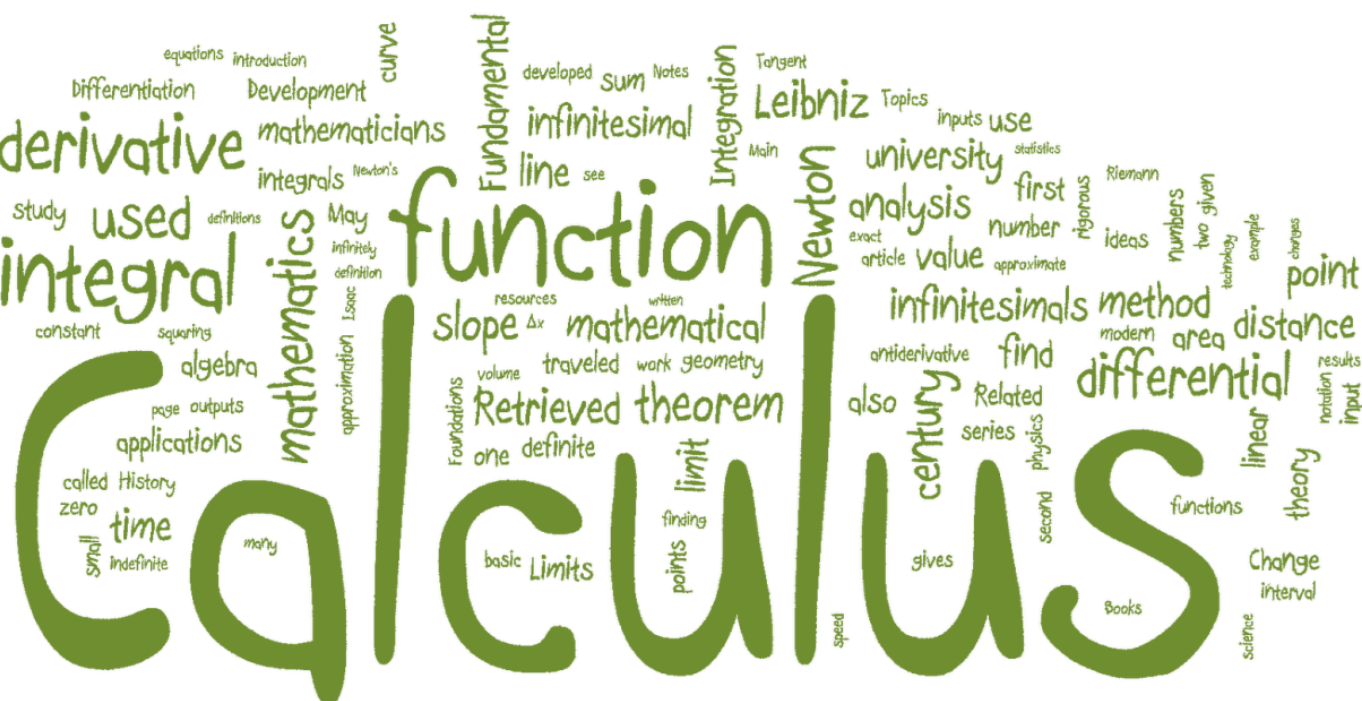


جزوه درس:

استاد: دکتر شادی عسگری

دانشجو: مهندس علی نصر

نیمسال اول ۱۳۸۹-۸۸



$$z = a + ib \quad \operatorname{Re}(z) = a \quad \operatorname{Im}(z) = b \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \bar{z} = a - ib$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \quad z_1 z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 \quad z_1 \times z_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\sin \theta = \frac{z_1 \times z_2}{|z_1| |z_2|} \quad \cos \theta = \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1| |z_2|} \quad |e^{ix}| = |e^{iy}| = 1$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k$$

مستطی

$|z - z_0| = R > 0$ دایره ای به مرکز z_0 و شعاع R

اگر $|z - z_0| = R$ یا خط بی z_0 و z

اگر $|z - z_0| > R$ و $|z - z_0| < R$ وجود ندارد

اگر $|z - z_0| < R$ یعنی تاکنون ای z_0 و قطر بزرگ R

اگر $|z - z_0| = R$ نیم خط در امتداد z_0 و خارج از آن فاصله

اگر $|z - z_0| > R$ هذلولی تاکنون ای z_0 و قطر بزرگ R

اگر $|z - z_0| < R$ وجود ندارد

اگر $k = 1$ یک منصف به خطی با دو سر z_0 و z

اگر $k \neq 1$ دایره آپولونیس با شعاع $\frac{k}{|k^2 - 1|} |z - z_0|$ و مرکز روی خط داصل z_0 و z

$z = z_0 + R e^{i\theta}$ دایره ای به مرکز z_0 و شعاع R

$z = \alpha z_0 + (1 - \alpha) z_1$ برای هر عدد حقیقی خط داصل z_0 و z_1 دایره ای $\alpha < 0$ معادله به خط داصل

$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$ اگر $\alpha \neq 0$ دایره حقیقی و $\beta = 0$ یک خط و برای $\alpha = 0$ یک دایره

$$z_1, z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

$$|z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{معادله درجه دوم}$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \text{Arg } z = \text{Arctan } \frac{y}{x} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = r e^{i\theta} \quad \bar{z} = r e^{-i\theta} \quad -z = r e^{i(\theta+\pi)} \quad iz = r e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad -iz = r e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

$$\sin i\theta = i \sinh \theta \quad \cos i\theta = \cosh \theta \quad z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right\} = \sqrt[n]{r} \angle \frac{\theta+2k\pi}{n}$$

← $\frac{2\pi}{n}$: زاویه بین دو شاخه

$$\sqrt[n]{z} = \pm \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}(|z|+x)} + i \text{sgn } y \sqrt{\frac{1}{2}(|z|-x)} \right\} \quad \text{مقادیر اصلی}$$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = 0 \rightarrow z = \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}$$

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin(\frac{n+1}{2})\theta \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos n\theta = \binom{n}{0} \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots$$

$$\binom{n}{0} \cos \theta + \binom{n}{1} \cos 2\theta + \binom{n}{2} \cos 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \cos(n+1)\theta = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n+2}{2} \theta$$

$$\binom{n}{0} \sin \theta + \binom{n}{1} \sin 2\theta + \binom{n}{2} \sin 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \sin(n+1)\theta = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \sin \frac{n+2}{2} \theta$$

$$z = r e^{i\theta} \rightarrow \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad I = \frac{1}{1-q^{n+1}} = \sum_{k=0}^n q^k$$

فصل ۲ - تابع و جفت های اولیه و بردار آن

مجموعه‌ای با یک تابع است که بر خط به موازات محورهای آن حداقل در یک نقطه قطع کنند.
عبارتی نظیر $H(x, y) = 0$ موقعی با یک تابع است که به ازای هر مقدار x حداقل یک مقدار برای y داشته باشد.
عبارتی نظیر $y = f(x)$ همواره با یک تابع می باشد.

5

دامنه تابع $f: X \rightarrow Y$ مجموعه‌ای از تمام x هایی است که می توان در داخل ضابطه f قرار داد بدون آنکه به هیچ مشکلی مواجه شود.
در مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر داریم

بر تابع $f: X \rightarrow Y$ مجموعه‌ای از تمام y هایی است که با قرار دادن x موجود داخل دامنه تابع در ضابطه f حاصل شده اند.

10

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P(x), Q(x) \text{ چند جمله ای} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid Q(x) = 0\}$$

$$f(x) = \sqrt[m]{P(x)} \rightarrow D_f = D_p \quad m \text{ فرد} \quad D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0\} \quad m \text{ زوج}$$

1/2

$$f(x) = \log \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow P(x) > 0, Q(x) > 0, Q(x) \neq 1$$

15

$$f(x) = a^{P(x)}, a \neq 1, a > 0 \rightarrow D_f = D_p$$

$$f(x) = \tan P(x) \rightarrow D_f = \{x \mid x \in D_p \wedge \cos P(x) \neq 0\}$$

20

$$f(x) = \arcsin P(x) \rightarrow D_f = \{x \mid x \in D_p \wedge -1 \leq P(x) \leq 1\}$$

$$f \circ g \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

یعنی بر تابع کافی است x را بر حسب y بدست آورده $(x = G(y))$ مقدار مجاز برای y در $G(y)$ بردار تابع اولیه است.
پس می گوییم $y = f(x)$ و $x = G(y)$

25

$$x > 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} > 2$$

$$x < 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} < -2$$

$$|x-a| + |x-b| \geq |b-a|$$

$$-|a-b| \leq |x-a| - |x-b| \leq |a-b|$$

$$x^{2n} + mx^n = \left(x^n + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}$$

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

5

بر تابع $y = a \cos^2 x + b \cos x + c$ یا $y = a \sin^2 x + b \sin x + c$ به عبارتی $\cos x$ یا $\sin x$ قرار دهیم و به دست آوریم $\frac{b}{2a}$ و $\frac{1-b^2}{4a}$ (با شرط $1 - \frac{b^2}{4a} \geq 0$)

$$0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1$$

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

10

$$-(|a|+|b|) \leq a \sin x + b \cos x \leq |a|+|b|$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \sin^{2n} x + \cos^{2n} x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq \sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$$

$$\tan x + \cot x \geq 2 \text{ در کمان اول و سوم}$$

$$\tan x + \cot x \leq -2 \text{ در کمان دوم و چهارم}$$

15

شرط تشکیل تابع مرکب $f \circ g$ آن است که $R_g \cap D_f \neq \emptyset$

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{و} \quad D_f = D_g \text{ تساوی دو تابع}$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

20

$$\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f, f(-x) = f(x)$$

تابع فرد و زوج
نسبت به محور استخوان زوج

$$\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f, f(-x) = -f(x)$$

نسبت به مبدأ مختارین فرد

$$f(x) = \frac{(f(x) + f(-x))}{2} + \frac{(f(x) - f(-x))}{2}$$

اگر داشته باشیم مختارین f فرد یا زوج نباشد

25

مجموع و تفاضل دو تابع زوج $\rightarrow$ زوج
 حاصل ضرب دو تابع زوج یا دو تابع فرد $\rightarrow$ زوج
 ترکیب دو تابع فرد $\rightarrow$ فرد
 شق تابع زوج $\rightarrow$ فرد
 شق تابع فرد $\rightarrow$ زوج
 تابع $y = \log_b(ax + \sqrt{a^2x^2 + 1})$ و $y = \log_b \frac{a-x}{a+x}$ فردند
 $y = [x] + [-x] \ (x \in \mathbb{Z})$ $y = [x - [x]]$ $y = \left[\frac{x^2}{x^2 + a^2} \right] \ (a \neq 0)$ $y = \sin \pi [x]$ زوج هم، فرد نیز

تاریخ

مهر خط خوانی محمود علی غنود آر آن احمد کریم نقطه قطع نه

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

10 اگر f یک عامل فقط مثبت باشد یعنی باشد، آنگاه در آن خاصه یک یک است
- تابع اگر f یک یک است ولی f آن در حالت کلی معین نیست

2. تابع کنیدا، اکیدا کنیدا

$$x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تایم سوری

$$x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

15
ماہنامہ

تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ یکباره گیریم؛ هرگاه در این فاصله همواره عددی یا همواره نزدیکی باشد

" " " " " اکیداً نه! " " " " " اکیداً صفری " " " " " اکیداً نزدیکی "

[illegible]

در یک تابع $f(x)$ باشد تا x آید نزدیک a (یعنی اگر $f(x) = 0$ باشد) $f(x)$ نیز نزدیک 0 باشد.

20 اگر $f(x) = 0$ باشد یعنی مقدار تابع در فاصله‌ای ثابت باشد مثلاً «کلمه» «آیه» را حذف کنیم

کتابچہ

تابع روی مجموعه B پیش است که هر خط به موازات محور x مانند $y = b \in B$ مقدار ثابتی را در اختیار هر نقطه قانونه

$$\forall y \in B, \exists x \in D_f \mid f(x) = y \rightarrow R_f = B$$

29 هرگاه یک بیک ویرش باشد می گویند دوجی است.

تابع معکوس یک تابع

اگر تابعی یک به یک باشد معکوس پذیر است توابع اندر آینه ای معکوس پذیرند

$$y = f(x) \rightarrow x = g(y) \rightarrow f(x) = g(y)$$

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

$$R_f = D_{f^{-1}}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x \in D_f$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \in D_{f^{-1}}$$

5

مخوارات توابع معکوس نسبت به هم نسبت به نیمه اول و دوم (خط $y=x$) تقسیم شده اند.

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ واردين پذيرد

اگر نقطه $M(a, b)$ به مخوار تابع f تعلق داشته باشد نقطه $M(b, a)$ به مخوار f^{-1} تعلق داشته باشد $(f^{-1})^{-1}(b) = \frac{1}{f(a)}$

اگر f صعودی باشد f^{-1} نیز صعودی و اگر f نزولی باشد f^{-1} نیز نزولی است

1/2

فاصله دو نقطه متناظر از دو از رابطه $\sqrt{2}|x-y|$ بدست می آید

15

در تابع همگرا نیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0)$ اگر $ad-bc \neq 0$ (تابع یک به یک) داریم $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
اگر $a+d=0$ باشد مخوار معکوس تابع به مخوار تابع منطبق است.

تابع تناوب

$$f(x+T) = f(x)$$

بر مقياس از T نیز دوره تناوب از این تابع است

رفتار تکراری مایه در راسته از محور x صورت گرفته باشد

دامنه توابع تناوب نباید از بالا و یا پایین محدودیت داشته باشد

اگر $f(x)$ تابعی با دوره تناوب T باشد $f(b)$ نیز دوره تناوب $|a/b|T$ خواهد داشت

25

$$f(x) = \sin^{2n}(ax+b), f(x) = \cos^{2n}(ax+b) \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$f(x) = \sin^{2n+1}(ax+b), f(x) = \cos^{2n+1}(ax+b) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$f(x) = \tan^n(ax+b), f(x) = \cot^n(ax+b) \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

5

$$f(x) = mx - [mx] \rightarrow T = \frac{1}{|m|} \quad f(x) = x - m\left[\frac{x}{m}\right] \rightarrow T = |m|$$

$$f = mx + [mx] \quad \text{تبار نیست} \quad f(x) = [mx] + [-mx] \rightarrow T = \frac{1}{|m|}$$

$$f(x) = (-1)^{[mx]} \rightarrow T = \frac{2}{|m|} \quad f(x) = a\left[\frac{x}{a}\right] - b\left[\frac{x}{b}\right] \rightarrow T = [a, b] = b, a \text{ p.p.}$$

تابع ششگانه وقتی متناوب گفته می شود که آن عبارت خطی باشد $ax+b$ باشد بنابراین برای $\sin(ax)$, $\cos(\frac{1}{a}x)$, $\tan(\frac{1}{2}x)$ متناوب می باشد و برای $\sin(ax)$, $\cos(ax)$, $\tan(ax)$, $\cot(ax)$ متناوب نیستند. $\cos ax = \cos ax$ دوره متناوب $\frac{2\pi}{|a|}$ دارد.

اگر $f(x)$ دوره متناوب T داشته باشد دوره متناوب f زیر نیز T است.

$\sqrt[n]{f(x)}$, $\log f(x)$, $|f(x)|$, $\sin f(x)$, $\cos f(x)$, $\tan f(x)$, $\cot f(x)$, $\text{Arc sin } f(x)$, $\text{Arc cos } f(x)$, $\text{Arc tan } f(x)$, $\text{Arc cot } f(x)$, $\csc f(x)$, $\sec f(x)$

دوره متناوب $f(x)$, $\cos f(x)$, $\sec f(x)$ ممکن است $\frac{T}{2}$ باشد.

در توابع ششگانه ابتدا باید توابع ساده شود - توابع ششگانه که به صورت حاصل ضرب سینوس و کسینوس اند باید نخست به صورت حاصل جمع تبدیل نموده سپس دوره متناوب را تعیین کنیم.

f و g توابع متناوب با دوره متناوب T_1 و T_2 و a, b عددهای ثابت اند تابع $a f(x) + b g(x)$ متناوب است اگر فقط اگر $\frac{T_1}{T_2}$

با عددی گویا باشد (عدد صحیح، π ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$... نباشند).

دوره متناوب $a f(x) + b g(x)$ را می توان به کمکترین مضرب مشترک مقادیر T_1 و T_2 یعنی $T_1 T_2$ پیدا کرد.

که m و n چه عدد صحیح و k و l هم عدد صحیح و a و b هم عدد صحیح.

دوره نوبت تابع زیر یکی $\frac{\pi}{2|a|}$ است $\tan^{2n} ax + \cot^{2n} ax$ $\sin^{2n} ax + \cos^{2n} ax$ $n \neq 1$
 $|\tan^n ax| + |\cot^n ax|$ $n \neq 2$ $|\sin^n ax| + |\cos^n ax|$

دوره نوبت تابع به صورت $\frac{k_1 \sin ax \pm k_2 \cos ax}{k_3 \sin ax \pm k_4 \cos ax}$ $\frac{\pi}{|a|}$ است $\left(\frac{k_1}{k_3} \pm \frac{k_2}{k_4} \right)$

اگر f تابع متناوب تناوب اصلی T باشد تناوب اصلی T_1 god با اقل $\frac{T}{2}$

تابع گزینار
 $f(x) \geq m$ تابع $f(x)$ و m گزینار از پایین می گویند
 $f(x) \leq m$ " " " "
 $|f(x)| \leq k$ " " " "

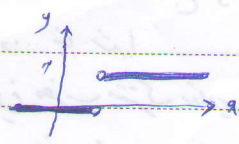
تابع ثابت
 $f(x) = c$ ثابت است $f(x)$ در گزینار زوج است و در حالات خاص $f(x) = 0$ فرات

تابع همبازی
 $f(x) = x$ تابع همبازی است
 $f \circ g(x) = g(x)$

تابع قدر مطلق
 $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$y = |x-a| + |a-b|$ $R_y = [b-a, +\infty)$
 $y = |x-a| - |a-b|$ $R_y = [-b-a, b-a]$

تابع پله واحد
 $u_c(x) = u(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$
 $D_u = R - \{c\}$ $R = [0, 1]$



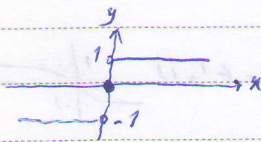
تابع جزء صحیح

تابع بصورت $f(x) = [x]$ به معنی بزرگترین عدد صحیح که از x کوچکتر یا برابر است

$$[x] = n \iff n \leq x < n+1 \quad x = [x] + \{x\} \quad 0 \leq \{x\} < 1 \quad \uparrow D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{Z}$$

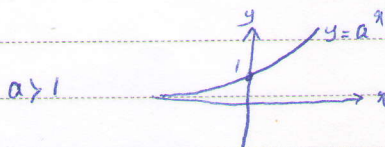
تابع علامت

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

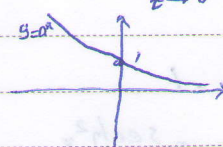


تابع نمایی

$$f(x) = a^x \quad a > 0 \quad a \neq 1 \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}^+ \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e^x$$



$$0 < a < 1$$



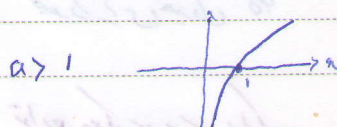
تابع رشد دوال $\frac{1}{2}$

$$P(t) = P_0 e^{\alpha t} \quad P_0 \text{ مقدار اولیه} \quad t \text{ زمان} \quad \alpha \text{ ضریب رشد دوال}$$

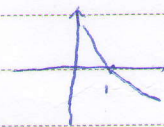
$$T = -\frac{\ln 2}{\alpha} \quad \text{مدت زمانی که طول می کشد تا نیمی از بستر نابود شود و نیمه عمر نامیده می شود}$$

تابع لگاریتمی

$$D_f = \mathbb{R}^+ \quad R_f = \mathbb{R} \quad x > 0 \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = \log_a x \quad \text{تابع معکوس تابع نمایی}$$



$$0 < a < 1$$

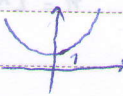


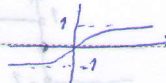
$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x \quad (x > 0)$$

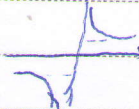
$$\log_b a = c \rightarrow b^c = a$$

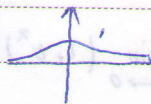
مختار ای صفحه ۴۳

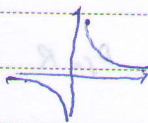
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$


$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = [1, +\infty)$$


$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = (-1, 1)$$


$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad R_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$


$$\operatorname{sech} x$$


$$\operatorname{csch} x$$


10

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{1}{2} |1 - \coth^2 x| = \frac{\cosh^2 x}{-1} = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \sinh^2 x + 1 = 2 \cosh^2 x - 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

20

40

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

مقاطع مخروطی

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

دایره ای به مرکز (α, β) و شعاع R

دایره

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

با شعاع $R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - c}$ و مرکز $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$

$$\cos \theta = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1R_2}$$

زاویه بین دو دایره به شعاع R_1 و R_2 ، خط المکرنه d

$$a^2 = b^2 + c^2$$

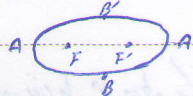
فاصله کانونی $FF' = 2c$

$$AA' = 2a$$

$$BB' = 2b$$

بمعنی قطر کوچک

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



خروج از مرکز $\frac{c}{a}$

طول وتری که عمود بر محور کانونی در روی کانون بیضی است $2b\sqrt{1-e^2}$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

فاصله کانونی $FF' = 2c$

$$AA' = 2a$$

قطر اصلی

$$\frac{x-\alpha}{a} + \frac{y-\beta}{b} = 0$$

معادله خط مماس

$$f(x) = f(\alpha, \beta)$$

طول وتری که از یک کانون بیضی به مرکز و عمود بر محور کانونی رسم می شود $2b\sqrt{e^2}$

$$y = \frac{a+b}{c}x + d$$

$$(ax+by+c)(ax+by+c') = 1$$

معادلات خط مماس به دایره دو خط مماس با معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$

خط لاری Δ

$$F(\alpha + \frac{p}{2}, \beta)$$

معادله خط لاری $x = \alpha + \frac{p}{2}$

$$y = \beta$$

فاصله محور تقارن $FH = p$

$$(y-\beta)^2 = -2p(x-\alpha)$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$ax^2 + by + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

اگر $a=c, b=0$ دایره

$$b^2 - 4ac > 0$$

اگر $b^2 - 4ac > 0$ بیضی

$$y = mx + n \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

اگر $a=0$, $m \neq 0$ → دایره
اگر $a > 0$ یا $a < 0$ → بیضی
اگر $a=0$, $b \neq 0$ → سهمنی
اگر $a^2+b^2+c \neq 0$ → بیضات
اگر $a=b=c=0$ → دستگاه خطی
اگر $b^2-4ac=0$, $a \neq 0$ → نقطه
اگر $F(a,y)=0$ و مشتقهای آن نسبت به y صفر نباشند، و معادلات $F_x=0$ و $F_y=0$ را حل کنیم

5

$$\frac{|PF|}{|Pe|} = e$$

[illegible]

10

فرم انزیم $0 = ax^2 + by + cy^2 + dx + ey + f$ قابل زیر

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b}{a-c}\right), \alpha = \frac{\pi}{4} \leftarrow a=c$$

$$y = x \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

 $\frac{1}{2}$

15

20

25

نضیل ۳: حد و پیوستگی

فرا تابع و وقتی x به سمت a میل کند تابع دارای حد L است $\forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 \mid x - a_0 \mid < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow a_0^+} f(x) = L$$

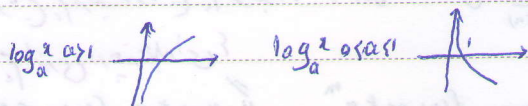
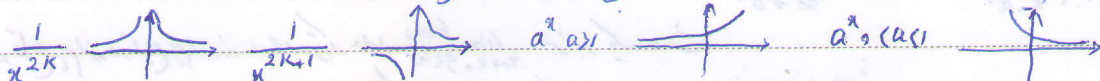
$$\lim_{x \rightarrow a_0^-} f(x) = L$$

حد از راست تابع

حد از چپ

تابعی دارای حد است هرگاه حد چپ و راستش در آن نقطه موجود و با هم برابر است

حد از چپ برای $x \rightarrow k$ و $y \rightarrow \infty$ حد از راست برای $x \rightarrow +\infty$ و $y \rightarrow \infty$



10 حد شامل جزء صحیح: باید ابتدا مقدار جزء صحیح به دست آورد سپس به سمت عدد صحیح میل کرد $[f(x)]$

حد توابع گسری: باید ابتدا استخراج کرد ابعثی عبارت کرد

حد توابع چندضابطه‌ای: بررسی تابع در نقاطی که ضابطه تابع عوض می‌گردد

1/2

15 مواردی که تابع در یک نقطه حد ندارد: ۱- حاصل عددی نهایت میل نه ۲- حاصل حد مقدار مشخص و معلوم نباشد ۳- اگر حاصل حد چپ و راست (و مقدار متفاوت باشند) ۴- اگر تکلیف کردن به آن نقطه از چپ یا راست وجود نداشته باشد (درانه باشد)

$$\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a_0} g(x) \text{ کرانه‌دار} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a_0} \lim_{x \rightarrow a_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow a_0} h(x) = L \rightarrow \lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = L$$

20 صورت مهم: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty$ صورت مهم برای $\infty, 0, 0^+, 0^-, 1, \infty$

حاصل صفر واقعی: صفرات حاصل صفر حقیقی تقرب نشود

$= 0$ بنهایت بزرگ x صفر واقعی و $= 0$ مقدار کرانه‌دار (حتی نا معلوم) x (صفر حقیقی)

25 رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ حد در نظر را به $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (تعداد پرستار) تبدیل می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)} \quad \frac{0}{0} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) \quad \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

رفع ابهام عدد مهم برای $\ln I = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ $1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow 1 \rightarrow 0^+ \rightarrow 0^- \rightarrow \infty^+ \rightarrow \infty^-$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x+b}\right)^{cx+d} = 1^\infty \rightarrow e^{ac}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + ax\right)^{\frac{c}{x}+d} = 1^\infty \rightarrow e^{ac}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)(f(x)-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{m+1} + \dots} = \infty^0 \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+m}{bx+n}\right)^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{bx+m}{ax+n}\right)^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^x = \infty^\infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} [x-a]^{\frac{1}{x-a}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a}\right)^{[x-a]} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} [1+x]^{\frac{1}{x}} = 1$$

در تابع $f(x)$ از درجه n و در تابع $g(x)$ از درجه m داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر یک است
در تابع $f(x)$ از درجه n و در تابع $g(x)$ از درجه m داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی غیر صفر است

در تابع $f(x)$ از درجه n و در تابع $g(x)$ از درجه m داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی غیر صفر است

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx^m \quad n > m \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sim kx^m \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sim ax^n$$

در تابع $f(x)$ از درجه n و در تابع $g(x)$ از درجه m داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی غیر صفر است

$$\sin u(x) \sim u(x) \rightarrow u(x) - \frac{u^3(x)}{6}$$

$$\tan u(x) \sim u(x) \rightarrow u(x) + \frac{u^3(x)}{3}$$

$$u \rightarrow 1^- \quad \arccos u \sim \sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{1}{2} \arcsin u(x) \sim u(x) \rightarrow u(x) + \frac{u^3(x)}{6}$$

$$\arctan u(x) \sim u(x) \rightarrow u(x) - \frac{u^3(x)}{3}$$

$$\cos u(x) \sim 1 - \frac{u^2(x)}{2} \rightarrow 1 - \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^4(x)}{24}$$

$$\ln(1+u(x)) \sim u(x) \rightarrow u(x) - \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{3}$$

$$e^{u(x)} \sim 1 + u(x) \rightarrow 1 + u(x) + \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{6} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na}\right) & n = 2k+1 \\ \sqrt[n]{a} \left|x + \frac{b}{na}\right| & n = 2k \end{cases}$$

در تابع $f(x)$ از درجه n و در تابع $g(x)$ از درجه m داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی غیر صفر است

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \sqrt[n]{1+u(x)} \sim 1 + \frac{u(x)}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}-1\right) \frac{u^2(x)}{2}$$

$$u(x) \rightarrow 0 \quad (1+u(x))^n \sim 1 + nu(x) + \frac{n(n-1)}{2} u^2(x)$$

$$u(x) \rightarrow \infty \quad [u(x)] \sim u(x)$$

در تابع $f(x)$ از درجه n و در تابع $g(x)$ از درجه m داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی غیر صفر است

$$n \rightarrow \infty \quad (1^p + 2^p + \dots + n^p) \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2}$$

در تابع $f(x)$ از درجه n و در تابع $g(x)$ از درجه m داریم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی غیر صفر است

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty, a > b > 0, m > 1 & \log_m x < x^b < x^a < m^x \\ x \rightarrow +\infty, a > b > 1 & b^x < a^x \\ x \rightarrow +\infty, a > 1 & a^x < x! < x^x \\ x \rightarrow 0^+, a > b > 0, m > 1 & x^b > x^a > m^{-\frac{1}{x}} \\ x \rightarrow 0^+, a > b > 1 & b^{-\frac{1}{x}} > a^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

5

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{پیوستگی از سمت چپ}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{پیوستگی از سمت راست}$$

پیوستگی

پیوستگی

۱- نزدیک شدن تابع در نقطه ۱
۲- موجود نبودن حد تابع در آن نقطه ۳- عدم تساوی حد تابع با مقدار تابع
۱۰- پیوستگی رفع شدنی اگر تابع در نقطه ای حد داشته باشد ولی این حد با مقدار تابع برابر نباشد
۱۱- پیوستگی جهشی (ناپیوستگی اساسی یا رفع نشدنی) تابع دارای دو حد چپ و راست ولی متمایز باشد
۱۲- پیوستگی ناشناخته اگر یک یا هر دو حد چپ و راست تابع بگیران نباشد
۱۳- پیوستگی نوسانی اگر تابع در نقطه ای حد نداشته باشد ولی به طور نوسانی بین محدودهای تغییر کند
۱۴- $\sin \frac{1}{x}$

15

* توابع چند جمله ای در تمام نقاط پیوسته اند

تابع $g(x) = f(x)$ در $x=0$ پیوسته است

تابع $f(x) = x^n$ در تمام نقاطی که f پیوسته و مشتق داشته باشد پیوسته است

تابع $[ax]$ در تمام نقاطی که حاصل ax عدد صحیح نباشد پیوسته است

توابع چند ضابطه ای با هر درجه یک ضابطه ای که در تمام نقاط تغییر ضابطه

20

قضیه بولزانو هرگاه تابعی در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) \cdot f(b) < 0$ به واسطه c متعلق به $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = 0$ شود.

25

خطوط جانب
در تابع $\frac{P(x)}{Q(x)}$ اگر $Q(x) = k$ و $P(x)$ نقطه‌ای که $Q(x) = 0$ است جانب قائم است در غیر این صورت $\lim_{x \rightarrow k} \frac{P(x)}{Q(x)}$ به بی‌نهایت میل می‌کند
در تابع $\frac{P(x)}{Q(x)}$ اگر $\log P(x)$ ریشه‌ای ساده باشد $Q(x) = 0$ و $P(x) \neq 0$ کانه‌ی جانب قائم است

چنانچه در تابع $y = mx + h$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ و $h = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - mx)$ خط $y = mx + h$ جانب مایل یعنی صورت نظر است و در صورت عدم وجود این دو حد، یعنی جانب مایل نخواهد داشت

* در صورتی که ریشه فاصله‌ی $[a, b]$ را داشته باشد اصولاً جانب افقی و یا مایل وجود نخواهد داشت
مجموع تعداد جانب‌های افقی و مایل همگرا نمی‌تواند دو باشد

یعنی $mx + h + g(x)$ را می‌گویند $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ باشد دارای جانب مایل $y = mx + h$
تابع $\frac{P(x)}{Q(x)}$ در صورتی که مرتبه‌ی کسر درجه کمتر از صورت باشد خارج قسمت آن معادله جانب مایل
در تابع بی‌نظم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ میل تقاطع جانب‌های افقی و قائم مرکز تقابلی است
در تابع $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که درجه صورت ۲ واحد بیشتر از درجه مخرج است در آن جانب مایل وجود دارد
در تابع $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(ax+by+c)(ax+by+c)(ax+by+c)}{(ax+by+c)(ax+by+c)(ax+by+c)}$ باشد شکل معنی‌دهنده لاف‌های و یک از اینها برابر معادله جانب است

معنی جانب برای کسری $\frac{P(x)}{Q(x)}$ پس از خارج قسمت رفتی به شکل $ax + b$ باشد معنی آن تابع معنی جانب دارد

فصل ۴ - مشتق و محیط ای و دی

مؤ متغیر $\Delta x = x_2 - x_1$ متغیر تابع $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ آنگاه تغییر نسبی $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

مشتق تابع تابع در نقطه ای مشتق پذیر است اگر در آن نقطه یوسته باشد و حد $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ برابر $f'(x_0)$ باشد
 $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 + nh)}{h} = (m+n)f'(x_0)$

تابع $f(x) = [x]$ در نقاط $x_0 \in \mathbb{Z}$ مشتق پذیر نیست

تابع $f(x) = |x - a|^n$ در $x = a$ برای $n > 1$ مشتق پذیر نیست و برای $n = 1$ مشتق پذیر است

تابع $f(x) = \sqrt[n]{x - a}$ در $x = a$ برای $n \in \mathbb{N}$ مشتق پذیر نیست

تابع $f(x) = (x - a)^{\frac{2n+1}{2}}$ در $x = a$ برای $n \in \mathbb{N}$ مشتق پذیر است

تابع $f(x) = \sqrt[n]{x - a}$ در $x = a$ برای $n \in \mathbb{N}$ مشتق پذیر نیست

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (f'(x))^n$$

در محاسبه تابع مشتقاتی که با $\sqrt[n]{x}$ برابر است باید به این نکته توجه کرد

مشتق یک تابع برابر ضرب زائیداشتب (خط مماس در هر نقطه از منحنی آن تابع است)

مشتقات $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

مشتق چپ $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

نقاطی که تابع در آن مشتق پذیر نیست

۱- نقاط ناپیدگی

۲- نقاط زاویه دار

۳- نقاط گوشه

۴- نقاطی که تابع دارای خط مماس قائم است

۵- عدم وجود مشتق سایر تعریف آن حد

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مشتق تابع به صورت یک تابع

شتق پذیری تابع یک فاصله تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ شتق پذیری است، به گونه ای که f در فاصله (a, b) شتق پذیر باشد و $f'(a^+)$ و $f'(b^-)$ موجود باشد.

شتق تابع شامل قدر مطلق - تابع $|P(x)|$ در تمام نقاط به جز ریشه ای مرتبه اول معادله $P(x)=0$ شتق پذیر است. اگر $P(x) \neq 0$ و $P'(x) \neq 0$ باشد. اگر $P(x)=0$ و $P'(x) \neq 0$ باشد.

برای تابع شتق جیب در است تابع دارای قدر مطلق ابتدا علامت داخل قدر مطلق را ثابت بگیریم و علامت خود را به علامت قدر مطلق در شتق میزنیم و سپس عمل شتق گیری را انجام داده و شتق یک طرفه را به هم میزنیم.

شتق تابع جزء صحیح $[x]$ $f(x) = (x-a)^n$ اگر $n > 0$ باشد تابع پیوسته است و اگر $n < 0$ باشد تابع در $x=a$ شتق دارد.

$$\begin{aligned} a \rightarrow 0 \quad au^m &\rightarrow am u^{m-1} u' & u+v+w &\rightarrow u'+v'+w' & uvw &\rightarrow u'vw + uv'w + uvw' \\ \frac{u}{v} &\rightarrow \frac{u'v - v'u}{v^2} & \sqrt[n]{u} &\rightarrow \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}} & |u| &\rightarrow \frac{u u'}{|u|} & e^u &\rightarrow u e^u & a^u &\rightarrow u a^u \ln a \\ \ln u &\rightarrow \frac{u'}{u} & \log_a u &\rightarrow \frac{u'}{u \ln a} & \sin^{-1} u &\rightarrow \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} & \cos^{-1} u &\rightarrow \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ \tan^{-1} u &\rightarrow \frac{u'}{1+u^2} & \cot^{-1} u &\rightarrow \frac{-u'}{1+u^2} & \sec^{-1} u &\rightarrow \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2-1}} & \csc^{-1} u &\rightarrow \frac{-u'}{|u| \sqrt{u^2-1}} \\ \sinh^{-1} u &\rightarrow \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} & \cosh^{-1} u &\rightarrow \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}} & \tanh^{-1} u &\rightarrow \frac{u'}{1-u^2} & \coth^{-1} u &\rightarrow \frac{u'}{1-u^2} & |u| &\rightarrow |u| \\ \operatorname{sech}^{-1} u &\rightarrow \frac{-u'}{|u| \sqrt{1-u^2}} & 0 < u < 1 & & \operatorname{csch}^{-1} u &\rightarrow \frac{-u'}{|u| \sqrt{1+u^2}} & u \neq 0 & & & \end{aligned}$$

* شتق تابع به فرم $f(x)^{g(x)}$ نسبت از دو طرف لگاریتم طبیعی گرفته و سپس شتق میگیریم.

$$y' = (g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) f(x)^{g(x)}$$

شتق ضمنی = اگر رابطه x و y به صورت صریح نباشد $F(x, y) = 0$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad x'_y = \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x}$$

رابطه بین x و y $f(x, y) = 0$ برای x و y اول از دو طرف $f(x, y) = 0$ نسبت به x شتق گرفته و y تابع y در آن شتق کنی و است و در آخر آن را با علامت مثبت میزنیم.

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$y = h(u) \quad u = g(t) \quad t = h(p) \quad p = w(u)$$

مشتق گیری زنجیری

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{du/dt} = g'(t) / f'(t)$$

مشتق گیری پارامتری $\begin{cases} x = h(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ معادله به فرم

$$\rightarrow y'' = \frac{g''(t) \cdot f'(t) - f''(t) \cdot g'(t)}{f'^3(t)}$$

5

مشتق یک تابع نسبت به تابع دیگر نسبت سرعت تغییرات تابع f نسبت تغییرات تابع g
 $\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مشتق تابع عکس

10

$$f(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} h(t) dt \Rightarrow f'(x) = q'(x) \cdot h(q(x)) - p'(x) \cdot h(p(x))$$

مشتق گیری از انتگرال

$$f^{(n)}(x) = a \cdot n! \quad f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = 0$$

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ تابع چند جمله ای $x^{1/2}$

$$f^{(n)}(x) = (-c)^{n-1} \cdot n! (ad - bc)$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad x \text{ در تابع}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (cx+d)^{n+1}}{x^n}$$

$$f(x) = \ln x \quad x \text{ در تابع}$$

15

$$f(x) = \sin ax \rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$$

$$f(x) = \cos ax \rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$$

$$f(x) = u \cdot v \rightarrow f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^{(n-i)} \cdot v^{(i)}$$

20

دیفرانسیل یک تابع برای تابع $y = f(x)$ دیفرانسیل n می مرتب باشد

$$dy = f'(x) dx \quad \text{دیفرانسیل مرتبه اول}$$

$$d^2y = f''(x) (dx)^2 \quad \text{دیفرانسیل مرتبه دوم}$$

$$d^3y = f'''(x) (dx)^3 \quad \text{دیفرانسیل مرتبه سوم}$$

25

فصل ۵ - کاربرد آئین شتوق

معادله خط مماس $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ معادله خط قائم $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

در خط انشیب m و n برهم عمود منتهی به $m \cdot n = -1$ و مماس موازی اند $m = n$

اگر شیب خط مماس در نقطه (x_0, y_0) برابر شیب خط مماس در نقطه (x_1, y_1) باشد، معادله آن $x = x_0$ است

اگر شیب خط مماس در نقطه (x_0, y_0) برابر منفی شیب خط مماس موازی شود x_1 باشد، معادله آن $y = y_0$ است

5

معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی از نقطه ای خارج آن

با $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ و $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ به دست آورده و مختصات آن نقطه (x_0, y_0) را معادله نه شده

مقدار (x_0, y_0) بدست آید

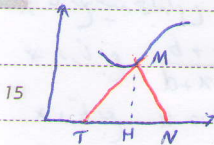
برای $y = g(x)$ و $y = f(x)$ برابر است با $tg \alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}$

10 اگر دو منحنی بر هم مماس باشند شتوق آن در نقطه تماس یکسان است

برای یافتن نقاط تقاطع دو منحنی، معادلات آن دو را با هم قطع می کنیم (حذف y) و به دست می آوریم معادله تقاطع

طول نقاط تقاطع در شیب α می خوانند $(\alpha = 0)$ آن طول های نقاط تماس است

1/2



نقطه مماس، تحت قائم، طول مماس، طول قائم
 $HN =$ تحت قائم $TH =$ تحت مماس $NM =$ طول قائم $TM =$ طول مماس

تعیین وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع

تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیرامون در فاصله (a, b) شتوق پذیر است آن گاه

اگر در فاصله (a, b) $f'(x) > 0$ و تعداد $f'(x)$ شمارش پذیر باشد به اکیدا صعودی

20 اگر در فاصله (a, b) $f'(x) < 0$ و تعداد $f'(x)$ شمارش پذیر باشد به اکیدا نزولی

اگر در فاصله (a, b) $f'(x) = 0$ به تابع ثابت

نقاط اکسترمیمی

اگر به ازای x در همسایگی x_0 داشته باشیم $f(x) < f(x_0)$ یا $f(x) > f(x_0)$

25 اگر به ازای x در همسایگی x_0 داشته باشیم $f(x) > f(x_0)$ یا $f(x) < f(x_0)$ می بینیم

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ که برابر صفر و یا اصولاً موجود نباشد
انداز نقاط بحرانی ۱. ناپیوستگی ۲. بازگشت ۳. زردیه دار ۴. ماکزیمم و مینیمم نسبی ۵. عطف قائم ۶. عطف انحنای

اگر $f'(c)$ در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد $\Rightarrow f'(c)$ دارای مینیمم نسبی است
اگر $f'(c)$ در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد $\Rightarrow f'(c)$ دارای ماکزیمم نسبی است
اگر $f'(c)$ در c تغییر علامت ندهد $\Rightarrow f'(c)$ اکثراً نکند است

اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$ در c دارای مینیمم نسبی است
اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$ در c دارای ماکزیمم نسبی است
اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) = 0$ در c ممکن است دارای مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی و یا عطف باشد
اگر $f'(c) = 0$ مشتقات بعدی را محاسبه کرده و اگر اولین مشتق مخالف صفر از مرتبه زوج و مقدار مثبت باشد
در c دارای مینیمم نسبی و اگر از مرتبه زوج و منفی باشد در c ماکزیمم نسبی و اگر فرد مرتبه فرد باشد در
 $x=c$ عطف داریم (درین قضیه فقط بررسی نقاطی است که $f'(x)$ صفر باشد)

1/2

تعیین نقاط اکسترمم مطلق یک تابع

اگر $f(x)$ در $x=a$ متعلق به D باشد داشته باشیم $f(a) < f(x)$ در x در D ماکزیمم مطلق
اگر $f(x)$ در $x=b$ متعلق به D باشد داشته باشیم $f(b) > f(x)$ در x در D مینیمم مطلق
یافتن اکسترمم مطلق در فاصله $[a, b]$: نقاط بحرانی را پیدا کرده و مقادیر تابع در این نقاط را بدست می آوریم
مقادیر تابع f در دو انتها را بدست آورده و کمترین و بیشترین اعداد حاصل اکسترمم مطلق گزارش می کنیم

تقریباً $f'(x)$ به سمت چپ $=$ مثبت تقریباً $f'(x)$ به سمت راست $=$ منفی
اگر $f(x)$ در فاصله ای اکثراً صعودی $\Rightarrow$ متغیر $f(x)$ در فاصله ای اکثراً نزولی باشد در این بازه $f(x)$ در $f(a)$ $\Rightarrow$ متغیر $f(x)$ در $f(b)$ $\Rightarrow$ متغیر $f(x)$ در $f(a)$ $\Rightarrow$ متغیر $f(x)$ در $f(b)$

نقطه عطف تابع در c پیوسته دارای خط مماس باشد و جهت تغییر آن در مجاورت $x=c$ تغییر کند
در نقطه عطف خط مماس از منفی می گذرد

* اگر $f'(c) > 0$ و $f''(c) = 0$ و $f'(c)$ در مجاورت نقطه تغییر علامت ندهد $\Rightarrow$ نقطه میلا گردیده

اگر نقطه عطف $y=0$ به تابع دارای عطف افقی و اگر $y=-\infty$ به تابع دارای عطف عمودی می باشد
اگر $y=\sqrt[n]{P(x)}$ که $P(x)$ چند جمله ای و n فرد باشد به ریشه مرتبه فرد $P(x)=0$ طول نقطه عطف
و به ریشه مرتبه زوج $P(x)=0$ طول نقطه بازگشت

برای $y=(x-a)^{\frac{2n+1}{2}}$ اگر $P(x) \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ اگر $y=(x-a)^{\frac{2n}{2}}$ اگر $P(x) \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$

به $x=a$ طول نقطه عطف است

تابع $f(x)=1-x \cdot \log(x)$ اگر $g(a) \neq 0$ و $x=a$ اگر $g(a) > 0$ اگر $g(a) < 0$ اگر $g(a) = 0$ اگر $g(a) > 0$ اگر $g(a) < 0$ اگر $g(a) = 0$

و اگر $g(a) < 0$ طول نقطه $\max$ می باشد

برای تابع $y=a-x \cdot \log(x)$ اگر $a \in \mathbb{Z}$ تابع y دارای $\min$ است

در تابع $y=\sqrt[n]{(x-a)^{2k+1}}$ اگر n فرد و k زوج $x=a$ طول نقطه بازگشت و $\min$ می باشد

و اگر $n=2k$ $x=a$ طول نقطه زائده دارد و اگر $n > 2k$ است آنجا که طول را می توان از

10

رایگان کوپن 2k داشته

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

این به مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه

$$\frac{1}{2} f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2} \Delta x^2$$

x نقطه ای در فاصله $(x_0, x_0 + \Delta x)$ و اگر $|f''(x)| \leq M$ باشد $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad dy = f'(x_0) dx$$

حاصل Δy یا dy را خطای خطی می نامند

و حاصل $|\frac{\Delta y}{y}|$ را خطای نسبی خطی می نامند

حاکمیم و سیمیم در حالات خاص

اگر $x+y=cte$ حاصل x و y زمانی حاکمیم است که $x=y$ (اگر تساوی عطف نبود $x=y$ یا سیمیم باشد)

20

اگر $x+y+z=cte$ حاصل x, y, z زمانی حاکمیم است که $x=y=z$

اگر $x \cdot y = cte$ حاصل x و y زمانی سیمیم است که $x=y$ (اگر تساوی برتر نبود $x=y$ یا سیمیم باشد)

اگر $x^a \cdot y^b \cdot z^c = cte$ حاصل $x+y+z$ زمانی سیمیم است که $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

اگر $x^2 + y^2 + z^2 = cte$ حاصل $ax+by+cz$ زمانی حاکمیم است که $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

اگر $ax^2 + by^2 + cz^2 = cte$ حاصل $x^2 + y^2 + z^2$ زمانی سیمیم است که $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

25

اگر $xyz = cte$ حاصل $x^2 + y^2 + z^2$ زمانی حاکمیم است که $x=y=z$

قضیه رول تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر و $f(a) = f(b)$ $\exists c \in (a, b) \mid f'(c) = 0$ یعنی هر دو ریشه معادله $f(x) = 0$ معادله $f'(x) = 0$ یک ریشه خواهند بود

قضیه میانگین تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر $\exists c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$
 M, m مقادیر بیشینه و کمینه مطلق تابع f برای x های بازه $[a, b]$ است اگر $m < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < M$

قضیه کش تابع f و g در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پذیر و $g'(x)$ مخالف صفر باشد
 $\exists c \in (a, b) \rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ 5

قضیه نامساوی مشتق اگر دو تابع f و g در فاصله $(a, +\infty)$ مشتق پذیر بوده و $f(a) > g(a)$ و $f'(x) > g'(x)$ برای هر x در بازه $(a, +\infty)$ داریم $f(x) > g(x)$

10

1/2

15

20

25

فصل ۶. انتگرال و مشتق
 $F(x) \rightarrow f(x)dx$ $F'(x) = f(x)$

$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$ $\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$ $\int \frac{dx}{u} = \ln |u| + C$ $\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$

$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$ $\int a^u u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$ $\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$

$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + C$ $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + C$

$\int (1+\tan^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$ $\int (1+\cot^2(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

$\frac{1}{2} \int \sin^n ax \cos ax dx = \frac{1}{(n+1)a} \sin^{n+1} ax + C$ $\int \cos^n ax \sin ax dx = -\frac{1}{(n+1)a} \cos^{n+1} ax + C$

$\int \tan^n ax (1+\tan^2 ax) dx = \frac{1}{(n+1)a} \tan^{n+1} ax + C$ $\int \cot^n ax (1+\cot^2 ax) dx = -\frac{1}{(n+1)a} \cot^{n+1} ax + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} dx = \text{Arcsin}(\frac{u}{a}) + C = -\text{Arccos}(\frac{u}{a}) + C$ $\int \frac{u'}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctg}(\frac{u}{a}) + C = \frac{-1}{a} \text{Arccotg}(\frac{u}{a}) + C$

$\int \tanh(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\cosh(ax+b)| + C$ $\int \coth(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh(ax+b)| + C$

$\int (1-\tanh^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tanh(ax+b) + C$ $\int (1-\coth^2(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \coth(ax+b) + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}} dx = \text{Arcsinh}(\frac{u}{a}) + C = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C \quad a>0$

$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-a^2}} dx = \text{Arccosh}(\frac{u}{a}) + C = \ln(u + \sqrt{u^2-a^2}) + C \quad a>0$

$\int \frac{u'}{a^2-u^2} du = \frac{\text{Arctg}h(\frac{u}{a})}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{a} \text{Arctg}h(\frac{u}{a}) + C & |u| < |a| \\ \frac{1}{a} \text{Arccotg}h(\frac{u}{a}) + C & |u| > |a| \end{cases}$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v du$$

$$\int x \cdot \sin ax \, dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + C$$

$$\begin{array}{l} \text{مثبت} \\ u^r \\ r \cdot u^{r-1} \\ u^r \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{مثبت} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ -\frac{1}{a} \cos ax \\ -\frac{1}{a} \sin ax \end{array}$$

انتگرال بری به روش تغییر متغیر

انتگرال بری به روش جزء به جزء

استاندارد روش جزء به جزء برای توابع دو درجه چندان

5

انتگرال بری به روش تجزیه کسرها $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ابتدا صورت را برخرج تقسیم کرده سپس حاصلضرب

عوامل را جدا کن و دوم غیر قابل تجزیه خارج کن ای زیریم سپس صورت را به صورت زیر تجزیه کن

$$f(x) = \frac{M(x)}{(x-\alpha)^r (x^2+\kappa^2)^r (x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+\kappa^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+\kappa^2)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+\kappa^2)^r} + \frac{I}{x-\beta}$$

10

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \alpha} (x-\alpha)^r f(x) \quad A = \lim_{x \rightarrow \alpha} [(x-\alpha)^r f(x)]' \quad I = \lim_{x \rightarrow \beta} (x-\beta) f(x)$$

برای ساده انتگرال اولی عدد 1 را تغییر متغیر $ax+b = u$ استفاده می کنیم

$$\int P(x) \cdot (ax+b)^n dx \quad \int \frac{P(x)}{(ax+b)^n} dx \quad \int P(x) \cdot \sqrt[n]{ax+b} dx$$

15

$$\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+1}} dx = \frac{1}{(ad-bc)(n+1)} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{n+1} + C$$

$$\sin m x \cdot \cos n x = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$$

$$\sin m x \cdot \sin n x = -\frac{1}{2} (\cos(m+n)x - \cos(m-n)x)$$

$$\cos m x \cdot \cos n x = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$$

$$\int \sin^r x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^k$$

$$\int \sin^r x dx = \int \left(\frac{1 - \cos^2 x}{2} \right)^r dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

20

25

$$\sin x = \frac{r \tan \frac{x}{r}}{1 + \tan^2 \frac{x}{r}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{r}}{1 + \tan^2 \frac{x}{r}}$$

$$\tan x = \frac{r \tan \frac{x}{r}}{1 - \tan^2 \frac{x}{r}}$$

ARMAN

$$1 \cdot \cos \theta = r \sin \frac{\theta}{r}$$

* انتگرال های شامل عبارت $\sqrt{a^2 - u^2}$ یا $a^2 - u^2$ ($a > 0$) تغییر متغیر $u = a \cos \theta$ یا $u = a \sin \theta$
 انتگرال های شامل عبارت $\sqrt{a^2 + u^2}$ یا $a^2 + u^2$ ($a > 0$) تغییر متغیر $u = \cot \theta$ یا $u = \tan \theta$
 انتگرال های شامل عبارت $\sqrt{u^2 + a^2}$ ($a > 0$) تغییر متغیر $u = a \sec \theta$ و اگر $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$$5 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{u}{k}\right) du \quad \int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \quad \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$10 \quad \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

انتگرال نامتناهی یک یا هر دو حد بالای یا پایینی انتگرال بی نهایت است یا تابع زیر علامت انتگرال در حد نامتناهی یا پایینی نامتناهی باشد.
 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = f(x)$

15

چنانچه $\int_a^b f(x) dx$ و $\int_a^b |f(x)| dx$ همگرا باشند پس $\int_a^b f(x) dx$ همگرا است و بالعکس اگر $\int_a^b f(x) dx$ همگرا باشد و $\int_a^b |f(x)| dx$ همگرا نباشد در این صورت $\int_a^b f(x) dx$ همگرا نیست و چنانچه $\int_a^b |f(x)| dx$ همگرا نباشد پس $\int_a^b f(x) dx$ همگرا نیست.

$$20 \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty \quad [a, b) \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$$

* انتگرال نامتناهی $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ که در آن $a > 0$ باشد به ازای $p > 1$ همگراست و به ازای $p \leq 1$ واگراست.
 * انتگرال نامتناهی $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ که در آن $a < 0$ باشد به ازای $p > 1$ همگراست و به ازای $p \leq 1$ واگراست.

25

انتگرال تابع f نامتناهی $[a, +\infty)$ به روش زیر تعریف می شود: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx = L$ باشد.
 چنانچه $p > 1$ و $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ همگراست و $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ همگرا نباشد.
 چنانچه $p > 1$ و $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ همگرا نباشد و $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ همگرا نباشد.

$\lim_{n \rightarrow a^+} (n-a)^p f(n) = L$ بر حسب هر دو حالتی برود و
اگر $p > 1$ و L متناهی باشد آن گاه $\int_a^b f(n) dn$ همگراست
اگر $p \leq 1$ و $L \neq 0$ آن گاه $\int_a^b f(n) dn$ ناهمگراست

تابع گاما برای $\alpha > 0$ همگراست
 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty n^{\alpha-1} e^{-n} dn$ $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) = \alpha!$ $\Gamma(1) = 1$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$ $\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$ $0 < n < 1$

$2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2n)$

$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 n^{\alpha-1} (1-n)^{\beta-1} dn$

تابع بتا برای $\alpha > 0, \beta > 0$ همگراست

$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ $\alpha, \beta > 0$

$\int_0^\pi \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{2 \Gamma(m+n)}$

فرض اول انتگرال گسیل سرده یعنی ۱۹۸

$L(f(n)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sn} f(n) dn$

۲۰

$e^{an} \rightarrow \frac{1}{s-a}$ $\sin an \rightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$ $\cos an \rightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$ $n^n \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$

$n^n \rightarrow \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

$L(n f(n)) = -F'(s)$

$L\left(\frac{f(n)}{n}\right) = \int_s^\infty F(s) ds$

۲۵

$$f = \frac{\int_a^b f(u) du}{b-a}$$

متوسط مقدار تابع f بر بازه $[a, b]$

$$f(u) = \int_{p(u)}^{q(u)} h(x, t) dt \rightarrow f(u) = q'(u) h(q(u)) - p'(u) h(p(u))$$

تغییر انتگرال

5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

10

1/2

15

20

25

فصل ۷ کاربرد انتگرال معین

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

سطح محصور بین دو منحنی
سطح محصور شده بین منحنی قطبی $r=f(\theta)$ و خطوط شعاعی $\theta=\theta_1, \theta=\theta_2$ برای

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x^2 y' - y x') dt$$

سطح محصور شده بین منحنی بسته پارامتری $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ در فاصله t_1 و t_2 برابر

$$S = \int x y' dt$$

سطح بین منحنی پهلای منحنی برابر

5

محاسبه حجم حاد از دوران یک سطح حول محورهای مختصات

حجم دوران حول محور x سطح بین منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx$

حجم دوران حول محور y سطح منحنی $x=f(y)$ و $x=g(y)$ و خطوط $y=a$ و $y=b$ برابر $V = \pi \int_a^b (g^2(y) - f^2(y)) dy$

10 محاسبه حاصل از دوران ناحیه بین دو منحنی غیر متقاطع $x=f(y)$ و $x=g(y)$ و خطوط $y=a$ و $y=b$ حول خط $x=c$

$$V = \pi \int_a^b ((f(y)-c)^2 - (g(y)-c)^2) dy$$

که ناحیه مذکور را حول $x=c$ می‌چرخانیم

محاسبه طول قوس منحنی

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

طول منحنی با ضابطه $y=f(x)$ در فاصله $x=a$ تا $x=b$

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(y)^2} dy$$

15 طول منحنی با ضابطه $x=f(y)$ در فاصله $y=c$ تا $y=d$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$$

طول منحنی با معادله پارامتری $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ در فاصله t_1 تا t_2

محاسبه سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محورهای مختصات

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

سطح حاصل از دوران این منحنی حول محور x

$$S_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

20 سطح حاصل از دوران منحنی حول محور y

سطح حاد از دوران یک منحنی به طول L حول خطی که فاصله مرکز ثقل منحنی تا آن d است $S = 2\pi d L$

تابع f در $[a, b]$ انتگرال پذیر و طول پیرامون $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$ مجموع $U_n(f)$ و مجموع پایین $L_n(f)$ به صورت $L_n(f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta_n$ و $U_n(f) = \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta_n$ که t_i^* نقطه هر یک از n نقطه t_i است

25

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f)$$

فصل ۸ - دنباله

دنباله $\{a_n\}$ همگراست اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ موجود باشد (عدد محدود و مشخص و یکتا) باشد و در صورت موجود نبودن حد دنباله واگراست

$\{a_n\}$ واگراست اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ یا عدد محدود ولی نامعلوم باشد $\sin n$ یا برای شماره های زوج و فرد متفاوت باشد (۱)

دنباله $\{a_n\}$ صعودی است $\leftarrow a_n \leq a_{n+1}$ یا $a'_n \geq 0$
دنباله $\{a_n\}$ نزولی است $\leftarrow a_n \geq a_{n+1}$ یا $a'_n \leq 0$

دنباله $\{a_n\}$ همگرا برای جملات مثبت باشد نزولی $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ صعودی $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
بر دنباله گراندا و یکتا همگراست
گرا ن دنباله باید اگر $a_0 = 0$ باشد ابتدا و بنهایت مثبت می آید

دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ d ثابت
اگر $d > 0$ دنباله اکیداً صعودی اگر $d < 0$ دنباله اکیداً نزولی و اگر $d = 0$ دنباله ثابت

دنباله هندسی $a_n = a_1 q^{n-1}$ q ثابت
اگر $q > 1$ دنباله اکیداً صعودی ، اگر $0 < q < 1$ دنباله اکیداً نزولی اگر $q < 0$ نوسانی
اگر $q = 1$ دنباله همگرا به صفر اگر $q = -1$ دنباله واگراست
اگر $q < -1$ دنباله همگرا به صفر اگر $q = 1$ دنباله واگراست

دنباله $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
دنباله اکیداً صعودی و گراندا به e است

دنباله $\frac{1}{n!}$ اکیداً نزولی و همگرا به صفر

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$$

فصل ۹ - سری های متناهی و بحث های مربوط به آن

به مجموع جملات دنباله سری گویند

اگر سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ موجود باشد حاصل، عددی مشخص و محدود باشد، سری متناهی نامیده می شود. و در غیر این صورت آن را واگرا می نامند.

۵ شرط لازم برای همگرایی سری متناهی "اگر سری همگرایی داشته باشد $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ " است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}$$

$$\sum_{n=1}^k 2n = k(k+1) \quad \sum_{n=1}^k (2n-1) = k^2 \quad \sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}$$

10

$$\sum_{n=1}^k n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \sum_{n=1}^k n^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \quad \sum_{n=1}^k n^4 = \frac{k(k+1)(2k^2+9k+6)}{30}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$

۱/۲ سری همسان و اگر

سری فوق هندسی اگر $p > 1$ همگرا و اگر $p \leq 1$ واگرا

۱۵ سری هندسی اگر $|q| < 1$ همگرا و اگر $|q| \geq 1$ واگرا

آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{P_n}$ اگر درجه خارج بشمار از درجه صورت + ۱ باشد همگرا است $a_1 > b$

۲۰ آزمون دالامبر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ اگر $L < 1$ همگرا و اگر $L > 1$ واگرا

آزمون کوچی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ اگر $L < 1$ همگرا و اگر $L > 1$ واگرا
هم انی استرلینگ: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$

۲۵ برای p دگره $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + \dots + a_{p+1}} = 1$

آزمون رابرت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ اگر $L < 1$ همگرا و اگر $L > 1$ واگرا و اگر $L = 1$ بی نتیجه است

آزمون مقایسه اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا و $0 < a_n \leq b_n$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا و $0 < b_n \leq a_n$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست

سری ای جوهر درجه ای p همگرا و $p < 1$ واگراست $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

قضیه آبل اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و دنباله $\{a_n\}$ دنباله ای که از ابتدا به بعد از صفر بزرگتر یا صفر باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ باشد

آزمون لایب نیتس سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگراست و اگر a_n نزولی باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ را فرض کنید $I = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را فرض کنید
الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد نزولی از همگراست و اگر همگرا باشد طلقی دارد
ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد همگرا نیست و اصطلاحاً آن همگرا نیست
ج) اگر سری متناوب که واگرا باشد از آنجا که واگراست

شعاع همگرایی سری ای تابع $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ، $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $(x_0 - R, x_0 + R)$ $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} x^n \quad |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{Arc-sin } x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\text{Arc-tanh } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{Arc-coth } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) x^{2n+1}}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \ln(1-x^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \ln(1-x^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n}$$