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$5 - 1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$6 - \frac{1}{(1+x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1 x + c_{-n}^2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-n}^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 + (-1)^k c_{k+n-1}^k x^k$$

$$7 - \frac{1}{(1-x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1 (-x) + c_{-n}^2 (-x)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-n}^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k-1}^k x^k$$

$$\text{اگر } h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ و } h(x) = f(x)g(x) \text{ و } g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \text{ و } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ ، آنگاه}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{k-i} \text{ و } k \geq 0$$

مثال: ضریب x^{15} را، در $f(x) = (x^2 + x^3 + \dots)^4$ بدست آورید.

$$f(x) = (x^2 (1 + x + \dots))^4 = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} c_{n+r-1}^r x^r \Rightarrow c_{11}^7 = 120$$

ضریب x^{15} در $f(x)$ مثل ضریب x^7 در $\frac{1}{(1-x)^4}$ می باشد.

مثال: نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $c_{2n}^n = \sum_{i=0}^n (c_n^i)^2$

می دانیم $(1+x)^{2n} = [(1+x)^n]^2$ ، ضریب x^n در $(1+x)^{2n}$ است.

$$\rightarrow [c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \dots + c_n^n x^n]^2 \rightarrow c_n^0 c_n^0 + c_n^1 c_n^{n-1} + \dots + c_n^n c_n^0$$

$$c_n^r = c_n^{n-r} \Rightarrow c_{2n}^r = \sum_{i=0}^n (c_n^i)^2 \quad \text{می دانیم}$$

حل روابط بازگشتی با استفاده از توابع مولر:

مثال: تعداد جابجایی های حلقه ها در برج هانوی:

$$\begin{cases} a_n = 2 a_{n-1} + 1, & n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\rightarrow A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2 a_{n-1} + 1) x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

$$\rightarrow A(x) = 2xA(x) + \frac{x}{1-x} \rightarrow (1-2x)(A(x)) = \frac{x}{1-x}$$

$$\rightarrow A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x} = \frac{a(1-2x) + b(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$

$$\rightarrow x = a(1-2x) + b(1-x) \rightarrow a = -1 \text{ \& } b = 1$$

$$\rightarrow A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) x^n$$

$$\rightarrow a_n = 2^n - 1$$

پایان فصل پنجم

فصل ششم: مروری بر نظریه ی گرافها

بسیاری از مسائل روزمره ی زندگی را می توان به صورت انتزاعی توسط مجموعه ای گسسته از اشیا و روابط دودویی تعریف شده بر آن بیان کرد. در این گونه مسائل نمایش گرافیکی مناسب ترین روش نمایش است. این امر به مطالعه ی **نظریه ی گرافها** منجر می شود.

تعاریف:

- گراف سودار به صورت زوج مرتب (V, E) است، که در آن V مجموعه ای از متناهی از رئوس و E رابطه ای دودویی در V می باشد.
- عناصر V را رئوس و زوج مرتب های E را یال های گراف **سودار** می نامیم.
- یک یال حادث با رئوسی است که به وسیله ی آن به هم وصل می شوند. یال (a, b) حادث از a و حادث به b است. a راس ابتدایی و b راس انتهایی است.
- دو راس **مجاور** خوانده می شوند که به وسیله ی یالی به هم وصل می شوند.
- یک راس **منفرد** است هرگاه هیچ یالی با آن حادث نباشد و اگر یالی حادث به همان راس باشد **ملقه** نامیده می شود.
- گراف بی سوی G به صورت زوج مرتب (V, E) است که V مجموعه ای متناهی و E مجموعه ای از مجموعه های دو عنصری از V است.
- دو گراف را **یکریخت** می گوییم هرگاه یک تناظر یک به یک بین رئوس و یک تناظر یک به یک بین یال های آن موجود باشد و مفهوم حادث بودن محفوظ بماند.
- اگر $G(V, E)$ باشد $G'(V', E')$ را زیرگراف G گوئیم هرگاه $E' \subseteq E$ و $V' \subseteq V$ به طوری که یال های E' تنها با رئوس V' حادث باشند.
- اگر یک زیرگراف از G شامل تمامی رئوس V باشد آن را زیرگراف **پوشا** می خوانیم.
- مکمل زیرگراف G' نسبت به G زیرگرافی چون $G''(V'', E'')$ است که $E'' = E - E'$ و $V'' = V$ رئوسی را شامل می شود که یال های E'' با آنها حادثند.
- فرض کنید $f \neq U \subseteq V$ زیرگراف $G_1(U, E_1)$ را زیرگراف **الفا** گوئیم هرگاه E_1 شامل تمام یال هایی باشد که رئوس انتهایی آنها در U وجود دارد.
- گراف **کامل** بی سوی n راسی را با k_n نشان می دهیم که بین هر دو راس متمایز آن یالی است. همچنین است گراف سودار n راسی.

- مکمل گراف G با n راس مکمل آن نسبت به k_n است و با $\bar{G}$ نمایش داده می شود.
- اگر برای گراف $G(V, E)$ ، E یک مجموعه ی پندگانه از زوج های مرتب از $V \times V$ باشد آنگاه G را یک گراف **پندگانه ی سودار** گوئیم.
- در گراف های سودار و بی سوی پندگانه هیچ محدودیتی برای تعداد پیکانها از یک نقطه به نقطه ی دیگر وجود ندارد.
- گراف معمولی یا پندگانه را با نام گراف نام می بریم. اگر بخواهیم تاکید کنیم گراف غیر پندگانه را گراف **فقطی** می نامیم.
- یک گراف **وزن دار** را به صورت چهار تایی (V, E, f, g) یا سه تایی (V, E, g) تعریف می کنیم که در آن ها V رئوس E یال ها و f تابعی با دامنه ی V و g تابعی با دامنه ی E هستند. f, g بیانگر انتساب وزن ها به رئوس و یالها هستند.
- در یک گراف سودار **مسیر** رشته ای از یالها مثل $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}$ به گونه ای است که راس انتهایی e_{ij} منطبق بر راس ابتدایی e_{ij+1} است. مسیر را رشته ای از رئوس نیز می توان نمایش داد.
- مسیر را **ساده** می گوئیم اگر هیچ یالی در آن تکرار نشود و **ابتدایی** گوئیم هرگاه هیچ راسی در آن دو بار ملاقات نشود.
- **مدار** مسیری مثل $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}$ است که در آن راس انتهایی یال e_{ik} بر راس ابتدایی e_{i1} منطبق باشد.
- مدار **ساده** است هرگاه شامل یال تکراری نباشد و **ابتدایی** است هرگاه هیچ راسی در آن دو بار ملاقات نشود.
- گراف بی سو را **همبند** می نامیم هرگاه بین هر دو راس دلفواهی مسیری موجود باشد. در غیر این صورت **ناهمبند** است.
- گراف سودار همبند است هرگاه گراف بی سوی حاصل از آن همبند باشد.
- هر گراف نا همبند شامل چندین زیر گراف همبند است که هر کدام را یک **مؤلفه** برای گراف می نامیم.
- یک گراف سودار **همبند قوی** است هرگاه به ازای هر دو راس a و b هم مسیری از a به b و هم مسیری از b به a موجود باشد.

مثال: در بازی عماقت لفظه ای 4 مکعب با وجه هایی به رنگ های متفاوت (در کل 4 رنگ متفاوت) داریم. می خواهیم آنها را روی هم بپیمیم به طوری که در هر ستون 4 رنگ متفاوت دیده شود. برای این کار در حالت عمومی برای 4 مکعب یک کراف چندگانه ی وزن دار تشکیل داده و سعی خواهیم کرد دو زیرکراف با ویژگی های زیر در آن پیدا کنیم.

(1) هر زیرکراف باید شامل 4 راس و 4 یال با برچسب های مختلف باشد.

(2) در هر زیرکراف درجه ی هر راس باید دقیقاً برابر 2 باشد.

(3) دو زیرکراف نباید یال مشترک داشته باشند.

- مسیر و مدار **اولری** به مسیر و مداری گفته می شود که از هر کدام از یال های کراف تنها و تنها یک بار عبور کند.

- **درجه ی** هر راس تعداد یال های حادث با آن تعریف می شود. درجه ی هر راس V را با $\deg(V)$ نمایش می دهند.

لم 1: در یک کراف بی سو $G(V, E)$ رابطه ی زیر را داریم.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)| \quad \text{که } |E(G)| \text{ تعداد یالها می باشد.}$$

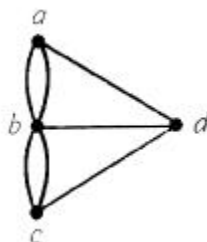
لم 2: در یک کراف بی سو تعداد رئوس از درجه فرد همیشه زوج است.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{\text{fard}} \deg(v) = \sum_{\text{zaj}} \deg(v) = 2|E(G)| \quad \text{زوج است}$$

قضیه: کراف بی سوی $G(V, E)$ دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر راسی از درجه فرد نداشته باشد.

لم 3: کراف بی سوی G دارای مسیر اولری است اگر و تنها اگر همبند بوده و حداکثر دو راس از درجه فرد داشته باشد.

مثال: یکی از سرگرمی های مردم کانیکزبرگ این بود که با شروع از یک نقطه از هفت پل واقع بر رودخانه ی پرکل تنها و تنها یک بار عبور کرده به نقطه ی عزیمت خود برگردند. نقشه را می توان به صورت کرافی که یالهای آن پل ها و رئوس آن جزیره ها و دو طرف رودخانه هستند نشان داد.



اولر که پدر نظریه ی گرافها لقب گرفته نشان داد حل مساله در گرو پیدا کردن یک مدار اولری در این گراف است که با توجه به 4 راس درجه ی فرد آن نه مسیر و نه مدار اولری در این گراف موجود نمی باشد.

- برای گراف سودار $G(V, E)$ **درجه ی ورودی** یک راس مثل v برابر تعداد یال های حادث به آن و **درجه ی خروجی** یک راس برابر تعداد یال های حادث از آن تعریف می شود. درجه ی ورودی را با $\deg^-(v)$ و درجه ی خروجی را با $\deg^+(v)$ نمایش می دهیم.

- هر حلقه در گراف سودار موجب افزایش یک واحد به $\deg^-(v)$ و یک واحد به $\deg^+(v)$ می شود.

تفصیه: گراف سودار $G(V, E)$ دارای **مدار اولری** است اگر و تنها اگر همبند بوده و برای هر $v \in V$ داشته باشیم $\deg^+(v) = \deg^-(v)$.

و دارای **مسیر اولری** است اگر و تنها اگر همبند بوده و به استثنای دو راس مثل a و b برای هر راس $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ برقرار باشد و برای رئوس a و b نیز داشته باشیم:

$$\deg^+(b) = \deg^-(b) + 1, \quad \deg^-(a) = \deg^+(a) + 1$$

مسیر و دور هامیلتونی: مسیر (دور) هامیلتونی به مسیری (دوری) گفته می شود که از هر راس گراف فقط و فقط یک بار عبور کند.

- تنها راه حل برای نشان دادن اینکه گرافی دارای مسیر هامیلتونی است تشکیل صریح آن است.
- اگر گرافی دارای دور هامیلتونی باشد همبند است.

چند نکته مفید برای بدست آوردن یک دور هامیلتونی در گراف $G(V, E)$.

- (1) اگر G دور هامیلتونی دارد برای هر راس $v \in V$, $\deg(v) \geq 2$.
- (2) اگر برای $a \in V$, $\deg(a) > 2$, در زمان تشکیل دور هامیلتونی به مفض عبور از راس a می توان همه ی یال های حادث با آن را حذف کرد.
- (3) اگر برای $a \in V$, $\deg(a) > 2$ دو یال حادث با راس a باید در دور هامیلتونی قرار بگیرند.
- (4) در زمان تشکیل دور هامیلتونی برای G نمی توانیم دوری برای یک زیر گراف از G تشکیل دهیم مگر اینکه همه ی رئوس را شامل شوند.

راهی برای نشان دادن اینکه بعضی گراف ها مسیر هامیلتونی ندارند :

رئوس را با x و y طوری برپسب می زنیم که رئوس x حادث با y و رئوس y حادث با x باشد. دور هامیلتونی شامل $|V|$ رئوس است که از x و y های متوالی ظاهر شده سپس تعداد x و y باید به اندازه $\frac{|V|}{2}$ موجود باشد.

دور هامیلتونی در یک گراف کامل :

مثال : هفده نفر می خواهند در یک میزگرد به شیوه هایی بنشینند که هر بار دو طرف یک شقص افراد متفاوتی نشسته باشند.

در گراف کامل K_n ، $n \geq 3$ ، n رئوس و $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ یال موجود است. و حداقل $\frac{n-1}{2}$ دور هامیلتونی با یال عای متفاوت موجود است. بنابراین به $\frac{16-1}{2} = 8$ روش ممکن می توانند بنشینند.

تعریف : یک گراف کامل سودار با n رئوس که با K_n^* نمایش داده می شود گرافی است سودار و با n رئوس به طوری که برای هر دو رئوس x و y ، (x, y) یا (y, x) موجود باشد. K_n^* را چرخه می گوئیم.

قضیه : K_n^* دارای یک مسیر (سودار) هامیلتونی است.

اثبات به شیوه ی استقرا :

(1) $n = 2$ درست است.

(2) K_n^* دارای مسیر هامیلتونی است. (فرض)

(3) اگر از K_{n+1}^* رئوس v_{n+1} را حذف کنیم، گراف K_n^* درست می آید که

مسیر هامیلتونی نام دارد، دو امکان وجود خواهد داشت

الف) برای $1 \leq k \leq n$ یال های (v_k, v_{n+1}) ، (v_{n+1}, v_{k+1}) در گراف

هستند که در این صورت آنها را با یال (v_k, v_{k+1}) جایگزین می کنیم.

ب) (v_n, v_{n+1}) در K_{n+1}^* است که در این صورت این یال به مسیر اولیه

در فرض مسئله اضافه می شود.

قضیه : اگر $G(V, E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با n رئوس باشد، اگر برای هر $x, y \in V$ رابطه ی

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1$$

برقرار باشد G دارای مسیر هامیلتونی است.

اثبات : G همبند است چون در غیر این صورت C_1, C_2 دو مؤلفه ی گراف با n_1, n_2 رئوس بوده و

داریم :

$$\begin{cases} y \in C_2 \rightarrow \deg(y) \leq n_2 - 1 \\ x \in C_1 \rightarrow \deg(x) \leq n_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \deg(x) + \deg(y) \leq n - 2 \quad \text{که با فرض تناقض دارد}$$

لم: اگر $G(V, E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با n راس باشد، اگر برای هر $v \in V$ ، $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$ آنگاه G مسیر هامیلتونی دارد.

قضیه: اگر $G(V, E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با $|V| = n \geq 3$ راس باشد و برای هر دو راس x و y غیر مجاور، $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ برقرار باشد آنگاه G یک دور هامیلتونی دارد.

کوتاه ترین مسیر ها در گراف های وزن دار (الگوریتم دیکسترا):
فرض کنید $G(V, E, W)$ یک گراف وزن دار است. وزن یالی مثل (i, j) با $w(i, j)$ نشان داده شده و آن را طول آن یال می نامیم. طول یک مسیر در G مجموع طول یال های تشکیل دهنده ی آن است.

نکته: مسئله مهم تعیین کوتاه ترین مسیر از یک راس به راس دیگر مثل a تا z است. برای این کار از **الگوریتم دیکسترا** استفاده می کنیم.

الگوریتم دیکسترا:

- 1) در ابتدا $T = V - \{a\}$ و برای هر $t \in T$ ، $l(t) = w(a, t)$ و $p = \{a\}$ را کوتاه ترین مسیر از a به t می نامیم به طوری که شامل هیچ راس دیگری از T نباشد. $l(t)$ را اندیس t نسبت به p می گوئیم و اگر مسیری وجود نداشت برابر ∞ قرار می دهیم.
- 2) فرض می کنیم $x \in T$ راسی است که کوچکترین اندیس نسبت به p را دارد.
- 3) اگر x راسی باشد که می خواهیم از a به آن برسیم، این صورت الگوریتم خاتمه می یابد. در غیر این صورت $P' = P \cup \{x\}$ و $T' = T - \{x\}$ و برای هر $t \in T'$ اندیس آن را با استفاده از رابطه $l'(t) = \min \{l(t), l(x) + w(x, t)\}$ حساب می کنیم.
- 4) مراحل 2 و 3 را با p' به جای p و T' به جای T تکرار می کنیم.

اگر در مرحله دوم این الگوریتم، رثوسی را ذخیره کنیم که منجر به کوتاه ترین مسیر از a به x می شوند نه تنها کوتاه ترین مسیر از a به x بلکه خود این مسیر را نیز به دست خواهیم آورد.

نکته: پیدا کردن دور هامیلتونی دارای کمترین وزن به ویژه برای n های بزرگ عملاً امکان پذیر نیست.

قاعده ی نزدیک ترین همسایه :

فرض می کنیم $G(V, E, W)$ گراف وزن دار بی سو با n راس است. قاعده ی نزدیکترین همسایه برای بدست آوردن دور هامیلتونی نیمه بهینه H به صورت زیر است.

(1) فرض می کنیم $x \in V$ یک راس دلفواه از V است $P \leftarrow \{x\}$, $H \leftarrow f$, $a \leftarrow x$ (اولین راس H)

(2) برای $i = 1$ تا $i = n - 1$:

فرض $y \in V$, $y \notin P$ راسی که $w(x, y)$ آن کمترین مقدار است.

$$x \leftarrow y, P \leftarrow P \cup \{y\}, H \leftarrow H \cup \{x, y\}$$

(3) $H \leftarrow H \cup \{x, a\}$ (یال ایبار شده با اولین و آخرین راس را اضافه می کنیم)

تعریف: گراف $G(V, E)$ را **هامنی** گویند هرگاه G را بتوان در صفحه به گونه ای رسم کرد که یال های آن تنها در رئوس G متقاطع باشند.

تعریف: گراف G را **دو بخشی** گوئیم هرگاه $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = f$ و برای هر یال یک راس متعلق به V_1 و دیگری متعلق به V_2 باشد، اگر هر راس از V_1 به تمام رئوس V_2 وصل باشد گراف را **دو بخشی کامل** می گوئیم. در حالت افیر که $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, G را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم.

تعریف: فرض کنید G یک گراف بی سو و بی حلقه است که در آن $E \neq f$ اگر یال $e = \{v, w\}$ حذف و $\{u, v\}$, $\{w, v\}$ را اضافه کنیم که $v \in G$ در این صورت یک **زیر بخش مقدماتی** از G حاصل خواهد شد.

تعریف: گراف های بی سو و بی حلقه G_1, G_2 را **همریخت** گوئیم هرگاه یکریخت باشند یا از یک گراف بی سو و بی حلقه H به وسیله یک رشته از زیربخش ها بدست آیند.

تعریف: یک **ناحیه** از گراف هامنی ناحیه ای از صفحه است که به یال های گراف محدود بوده و دیگر قابل تقسیم به زیرنواحی نیست. اگر گراف را در امتداد یال ها ببریم ناحیه ها جدا می شوند.

نکته: یک ناحیه **متناهی** است هرگاه مساحت آن متناهی باشد در غیر این صورت **نامتناهی** است.

قضیه: فرض کنید G یک گراف همبند و هامنی با $|V| = v$, $|E| = e$ است. اگر r تعداد نواحی تعریف شده به وسیله G باشد آنگاه داریم $v - e + r = 2$

اثبات با استقرا:

$$1) e=1 \begin{cases} v=1 \rightarrow r=2 \\ v=2 \rightarrow r=1 \end{cases}$$

$$2) e=k \quad v-k+r=2 \quad \text{فرض}$$

$$3) e=k+1 \Rightarrow$$

A) با حذف a داریم $G \rightarrow$ راسی از درجه 1 دارد

$$(v-1)+r-k=2 \rightarrow [(v-1)+1]-(k+1)+r=v-e+r=2$$

B) با حذف a داریم $G \rightarrow$ راسی از درجه 1 ندارد

$$(v-1)-k+(r-1)=2 \rightarrow [(v-1)+1]-(k+1)+[(r-1)+1]=2$$

لم: فرض کنید که G یک گراف بی سوی همبند، هامنی و بدون حلقه با $|V|=v$, $|E|=e > 2$ است، در این صورت: $e \leq 3v-6$

اثبات: اگر b تعداد همه ی یال های مرزی برای نواحی باشد

$$\frac{2e}{3} \geq r \quad \text{یا} \quad 2e \geq 3r \quad \Leftrightarrow b \leq 2e, b \geq 3r$$

$$2 = v - e + r \leq \frac{2e}{3} + v - e = r - \frac{e}{3} \rightarrow e \leq 3v - 6$$

در نتیجه اگر G گرافی فطی همبند و بدون حلقه با $|E| > 2$ یال باشد و $e > 3v-6$ آنگاه G هامنی نیست.

قضیه (لوراتاوسکی): گراف G هامنی است اگر و تنها اگر دارای زیرگرافی همریخت با k_5 یا $k_{3,3}$ نباشد.

پایان فصل ششم

فصل هفتم: درخت ها

درخت ها حالت خاصی از گراف ها هستند. اگر $G(V, E)$ گرافی بی سو و بی حلقه باشد، G را درخت گوئیم. اگر همبند بوده و دارای هیچ دوری نباشد. اگر G_i همبند نباشد اما هر کدام از مؤلفه های آن یک درخت باشد آن را جنگل می گوئیم. اگر G یک درخت باشد با T نمایش داده می شود.

قضیه: اگر a و b دو راس از یک درخت با $|V| > 1$ باشد آنگاه حداقل یک راس در V وجود دارد که درجه ی آن مساوی یک است.

قضیه: اگر $T(V, E)$ یک درخت باشد در این صورت داریم $|E| = |V| - 1$

لم: اگر $T(V, E)$ یک درخت با $|V| > 2$ باشد آنگاه دست کم دو راس از درجه یک دارد. اثبات:

$$\text{فرض } |V| = n \rightarrow \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2$$

$$\deg(v_i) \geq 2, \quad i = 2, \dots, n \rightarrow \text{تنها یک راس از درجه 1 داریم}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 1 + \sum_{i=1}^n \deg(v_i) \geq 1 + 2n - 2 = 2n - 1 \rightarrow -2 \geq -1 \quad \text{تناقض}$$

قضیه: اگر دو راس غیر مجاور درخت T را با هم جمع کنیم در گراف حاصل یک دور ایجاد می شود.

قضیه: گراف $G(V, E)$ یک درخت است اگر و تنها اگر دارای دوری نباشد و $|E| = |V| - 1$

اثبات: نیمی از قضیه که توسط استقرا ثابت می شود. حال می خواهیم نشان دهیم اگر گراف G دارای دور نبوده و $|E| = |V| - 1$ آنگاه G همبند است.

اگر $G_1, \dots, G_k$ مولفه های همبند باشند و $G_i(V_i, E_i)$ هر کدام از مولفه ها یک درخت است زیرا همبند است و دور ندارد و از آنجا که $k = 1$ است پس فقط یک مولفه ی همبند داریم.

$$|E_i| = |V_i| - 1, \quad |E| = \sum_{i=1}^k |E_i| = |V| - k$$

قضیه: عبارات زیر در مورد گراف بی سو و بی حلقه ی $G(V, E)$ هم ارزند:

(الف) G یک درخت است.

(ب) G همبند است و $|E| = |V| - 1$.

(ج) G شامل هیچ دوری نیست و $|E| = |V| - 1$.

(د) G همبند است ولی حذف هر یال آن را به دو درخت تقسیم می کند.

(ه) G شامل هیچ دوری نیست ولی اگر دو راس غیر مجاور آن را به هم وصل کنیم دقیقاً یک دور خواهد داشت.

درخت ریشه دار :

- گراف سودار $G(V, E)$ یک درخت سودار است هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت یال ها درخت باشد.
- درخت سودار $T(V, E)$ را ریشه دار گوئیم هرگاه راس منمصر به فرد r موجود باشد به طوری که $\deg^-(v) = 0$ و برای هر راس $\deg^-(v) = 1$.
- در یک درخت ریشه دار راسی مانند v که $\deg^+(v) = 0$ است برگ یا راس خارجی (کره خارجی) نامیده می شود و باقی رئوس راس داخلی (کره داخلی) یا شاخه نامیده می شوند.
- اگر طول مسیر از ریشه به راسی x باشد می گوئیم آن راس در تراز x واقع شده است.
- برای یال (n, s) که جهت از n به s است n پدر و s فرزند نامیده می شوند.
- هرگاه از a به b مسیری موجود باشد a را نیای b گوئیم و b را نواده ی a .
- رئوسی که پدر مشترک داشته باشند برادر یا خواهر نامیده می شوند.
- اگر راس v_1 یک راس از درخت باشد آنگاه زیر درخت به ریشه ی v_1 مساوی زیرگراف القا شده به وسیله ی v_1 و همه ی نواده های آن در صورت وجود است.

درخت ریشه دار مرتب شده :

- 1) ریشه را با صفر برپسب می زنیم.
 - 2) رئوس تراز یک را از چپ به راست با 1 و 2 و 3 و ... برپسب می زنیم.
 - 3) اگر v راس داخلی با تراز بزرگتر مساوی یک باشد و با a برپسب بفورده به فرزندانش برپسب $a.1, a.2, \dots$ زده می شود.
- این روش به سیستم نشانی عمومی معروف است و هر راس که به صورت $a_1, a_2, \dots, a_n$ برپسب فورده باشد در تراز n است.
 - اگر u و v دو راس با نشانی $b = a_1, \dots, a_m$ و $c = a_1, \dots, a_n$ باشد گوئیم $b < c$ اگر

الف) $m < n$
ب) $a_m < a_n$
 - یک درخت ریشه دار را یک درخت ریشه دار دودویی گوئیم هرگاه به ازای هر راس v درجه ی خروجی آن صفر، یک، یا دو باشد.
 - در کامپیوتر درخت های دودویی که به ازای هر r , $\deg^+(v) = 0$ یا $\deg^+(v) = 2$ است برای نمایش عملیات دودویی استفاده می شوند.
 - نماد (prefin) پیشوندی به افتخار ابداع کننده ی آن نماد لهستانی گفته می شود و مزیت آن این است که علاوه بر به کار نرفتن پرانتز هیچگونه ابهامی ندارد. اگر درخت را از بالا به پایین و از

چپ به راست بفوانیم این نماد به دست می آید و نماد میانوند $a \circ b$ (infin) به صورت $a \circ b$ خواهد بود.

• ترتیب در درخت ها اهمیت زیادی دارد. چند روش سیستماتیک برای مرتب سازی درخت داریم از جمله: مرتب سازی پیش ترتیب (preorder) و مرتب سازی پس ترتیب (postorder) که به صورت بازگشتی زیر تعریف می شوند: اگر T درختی با ریشه r باشد و فقط همین ریشه را داشته باشد خود ریشه پیمایش پیش ترتیب و پس ترتیب را تشکیل می دهد و اگر $|V| > 1$ با فرض $T_1, \dots, T_k$ زیر درخت های T از چپ به راست داریم:

الف) پیمایش پیش ترتیب، نفست ریشه r سپس رئوس T_1 را به صورت پیش ترتیب آنگاه T_2 الی T_k را به همین ترتیب ملاقات می کند.

ب) پیمایش پس ترتیب، نفست رئوس $T_1, \dots, T_k$ را به ترتیب به صورت پس ترتیب و سپس ریشه را ملاقات می کند.

اگر درخت ریشه دار دودویی باشد پیمایش میان ترتیب هم به صورت بازگشتی تعریف می شود: اگر $|V| = 1$ ریشه به تنهایی یک پیمایش میان ترتیب خواهد بود و اگر $|V| > 1$ و T_R, T_L زیردرخت های چپ و راست باشند، نفست T_L به صورت میان ترتیب سپس ریشه و سپس T_R به صورت میان ترتیب پیمایش می شود.

نکته ۱: زیر درخت چپ یا راست می تواند تهی باشد

2) اگر $\deg^+(v) = 1$ و w فرزند باشد باید بین فرزند چپ و راست تمایز قائل شد.

درخت های پوشا:

زیرگراف H از گراف $G(V, E)$ را یک درخت پوشا برای G میگوئیم هرگاه

الف) H یک درخت باشد.

ب) همه ی رئوس V را شامل شود.

نکته: درخت پوشایی که سودار باشد درخت پوشای سودار نامیده می شود.

* اگر گراف G همبند باشد تعداد یال هایی که باید برای بدست آوردن درخت پوشا از G حذف کرد برابر $|E| - |V| + 1$ است. این عدد را رتبه ی مداری G میگوئیم. (یال هایی که حذف می شوند از هر دورگراف انتقاب می شوند)

تفصیه: گراف بی سوی $G(V, E)$ همبند است اگر و تنها اگر شامل درخت پوشا باشد. (این الگوریتم کار را نیست چون زمان پیدا کردن دورها بسیار زیاد است)

دو الگوریتم کار را برای پیدا کردن یک درخت پوشا برای یک گراف همبند الگوریتم های جستجو نفست در سطح (BFS) و جستجو نفست در عمق (DFS) می باشد. در BFS، رئوس واقع در یک تراز پیش از رفتن به تراز بعدی ملاقات می شوند و در DFS ابتدا رئوس با ترازهای بیشتر پردازش می شوند.

الگوریتم DFS :

ورودی: گراف بی سو و همبند $G(V, E)$ که رئوس آن به ترتیب $v_1, v_2, \dots, v_n$ اولویت بندی شده اند.

خروجی: درخت پوشای ریشه دار و سودار $T = (V1, E1)$.

1) $v_1 \leftarrow v_1, V1 \leftarrow \{v_1\}$. ریشه v_1 درخت T خواهد بود. v_1 ملاقات شد. $E1 = f$

2) $2 \leq i \leq n$ کوچکترین اندیسی است که $\{v, v_i\} \in E$ و راس v_i قبلا ملاقات نشده است.

اگر این اندیس وجود نداشته به مرحله ی 3 برو. در غیر این صورت:

الف) $V1 = V1 \cup v_i, E1 = E1 \cup \{v, v_i\}$ ملاقات شد.

ب) $v \leftarrow v_i$

ج) برو به مرحله ی 2.

3) اگر $V = V1$ درخت پوشای ریشه دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می یابد.

4) اگر $V1 \neq V$ ، اگر u پدر v در درخت V باشد $u \leftarrow v$ و برو به مرحله 2.

الگوریتم BFS :

ورودی: گراف بی سوی همبند $G(V, E)$ که رئوس آن به ترتیب $v_1, \dots, v_n$ اولویت بندی شده اند.

خروجی: درخت پوشای ریشه دار و سودار $T = (V1, E1)$.

1) v را درج. $V1 = v_1, E1 = f$ ملاقات شد.

2) اگر صف خالی است T درخت پوشای ریشه دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می

یابد، در غیر این صورت راس v را از سر صف بردار، برای راس v راس v_i $2 \leq i \leq n$

را بررسی کن. اگر v_i ملاقات نشده است و $\{v, v_i\} \in E$ در این صورت:

الف) $V1 = V1 \cup \{v_i\}, E1 = E1 \cup \{v, v_i\}$

ب) راس v_i ملاقات شده و در آخر صف Q درج می شود.

ج) برو به مرحله 2.

درخت های پوشای مینیمم :

در گراف های وزن دار درخت پوشای مینیمم درخت پوشایی است که $\sum_{i=1}^m C_i$ در آن مینیمم است.

برای یافتن این درخت ها دو الگوریتم کراسکال و پریم موجود است.

الگوریتم کراسکال :

ورودی : گراف همبند بی سو و وزن دار $G(V, E)$ که در آن برای هر $C \in E$ یک عدد حقیقی $C(e) > 0$ منسوب شده است.

خروجی : درخت پوشای T با هزینه ی مینیمم.

1) فرض $i = 1$ $C_i \in E$ یالی (غیر از حلقه) از G با $C(e)$ مینیمم.

2) برای $1 \leq i \leq n-2$ اگر یال های $e_1, \dots, e_i$ قبلا انتخاب شده اند از میان بقیه یال ها e_{i+1} را به گونه ای انتخاب می کنیم که :

الف) $C_{(i+1)}$ مینیمم باشد

ب) زیرگراف تشکیل شده تشکیل هیچ دوری ندهد.

3) $i \leftarrow i+1$ ، اگر $i = n-1$ زیرگراف حاصل همبند ، دارای n راس و $n-1$ یال بوده و

درخت پوشای مینیمم است پس الگوریتم خاتمه می یابد.

اگر $i < n-1$ برو به 2.

قضیه : فرض کنید $G(V, E, C)$ یک گراف همبند بی سو است اگر T درخت تولید شده با الگوریتم کراسکال باشد T یک درخت پوشای مینیمم است.

الگوریتم پریم :

ورودی : گراف همبند بی سو و وزن دار $G(V, E)$ که در آن برای هر $e \in E$ یک عدد حقیقی $C(e) > 0$ منسوب شده است.

خروجی : درخت پوشای T با هزینه مینیمم.

1) $i \leftarrow 1$, $P \leftarrow \{v_i\}$ که $v_i \in V$, $w \leftarrow V - \{v_1\}$, $T = f$

2) برای $1 \leq i \leq n-1$, فرض $P = \{v_1, \dots, v_i\}$, $T = \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$, $N = V - P$, به

T یال دارای کمترین هزینه را که راسی مثل $x \in P$ را به راسی مثلا $y = (v_{i-1})$ از N

وصل می کند ، اضافه می کنیم. $P \leftarrow P \cup \{y\}$, $N \leftarrow N - \{y\}$

3) $i \leftarrow i+1$ ، اگر $i = n$ زیرگراف تعریف شده به وسیله ی یال ها $e_1, \dots, e_{n-1}$ همبند دارای

n راس و $n-1$ یال است و درخت پوشای مینیمم برای G است. اگر $i < n$ الگوریتم از

مرحله 2 تکرار می شود.

پایان فصل هفتم