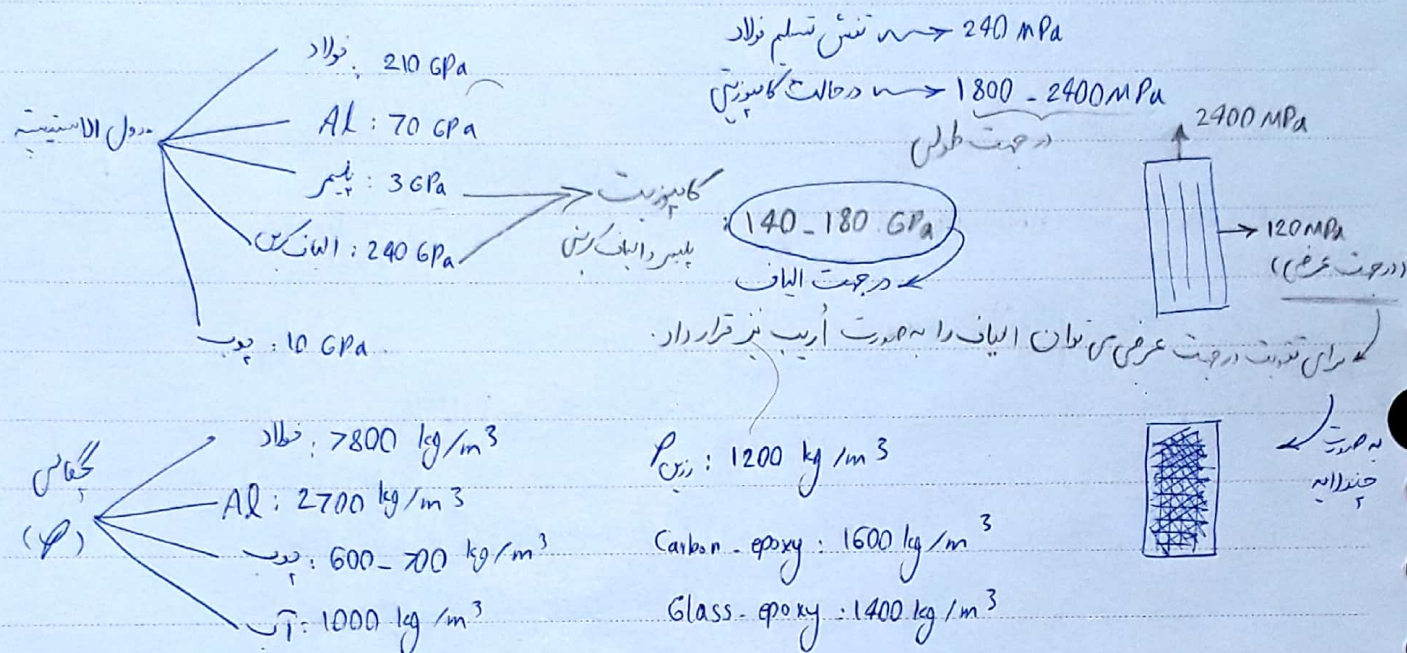


جلسه ۱

Mechanics of Composite Materials:

این کامپوزیت ها نسبت به مواد دیگر (اما مدول آن کمتر است)



مواد کامپوزیتی خورده نمی شوند. استفاده به عنوان بولینگ. معیار پایان فصل 5. پایه های دکل ها و شش در دنیا

15 / کینر دفرین 15 / پرده 20 / سان ف 50 / پان ف

در موارد تنش بیش شکست را کنترل می کنند و در موارد تنش زایل شکست را کنترل می کنند

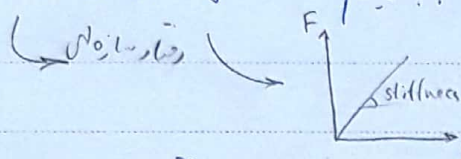
جلسه ۲

اصطلاحات علمی:

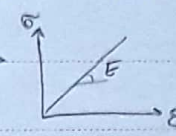
1. Isotropic (همسانگرد) → مداری که خواص مکانیکی در آن ها در همه جهات یکنواخت و در همه راستاها یکسان باشند. مانند فلزات
2. Anisotropic (غیر همسانگرد) → مانند کامپوزیت، پد، بتن آرمه
3. Homogeneous (همگن) → مداری هستند که در آن ها خواص مکانیکی یکسان تغییر نمی کنند
4. Nonhomogeneous یا Inhomogeneous, Heterogeneous

اینکه در مکانیک حرکت گفته می شود stiffness منظور همان مدول یانگ است

5- Stiffness [GPa] ^{سختی} $\rightarrow$ مقاومت ماده در برابر تغییر فرم $\rightarrow$ Young Modulus = Elastic Modulus



رفتار مادی (یعنی به ذات ماده بستگی دارد)

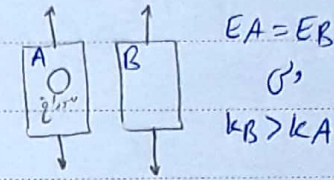


مدول الاستیسیته
مدول یانگ
کشش

6- Hardness ^{سختی} $\rightarrow$ مقاومت در برابر خراش

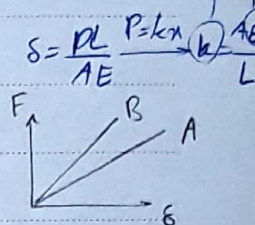
Brinell Scale (HB), HR, HV $\leftarrow$ 1900

shore (A, B, C), Barcol



$$EA = EB$$

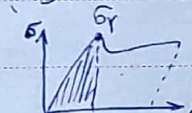
$$k_B > k_A$$



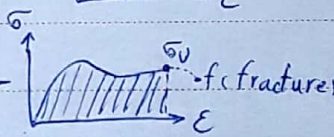
7- strength ^{استقامت} [MPa] $\rightarrow$ Ultimate st. و Yield st. مانند

8- Ductility ^{کشش پذیری} $\rightarrow$ توانایی تغییر فرم پلاستیک ماده قبل از شکست را چگونگی خرابی می باشد
اگر در یک ماده این ادواتی طول بیش از 5 باشد، ماده چکش خوار می باشد

9- Resilience ^{چقرمی} $\rightarrow$ توانایی ماده در جذب انرژی در واحد حجم بدون تغییر فرم دائمی
با در واقعیت میزان جذب انرژی در ماده قبل از تسلیم



10- Toughness ^{چقرمی} $\rightarrow$ بدون شکست $\rightarrow$ توانایی $\rightarrow$ مقدار تغییر شکل پلاستیک



11- Fracture Toughness $\rightarrow$ مقاومت ماده در برابر رشد ترک

برای تحلیل یک قطعه دارای ترک، تنش ها در نوک ترک singular شده و به سبب این تغییر شکل می کند به همین دلیل در این نوع قطعات تنش ها در فاصله دورتر از نوک ترک در نظر گرفته می شود.
به فریب شدت تنش K_{Ic} و K_{IIc} و K_{IIIc} تعریف می شوند.

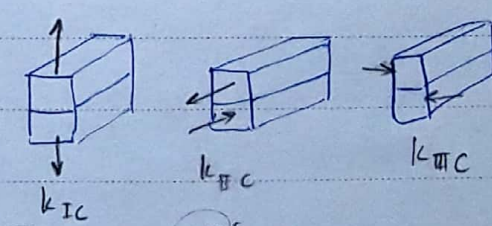
در محاسبه این فریب شدت تنش ما چگونگی شکست می مانند جزو خواص ذاتی ماده می باشند. در تنش خارج از این محدوده تنش ها مد باز شدنی

به عبارت دیگر چگونگی شکست، مقاومت ماده در برابر رشد ترک را نشان می دهد.
نویسه شود: فریب تمرکز تنش برای قطعات دارای حفره یا گوشه مانند σ و فریب شدت تنش برای قطعات دارای ترک مانند K_{Ic} می باشد.

در نوع طراحی داریم: ۱- طراحی بر اساس مقاومت مصالح
۲- طراحی بر اساس مکانیک شکست
وقتی که اندازه ترک داشته باشد

* Stress Intensity Factor

فریب شدت تنش
 K_I, K_{II}, K_{III} علامت
واحد $K = \sigma \sqrt{\pi a}$ [MPa $\sqrt{m}$]



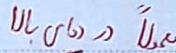
آزمایش DCB $\rightarrow$ Double Cantilevered Beam
آزمایش ENF $\rightarrow$ End Notch Flexure

اگر مسکونه وزن خیلی زیاد باشد نمی تواند افعال گپوزیت را خیلی کندو به دردی خود

Pa.s l CP : ob

مانند اراضی جوهره شده دفع قابلیت الاستیک دارد (برگرددن این اراضی در دوره آان) و دفع قابلیت پلاستیک (درب اراضی) دارد به آان و تغییر نم

خاصیت دوگانه یک ماده را بیان می کند که رفتار آن مابین حالت ویسکالایات از خود نشان می دهد: viscoelasticity



creep (خز) سے تفسیر محل بالذمت زنانہ در اثر دما ← اقربا سے

stress relaxation (تازا سازی تنش) سے در اثر دما کاٹھن کا

④ وسكر الاشنة لا از دوجت بوس ح لند

* کمپوزیت ها در دمای اتاق نیز دچار creep می شوند مگر آنکه از رزین استفاده کنیم نه دمای creep را بالا ببریم

کے علاوہ بر در حال کسے را از دانتها می بندیم (fix کی قسم) تا کرنش ثابت بماند

دولت راجا ای هک $E = 5$ ، نفس گاهش سر باید و سه روز زمان آن تیر با کامل

نشان شود و آذربایجان میسر شود.

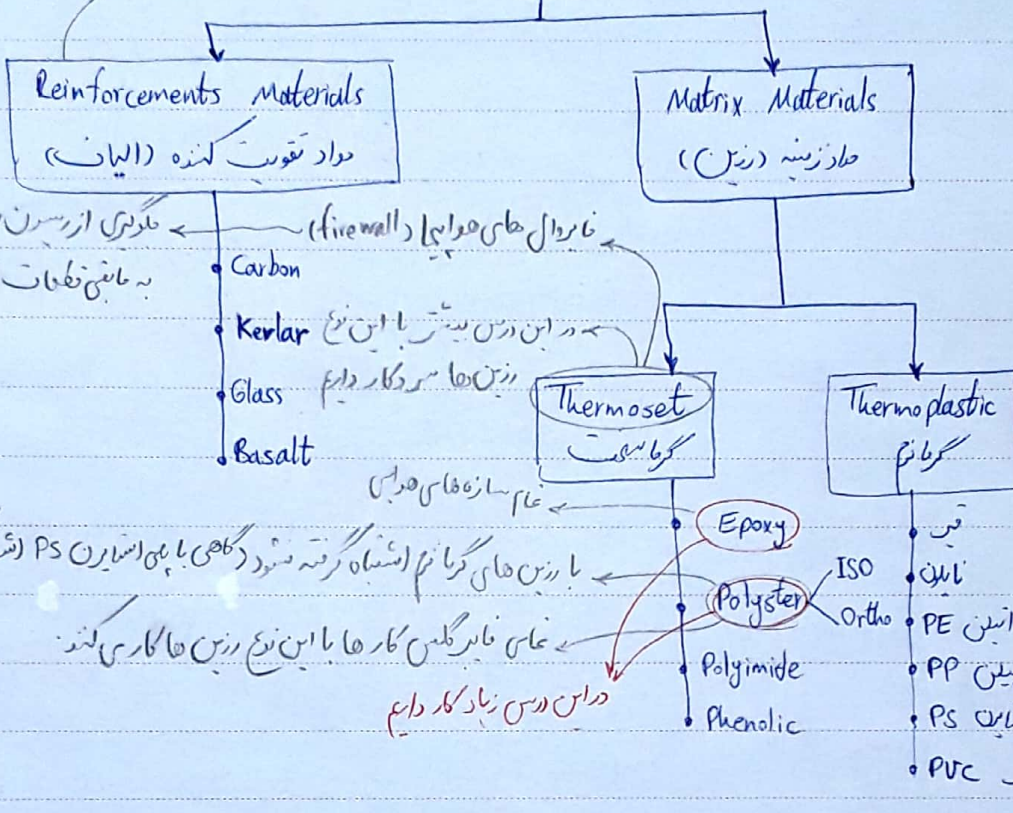
Composite Materials : سولہ کا مجموعہ

۴۰ بعضی فاضلها داخل هم نمی شوند

ترکیب دو ماده به صورت کمانی (نه شیبانی) شکل از الباب درین

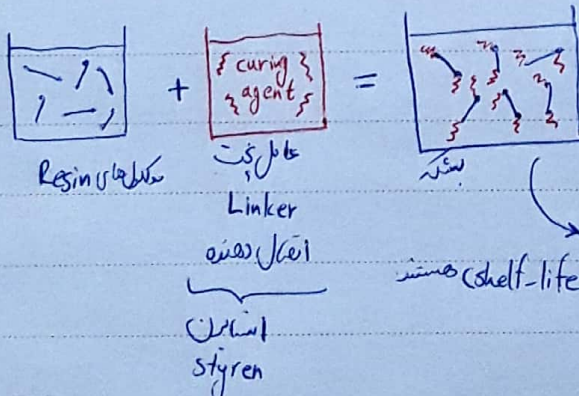
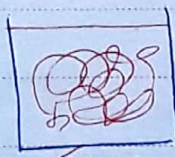
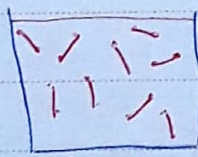
جدیداً از اینها خواص استفاده می کنند

مواد کامپوزیت



طول پیوندهای کربن-کربن در رزین های گرواست (تروپست) خیلی نزدیک است و به تبع آن دیسکورتیته بانی نیز دارند و هیچ جایی نمی توانند

گروپلاستیک (تروپلاستیک) بلند ... با الیاف دارند و به سختی ...



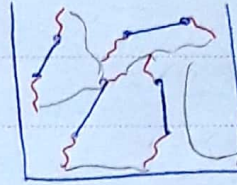
در این استایرن: رزین در ابتدا به هم پیوسته اند و به کمک استایرن، استایرن به استایرن پیوسته می شود. پس پیوسته می شود. این استایرن قرار می دهند و پس از باز کردن شبکه بعد از گذشت چند ماه این شبکه ها از شبکه فارگرددند و شبکه سخت شده است (دیگر به رد نمی خورد) رزین دانه

دانه های استایرن (shelf-life) هستند

resin + styren + inhibitor

مازدارنده

styren از فرار کردن



مازدارنده

بدین شروع پخت

شروع کننده

initiator = organic peroxide = Catalyst = اسید

محیط کوبید

(Methyle Ethyle Ketone Peroxide) MEKP

بدین شروع پخت

initiator

accelerator

Cobalt (تکالت)

بدین از این سرعت پخت

عمدی برای تکیه بر این و اسید را پس از ترکیب با هم نگه داشت

عمر گامه این

Resin + Styren + Inhibitor

MEKP

Cobalt

با ترکیب این سه ماده بعد از گذشت زمان شفاف می شود که به عنوان Pot life می شناسند، ترکیب سنت می شود و باید قبل از رسیدن به این زمان از ترکیب خود رها استفاده کرد.

2٪ 1٪ 0.1٪ وزن زین

0.8٪ 0.7٪ 0.1٪ وزن زین

اسید + تکالت + زین

در داخل یک ظرف

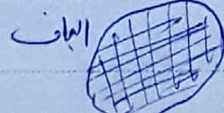
اگر این زمان بگذرد دکانمان را انجام نداده باشیم، دیگر نمی توانیم

حرارت دادن دوباره از آن استفاده کرد و باید آن را در یخچال

اچون رزین های تردیست فقط یک بار می توان حرارت داد و استفاده کرد و ماریدگی ما از این گرا رزین می سوزد و ذغال می شود. (دیگس تردی پلاستیک)

اول تکالت را داخل رزین می بریزیم و سپس اسید را می بریزیم. (نباید تکالت در زین را جداگانه با هم ترکیب کنیم).

ماید اسید را به ترکیب رزین اضافه کنیم نه این که ترکیب رزین را داخل بشکنیم اسید بریزیم چون موجب احتراق و آتش سوزی می شود. یعنی باید 1٪ وزن رزین را اسید ریخت نه اینکه 1٪ وزن اسید، رزین داخل آن بریزیم!



حالا باید رزین را به الاف اضافه کنیم

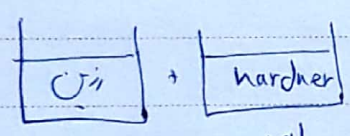
در آفریزر باید Hardner را با این ترکیب اضافه کنیم تا کاسه زیت

ساخته شود

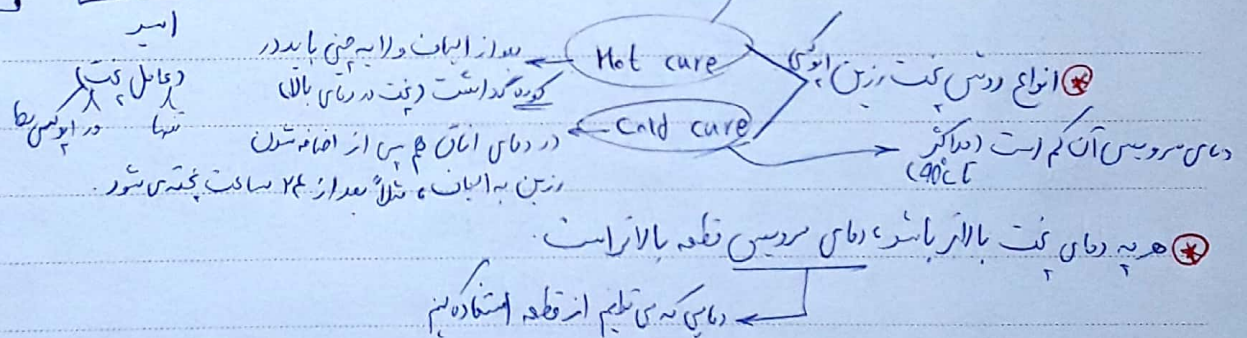
Gel time: زمان پخته ای است بعد از آنکه یک لایه رزین را از داخل بشکند بکاریم و روی یک لایه یخچیم، باید قبل از سخت شدن رزین لایه ی بعدی الیاف را روی آن قرار دهیم چون بعد از گذشت زمان یعنی این رزین سخت می شود و دیگر نمی توان لایه ی الیاف بعدی را روی آن قرار داد. به این مدت زمان Gel time می گویند و مدت زمان آن از Pot life بیشتر است چون یک لایه نازک رزین به دلیل قیاس کمتر و دمای کمتر در زیر سخت می شود.

جلسه 4

- اپوکسی:** جزئی که نسبت به پلی استر دارند: 1- انقباضی Shrinkage آن ها بعد از ترکیب کمتر است
 2- مقاومت به خوردگی قوی دارد
 3- چسبندگی قوی تر با الیاف دارند
 4- از آسایش استفاده نمی شود (در نتیجه وقتی شکلی آن را باز کنیم روی نامطوع نمی اهد و در نتیجه سیم نیست)
 5- از نگهدارنده و شروع کننده نیز استفاده نمی کنند (فقط از hardner (نشانه) می کنند)



چون قطب های قطبی بالا میزنیم
 90% کامپوزیت های در فرایع high-tech استفاده می شوند.



شکل بزرگ cold cure این است که دمای سردی بایستی دارند و شکل hot cure ای که نشانی های میخاند بعد از خنک شدن نقطه می باشد.

- رزین های معروف:
- Ly 5052
 - Ly 567
 - Ly 556
 - ML 506

hardner آن در دمای بالا شروع به دانسی با رزین و شروع پخت می کند

پیش رخنه (Pre Impregnation):

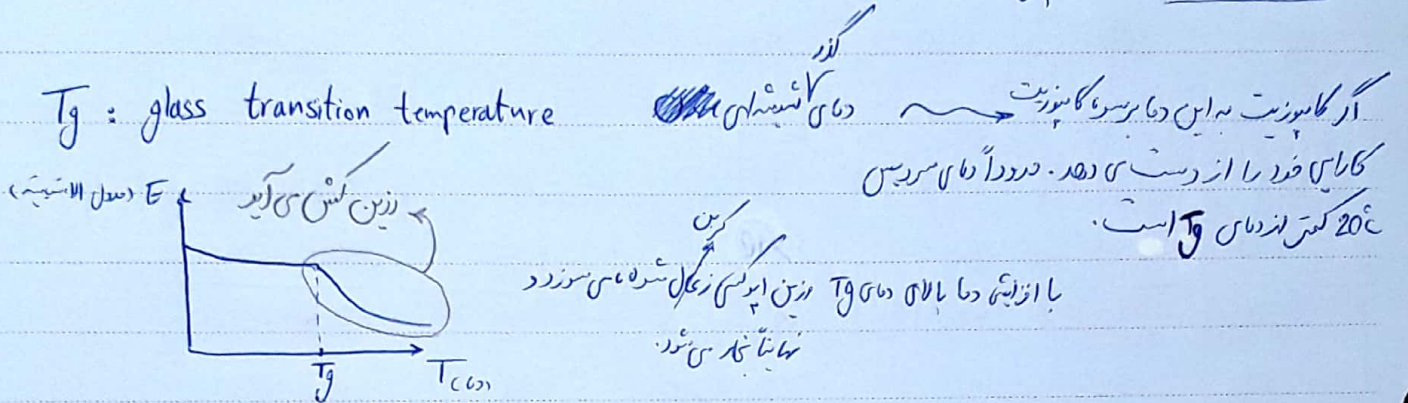
در تقسیم این نوع hardner را از قبل با رزین ترکیب می کنند و می فروشند. در نتیجه تنها کار لازم برای پخت رزین افزایش دماست و دیگر نیاز به افزودن hardner نیست.

در نتیجه حتماً باید hot cure باشند

مزیت این است که می تواند ضخامت رزین روی الیاف را کنترل کند و از قبل قطعات کامپوزیتی مشابه با ضخامت رزین یکسان تولید کند. ضخامت یکسان را به کمک دو لایه نامیون در دولت رزین و الیاف ایجاد می کنند.

$$E_{شیشه} = 70 \text{ GPa}$$

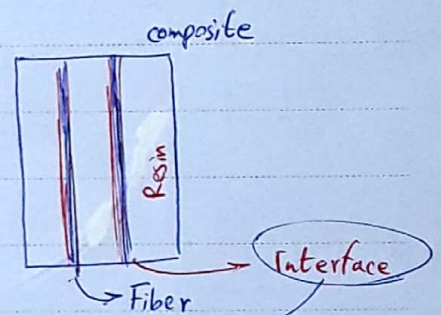
رزین های Pre Preg را می توان قبل از استفاده در پمپال نگه داشت اما باید توجه کرد که حتی در پمپال نیز عمر رزین به هشتاد روز است و معمولاً حداکثر تا 6 ماه می توان در پمپال نگه داشت.



Functions of constituents of composites:

(وظیفه های اجزای تشکیل دهنده کامپوزیت)

- 1- Fibers
- 2- Matrix
- 3- Interface



اگر اجزای رزین به الیاف پیوسته نباشد بار داره از رزین به الیاف منتقل نمی شود (نا مطلوب)

1- الیاف: تقویت کننده ها یا الیاف دلبسته (شکام بخشی به کامپوزیت را بر عهده دارند انواع مختلف داشته و به هم های مختلف تولید می شوند.

و E شیشه و الیاف شیشه یکسان است

انواع: الیاف کربن - الیاف کتان - الیاف کتان - الیاف کتان - الیاف کتان

فقط رزین کامپوزیت ها

فوق می کشد. رزین کامپوزیت

شیشه بیشتر از خود شیشه است.

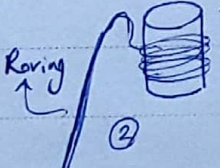
نم ها: ماکزیم زار دانه نخ ها (Filaments) و در هم قیمن آن ها، Roving بدست می آید

و سپس Roving با ~~...~~ کلاف می پیچانند و کلاف الیاف بدست می آید.

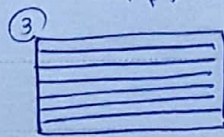
نخ

Filament

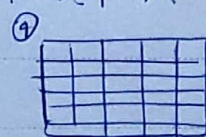
کوپرین خود (نار الیاف) به صورت ماسوره ای



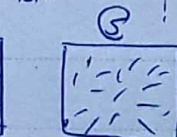
Roving



Unidirectional Fabric



Woven Fabric



Mat (Short Fiber)

ارزش سازی ندارد، در ساخت و استفاده و شستن مثلاً کاربرد دارد. در لوله های نفت و گاز بکار می آید.

مکام سازی کاربرد دارد.

$E = 10 - 12 \text{ GPa}$
 $S_u = 150 - 180 \text{ MPa}$
 $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$

الیاف پاره می شوند

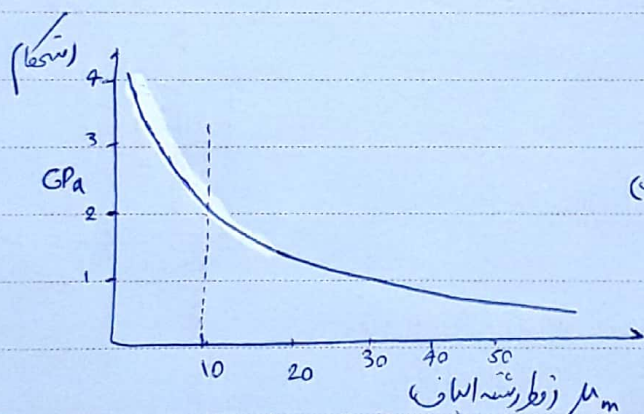
در جهت طولی فک دارد 7

5 > 4 > 3 > 2 > 1 : خواص مکانیکی



Density	E_x (GPa)	X_t (MPa)	Elongation %	CTE $\times 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}$	
2500	70	2400	4.8	4	E-glass
2500	86	3400	5.4	4	s-glass
1800	230	4900	2.1	-0.1	Carbon (T700)
1400	122	3600	2.4	-2.7	Kevlar 49
1200	3.5	70~80	> 10	63	Resin [Epoxy]
2700	75	300	19	23	AL 2024
7800	210	400	20	12	steel (A130)

5 ماده



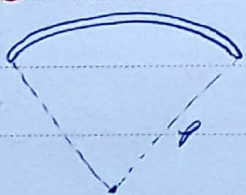
توده ای (فکته ای)

* نریت (استفاده از مواد در فرم نخ نسبت به توده (مانند): Bulk

1- استقامت مواد در فرم نخ بالاتر است (دری معدل بار است)

2- قابلیت ماندن بارچه و (استفاده برای رویش های

مقدور ساخت

در حقیقت فقط دوران های زیاد رخ می دهد ولی گریش های
مقدار اندکی هستند
و در صورت failure نمی شوند

3- انعطاف پذیری در شکل دهی (چون گریش های بزرگ رخ نمی دهد)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \quad E_{max} = \frac{d/2}{\rho} \rightarrow E_{max} = \frac{10^{-4} m}{2.54} = 1.97 \times 10^{-3} = 0.0019$$

* معایب فرم نخ:

1- نیاز به تعداد بسیار زیاد الیاف برای ساخت قطعه

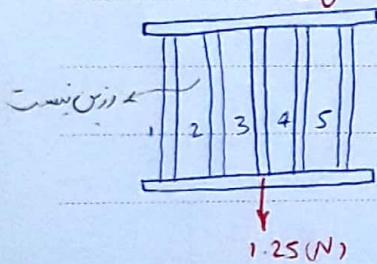
2- الیاف باید به صورت مناسب به همدیگر متصل شوند تا حداکثر استقامت (استاتیکی) حاصل شود.



در دستگاه تست کشش تست می شود

Domino Effect (اثر دومینو) :

اگر زین بین ایستگاه نباشد، استحکام محصور ایستگاه کمتر
شکل داده می شود (تحمل می کنند)



نخ 3 باره می شود : $\frac{1.25}{5} = 0.25 \text{ N}$

نخ 1 باره می شود : $\frac{1.25}{4} = 0.31 \text{ N}$

نخ 2 و 4 باره می شود : $\frac{1.25}{3} = 0.42 \text{ N}$

پس مانند یک دومینو نخ ها باره می شوند (اثر دومینو)

پس باید نیروی کمتر از 1.25 N وارد کنیم تا
ضعیف ترین نخ دچار شکست نشود

الگوی فرضی می کنیم که نیروی
1.25 N را به محصور وارد کنیم

بررسی صحت فرضی

ابتدا فرض می کنیم تمام نخ ها (محصور و نخ ها)
می توانند این نیروی 1.8 N را تحمل کنند

نخ 1 : 0.3 N

" 2 : 0.35 N

" 3 : 0.25 N

" 4 : 0.4 N

" 5 : 0.5 N

مجموع : 1.8 N

پس فرض باطل است

پس داریم که استحکام سازه را باید با

جمع کردن استحکام نخ ها بدست

آوریم چنان هم فرض کردیم که سیم استحکام مجموع

ملازم 1.8 N دلی استحکام سازه کمتر از

1.25 N می باشد

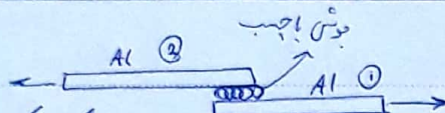
پس در کامپوزیت، نسبت هایی که زمین به ایستگاه پیچیده است ممکن است باعث شکست قطعه کامپوزیتی شوند

اگر بین ایستگاه زمین باشد

Subject
Date

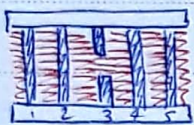
کامپوزیت های با زمینه سرامیکی : MMC : کامپوزیت های با زمینه پلیمری : PMC : کامپوزیت های با زمینه فلزی : MMC :

کامپوزیت های تقویت شده با فیبر : FRPC : کامپوزیت های تقویت شده با زرات : PRC : کامپوزیت های تقویت شده با وینستر : WRC : Reinforced (تقویت شده)



همانطور که در درس خاص اجزای به خط داریم ، جوش یا جیب تنش خال دارد به 1 را به لگ

تنش برشی در تیرهای جوش خورده شود به تقویتی 2 وارد می کند . در کامپوزیت نیز همین کار را انجام می دهد . یعنی بعد از بار شدن و شکست یکی از ایلاف ، رزین هم در ایلاف پاره نشده فعلی از بار را به قسمت های پلاستیک نخ پاره شده وارد می کند و این موجب می شود که تمام بار نخ پاره شده بین نخ های دیگر تقسیم نشود و فقط در حد از آن منتقل شود و بقیه ی آن را خود همان نخ پاره شده (به لگ بین ایلاف آن) تحمل می کند .
به شرط آنکه رزین کاملاً به ایلاف بچسبد



4) فرض هایی که باید در نظر گرفت :

- 1- چسب ها هیچ نوع تفاوت کششی ندارند و می پیوند کامل بین چسب و ایلاف برقرار شده است .
- 2- در اثر شکست نخ فرض می شود که 16% بار آن کتبی شود (آن 16% به بقیه نقاط وارد می شود)

با در نظر گرفتن این دو فرض

تنش دبار ، در ایلاف دبار 8% افزایش می یابد

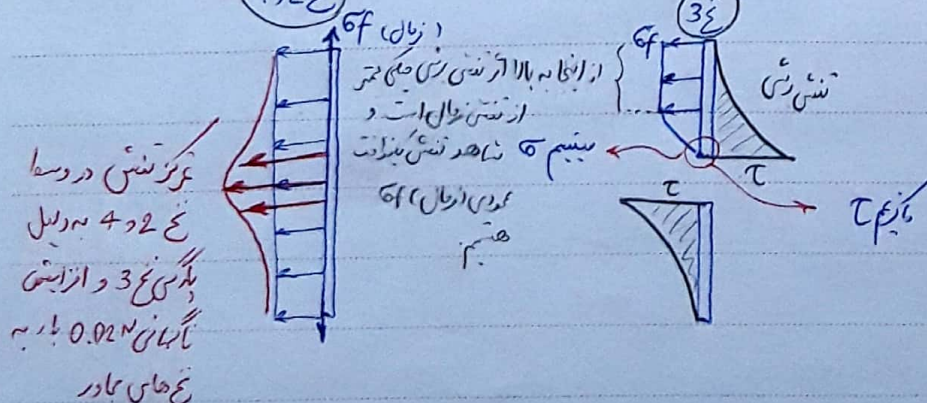
دوباره در محل بار دبار را می نویسیم $\rightarrow \frac{1.25}{5} = 0.25 \text{ N} \rightarrow \text{پاره شدن نخ 3} \rightarrow \text{افزایش 8\% بار در نخ 2} \rightarrow 0.02 \text{ N}$

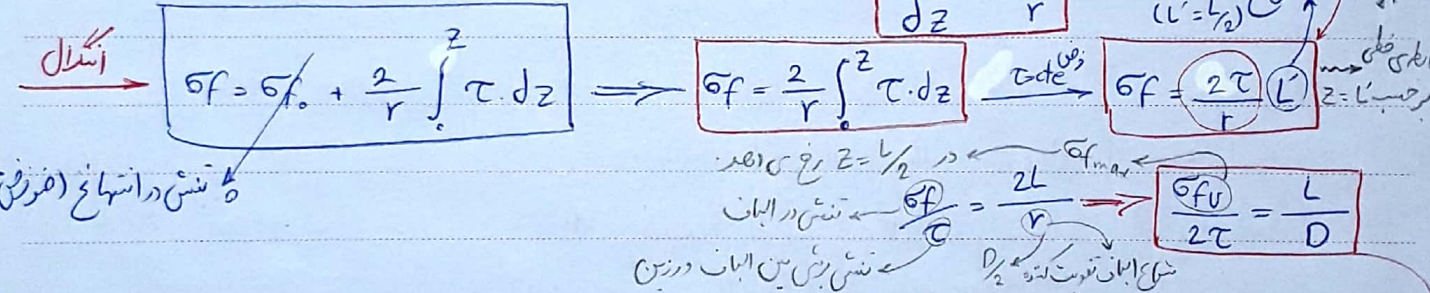
بین همگی بار از نخ های دیگر دبار شکست نخ می شوند

$$\left. \begin{aligned} 2 \text{ نخ} &= 0.25 + 0.02 = 0.27 \text{ N} \\ 4 \text{ " } &= 0.27 \text{ N} \\ 3 \text{ " } &= 0.25 - 0.04 = 0.21 \text{ N} \quad \leftarrow \text{کاهش 16\% بار در نخ 3 (0.04 N)} \\ 5 \text{ " } &= 0.25 \text{ N} \\ 1 \text{ " } &= 0.25 \text{ N} \end{aligned} \right\}$$

5) توجه شود در مدار کامپوزیت نزد مستقیماً به ایلاف وارد نمی شود بلکه از طریق رزین و سطح خاص مناسب بین رزین و ایلاف ، به ایلاف منتقل می شود

برای درک این موضوع به مکانیزم انتقال تنش از ایلاف به رزین در مثال زیر توجه کنید (هم بعد)



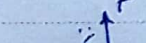


اگر $\frac{1}{D}$ بیشتر از رابطی متن باشد، طول انتاب بیشتر از طول عملی بوده و نسبت الکسیسی انتاب بخیی دودر کابوژیت

همچ استفاده ای شده است.

اگر بین کاملاً به نخ چسبیده باشد، نیرویی که
کف لیون درین دارد می شود با به همان F باشد

اگر غیر از این بود با درین کامل چسبیده است با
نخ پاره شده است



(درین درین حالت)

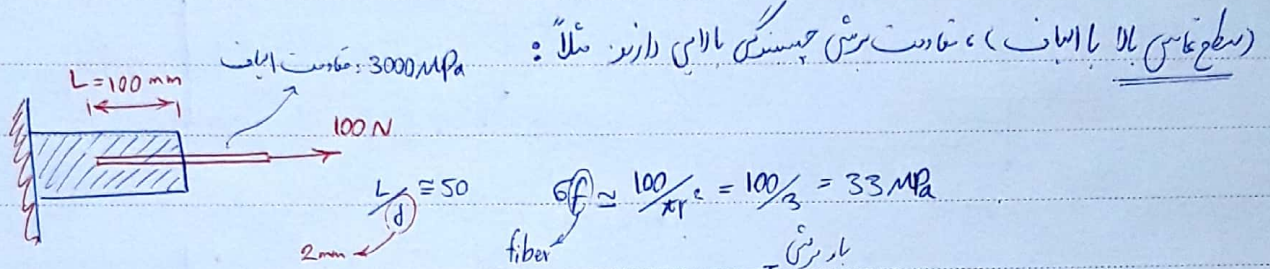
از رزین انتظار داریم که به یکنواختی الیاف و نظم نگه داشتن آن‌ها متکی دارد.

① - Fiber

② - Matrix Material : مواد رزینی

جله 6

③ رزین‌ها معمولاً (نسبتاً) کشش و فشاری خیلی پایین‌تر در مقایسه با الیاف (نسبتاً کشنده) دارند و پس به دلیل داشتن نسبت منفرجه بالا Aspect Ratio



$\tau = \frac{100}{2\pi r L} = \frac{100}{12 \times 100} = 0.08 \text{ MPa}$

$n_f = \frac{3000}{33} \approx 100$: تعداد الیاف

$n = \frac{20 \text{ MPa}}{0.08} = 200$: تعداد الیاف

$\sigma = 20 \text{ MPa}$: فرض

مقاومت کششی آن تقریباً 3 برابر است $\approx 60 \text{ MPa}$

به همین دلیل در کلیه‌ها معمولاً فرض می‌شود رزین نقطه بارش را تحمل می‌کند

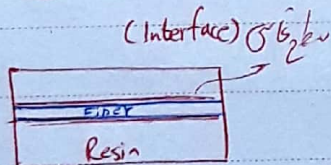
1 - Aligning the fiber (هم‌راستایی الیاف) : از وظایف رزین

2 - Transfer the load between the fibers : مربوط به اثر درونی

3 - کمک به الیاف در تحمل بار فشاری و بار برشی

4 - حفاظت الیاف از خوردگی

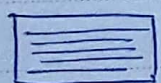
③ - Interface



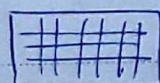
- ④ وظایف :
- 1- رساندن بار به سطح الیاف : مثلاً فلز به سرامیک نمی‌چسبد و ظاهر آن آب به شیشه نمی‌چسبد (به دلیل کم بودن انرژی سطحی)
 - 2- سازگاری بین الیاف و رزین زمینه

تک لایه (Layer یا Ply) Lamina

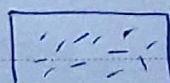
اصطلاحات :
Nomenclature



Unidirectional



Woven



Mat

وقتی گلوله سراسیمه را مورد افسوس کند، نوک گلوله که گچ می شود و از روی زیادی از آن گزینی می شود پس به

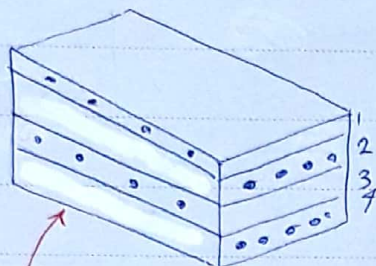
الیاف تار برود می شود و این الیاف با استفاده کم گشتی خود گلوله را متوقف می کنند

Laminate (چند لایه) :

③ • Hybrid Laminates

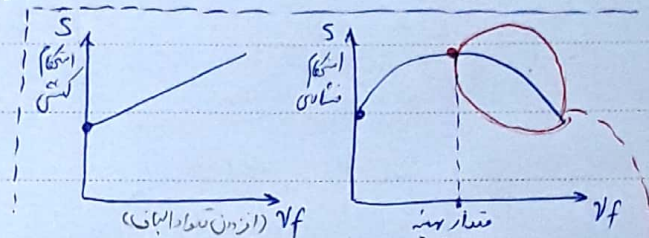
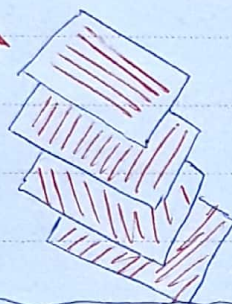
چندین لایه های مختلف را می توان با هم چسباند

① • Unidirectional



الیاف در تمام لایه ها هم جهت هستند

② • Multidirectional



میانگین 60 تا 70 درصد و غالباً نزدیک به 50 درصد است

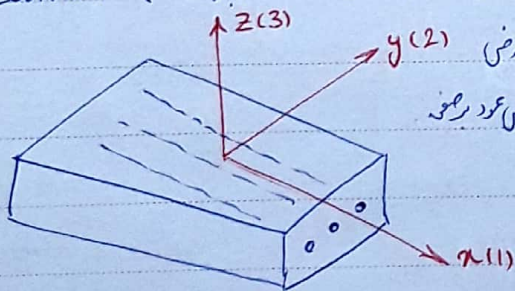
Volume Fraction (کسر حجمی)

Fiber v.f. (کسر حجمی الیاف) V_f
Resin v.f. (کسر حجمی رزین) V_m

به علت کاهش آن این است که اگر V_f از یک حدی بیشتر شود مانند آن است که اصلاً رزین وجود نداشته باشد و در هر گلوله که تقسیم می شود می تواند بار فشاری را به تنهایی تحمل کند

نسبت $V_f + V_m = 1$ نسبت Interface را در نظر بگیرید و حجمی برای آن خالی نمی شود چون در واقع هم خواص بسیار کمی دارد

Directions (جهت) 1- Fiber Direction, Axial D. و longitudinal



2- Matrix D. و Transverse D. عرضی (2) y

3- Transverse D. و Perpendicular to the Lamina عرضی عمود بر صفحه

رأسی 2 و 3 مانند هم هستند

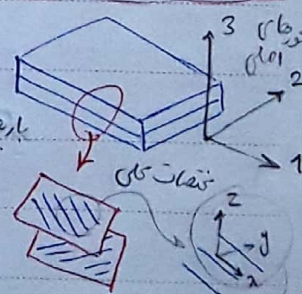
Coordinate Axis (مختصات)

1- Global coordinate system (off-axis c.s. یا Loading c.s.) بارهای خارجی را نشان می دهد

2- Local c.s. (on-axis c.s. یا Material c.s.) بارهای داخلی لایه ها را نشان می دهد

(مختصات محلی)

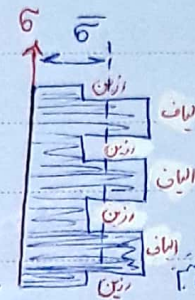
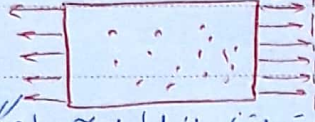
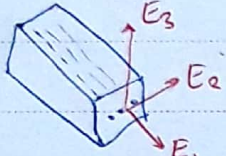
به کدهای محلی به تعداد لایه ها، کدهای محلی داریم



$$\boxed{\text{رژین}} + \boxed{\text{فایبر}} = \boxed{\text{کامپوزیت}}$$

به ازای E کرنش ثابت، E ریزین
تغییر کرنشی را جذب می کند چون
طبق رابطه $E_c = E_f V_f + E_r V_r$

از این رابطه می توان E_c را بدست آورد



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_f A_f + \sigma_r A_r}{A_f + A_r}$$

در روش روابط هری در رابطه
مقابل از $\bar{\sigma}$ و استفاده می شود

$$\bar{\sigma} = E_c \epsilon$$

در کامپوزیت این رابطه به صورت
ماتریس می باشد

رژین کلی و خاص: برای تحلیل فقط با E و ν می توان سازه را تحلیل کرد (و بقیه ویژگی ها دفرمسی از E و ν بدست می آیند)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

دش برای طاقی از فریب الحینان با فریب طاقی نیز استفاده می کنیم و استفاده می کنیم و اهمیت دارد.

$$\begin{matrix} G_{12} & \nu_{12} \\ G_{13} & \nu_{13} \\ G_{23} & \nu_{23} \end{matrix}$$

* کامپوزیت ها در مقیاس میکرو مکانیک هستند (یعنی نان کلکول) اما متوسط در لگرنش E و ν (در $\bar{\sigma}$)
با E و ν (در $\bar{\sigma}$) کامپوزیت را هکین در لگرنش (در هر لایه هکین در لگرنش می شود)

حلقه

بدست آمدن E و ν و G :

Micro Mechanics (روش 1)

Macro Mechanics (روش 2)

در این روش طاقی مواد تشکیل دهنده از قبیل الیاف ریزین و کترجی آن ها بسیار اهمیت

دارند و در معادلات مربوطه طاقی می شود.

به روشی که در این حالت وجود دارد:

روش 1) Mechanics of Materials Approach (روش مقادیر تجربی)

روش 2) Theory of Elasticity (تئوری الاستیسیته)

روش 3) Semi-Empirical Models (Halpin-Tsai) (مدل های نیمه تجربی)

المان خاندن حجم واحد

Representative Volume Element

در روش RVE در لگرنش و
سازه را حل می کنند

نوع برای مطالعه می باشد:

Principles of composite materials
Mechanics, 3rd Ed., 2011
R. F. Gibson

در این روش یک لایه هکین و ارتوتروپیک دفرم می شود و با فرض اینکه روابط هکین یک لایه

صالح هستند، خطای الاستیک تئوریک لایه هکین (زیرت هکین) در سازه های مختلف طبق

استاندارد ASTM (جامعه آزمون مواد آمریکا) بدست می آید.

در این کلاس بدین شیوه

Traditional Materials سے طرقات، پیمبرھا، حداد، آئینہ و سب

2- علامت تنفس بیش در کانونیت‌ها بسیار کم است.

خواص کھانسی

E, G, γ
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $L^3 \quad L^3$

نظاری

باید در ردایا هور جاندار

انہوں نے کیا؟

$$\Sigma = [E]. \{ \epsilon \}$$

Diagram showing two square loops with arrows indicating current flow. A bracket to the right of the loops is labeled "بهم زنی می کنند" (they are connected).

مولانا سید رشید علی نقوی

← و طالع نشتر و کبریا دارد که 6 امام آن‌ها مشتمل هستند (تا ریس مربعی 3×3)

9 مولى

که در صومعه برادر در نظر گرفته می شدند اما در یک عجم سه صومعه برای یک تنگه به صورت تاریخی
با و دیوانه در نظر گرفته می شدند چون از هر تنگه سه صومعه بود به هم مجبور می شدند و در صومعه 3 دیوانه
در راه می ماند. (تاسوس و تاسوس کنونی)

A. لغز : $\vec{t} = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3$

15.8

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$
$$\sigma_{ij}, \tau_{ij} = 1, 2, 3$$

به همین ترتیب تا سرگرسش داریم : از ع

از رابطہ کی کہی ہوئی صورت:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

stiffness matrix

در این کتاب آمده و هر کدام 9 جلد دارند

عادت آنکه منتهای راه به ریف آخر کلاها می‌خوردند از 6 ریف باهمانده نیز در 3 مکتبه

مکاتیب صفحہ ۱۱ بعد خط ۱۱ و در نہایت 36 نوکریں مانتہ

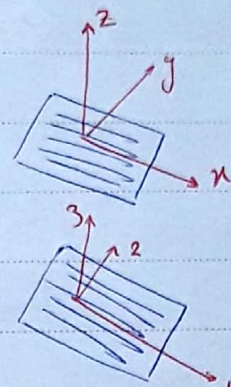
در این صورت موله با سوسپنشن C به 36 موله کاهش می یوایم کند. (بقیه موله های آن منفرجه است)

$$\bar{\sigma} = C \varepsilon$$
$$b_{ij} = b_{ji}$$

801-802

P4PCO.

o/p: ← Regular Letter o/p: ← Contracted Letter	an by ez ex ny en ey ez er es
Regular Letter Contracted Letter	11 22 33 23 31 12 1 2 3 4 5 6



$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1132} & c_{1131} & c_{1113} & c_{1112} & c_{1121} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the stress-strain relationship for a material with a single crystal structure (Triclinic). The stress components σ_1 and σ_2 are shown acting on a unit cube. The strain components ϵ_1 through ϵ_6 are shown as arrows along the axes. The material is labeled as "Anisotropic" and "Triclinic".

The stress-strain relationship is summarized in the following table:

Stress Component	Strain Component	Modulus
σ_1	ϵ_1	c_{11}
σ_2	ϵ_2	c_{22}
σ_3	ϵ_3	c_{33}
σ_4	ϵ_4	c_{44}
σ_5	ϵ_5	c_{55}
σ_6	ϵ_6	c_{66}

Anisotropic (Triclinic)

$$\sigma_i = c_{ij} \cdot \epsilon_j$$

$$i \cdot j = 1 \text{ } 6$$

نشی زغال داخل مخدہ اس	61	C11	C12	C13	C17	C15	C16
	62	C21	C22	C23	C24	C25	C26
نشی زغال خارج مخدہ اس	63	C31	C32	C33	C34	C35	C36
نشی برسی خارج مخدہ اس	64	C41	C42	C43	C44	C45	C46
	65	C51	C52	C53	C54	C55	C56
نشی برسی داخل مخدہ اس	66	C61	C62	C63	C64	C65	C66

sym. (مقابلہ)

مواد زیر همسانگرد (حالت کلی 36) طولی دارند و پس توجه شود با توجه به ملاحظات مورد بیان، تا آنسور یک تا ستر ششمان می باشد

و با توجه به این تئیس تعداد ذراتهای مستقل به 21 ذرات کاهش می یابند. به این نوع مواد در طیف Triclinic می گویند که هیچ تقارن خاص در فضاها آن ها وجود ندارد.

• (or) $\hat{O}(n)$ Material Symmetry

اولین دینہ :

اولین دسته: Monoclinic Material: در این دسته از مواد یک محوری بودن وجود داشته به همین دلیل می توان اثبات کرد تعداد دانه های غیر همسانگرد در مکردهای

مادہ (on-Axis) این مواد بہ 20 جولانہ گاڑیں دیں تاکہ تعداد منزلتہاں مستقل آن طاق حصول زیر آگاس بناد

$\begin{array}{ccc|ccc} \checkmark & \checkmark & \checkmark & 0 & 0 & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & 0 & 0 & \checkmark \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & 0 & 0 & \checkmark \\ \hline 0 & 0 & 0 & \checkmark & \checkmark & 0 \rightarrow \text{jo} \\ 0 & 0 & 0 & \checkmark & \checkmark & 0 \\ \checkmark & \checkmark & \checkmark & 0 & 0 & \checkmark \rightarrow \text{us} \end{array}$

} $\rightarrow$ $\begin{array}{c} \checkmark 20 \\ 0 16 \end{array} \rightarrow \text{Jinnu } \checkmark 13$
 $\leftarrow 6+7 \leftarrow$

۱- تنه‌های بیش‌تر خارج محله‌ها فقط به کرنش‌های ~~خارج~~ خارج محله‌های کپلی می‌شوند. (برپایه شزند)

2- تنش های ریشی داخل صحنه ای به کنش های زوایا پیکل می شوند

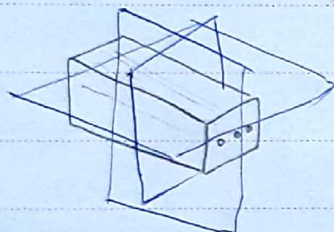
← دانیال کور (۱۵۱) عروج (3 کور)

: دیشی ددم

2- Orthotropic Materials

(مراد از تروینگ)

حائز کسب و کار - ۲۰۱۵



اگر ما در هر روز یک بار ۳ صبحی بکنیم، تعداد دل‌پسته با اثر به آن ماه ، ماه های اردو ترسیف می شوند.

در این حالت تعداد دانه‌های غیر مغز ماریس، به 12 عدد و دانه‌های مثل به 9 عدد کاهش پیدا می‌کنند.

نظم اگر در دست ۳ ع را داشته باشیم، ۳ در دست ۳

ان-آکس (ان-آکس) $\rightarrow$ بدست آید

این صفتها برای گدست.

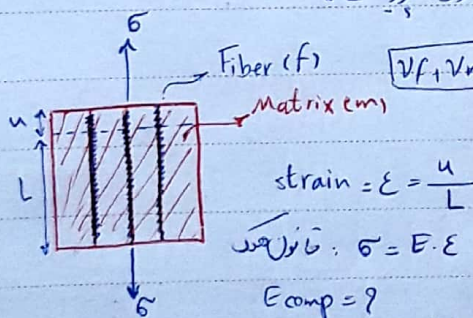
Orthotropic (بایا)

(*) ویژگی اصلی این مدار:

تفسیرهای مثال: $(6_{11}, 6_{22}, 6_{33})$ و تفسیرهای بزرگ $(6_{23}, 6_{31}, 6_{12})$ در صفحات اصلی (مکدهای on-Axis) از هم جدا می‌شوند. (decouple می‌شوند).

به عبارت دیگر تنش های برآل نقطه کرنش های برآل و تنش های برش نقطه کرنش های برش از طریق رابطه فوق مرتبط می شوند.

یادآوری: خزانه علم مواد (دکتر مومنی) شماره سامانه مدرک الاستیسیته در مواد کامپوزیت:


$$\text{strain} = \epsilon = \frac{u}{L}$$

۴.۴ = ۵ : قانون همد

$$E_{\text{comp}} = ?$$

۱۔ نفس (عوامل درازی عبت الباق :

← در این حالت کرنش ها را بر دوش تنبیه ها متعاقب است

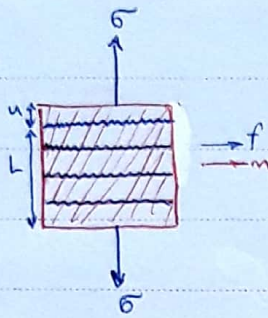
$$\sigma_f + \sigma_m = \sigma, \quad \varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon \leftarrow$$

بر اساس قانون اختلاط (Mixture Law) هرکس به اندازه کسر حجمی خود از گاز است

$$v_f + v_m = 1$$

$$\sigma = E_f \cdot v_f \cdot \cancel{x} + E_m (1 - v_f) \cdot \cancel{x} = E_{\text{comp}} \cdot \cancel{x} \Rightarrow E_{\text{comp}} = E_f \cdot v_f + E_m (1 - v_f)$$

$v_f \in E_{\text{comp}}$ (في الذاكرة) ←

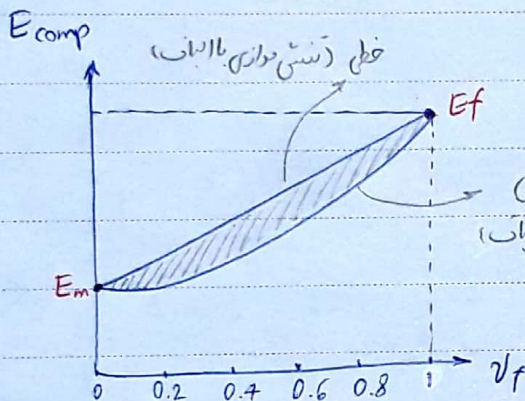


2- تنش اعمالی کرد بر جهت الیاف باشد:
در این حالت تنش ها در f و m برابر دلی کرنش ها متفاوت است.

$$\epsilon = \nu_f \cdot \epsilon_f + \nu_m \cdot \epsilon_m \quad \text{و} \quad \sigma_f = \sigma_m = \sigma$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \nu_f \cdot \epsilon_f + (1 - \nu_f) \epsilon_m \\ \sigma &= E \epsilon \rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E_{comp}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{E_{comp}} = \frac{\nu_f \sigma}{E_f} + \frac{(1 - \nu_f) \sigma}{E_m}$$

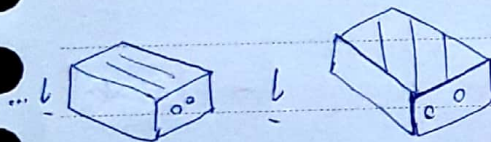
$$\Rightarrow E_{comp} = \frac{1}{\frac{\nu_f}{E_f} + \frac{1 - \nu_f}{E_m}} \quad \text{وابستگی فرخطی با} \nu_f$$



در کامپوزیت های تک جهت به ازای هر ν_f جدول الاستیسیته ها و دلی کامپوزیت (E_{comp}) بین منفی بالا و پایینی قرار دارد. (خاصیت ها شش ضلعی)

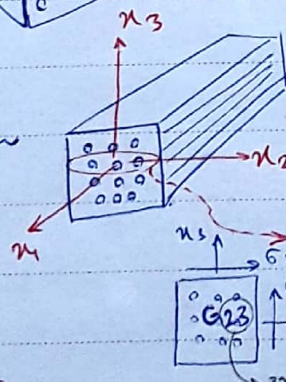
برای مثال E_m در Carbon/Epoxy برابر با 181 GPa است در حالیکه در Carbon برابر 230 GPa و در Epoxy برابر 3.5 GPa است.

8 جمله مواد Transverse Isotropic: این مواد دارای آنیزوتروپی هستند که در آن یک محوری همگند (خطی در آن محوری مستقل از جهت هستند) وجود دارد. برای مثال در یک کامپوزیت تک جهت با جهت الیاف



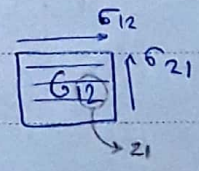
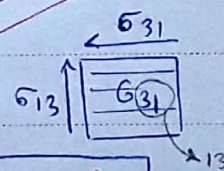
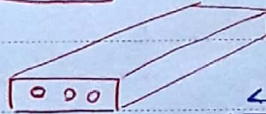
دکوانه

محوری ν_1 ν_2 ν_3 یک محوری
آنیزوتروپی است چون در این محوری در جهت طولی و آرایش الیاف بین دین یکسان است.



$$E_2 = E_3$$

در محوری عرضی خود همگند می باشند
Transverse



فایل pdf = composite materials

فایل مارتین سستی

برای به رده ها 25

$$C_{55} = C_{66}$$

$$G_{12} = G_{13}$$

$$C_{22} = C_{33}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13}$$

$$E_2 = E_3$$

$$S_{22} = S_{33}$$

$$S_{12} = S_{13}$$

$$C_{12} = C_{13}$$

S_{11}	S_{12}	S_{12}	0	0	0
S_{12}	S_{22}	S_{23}	0	0	0
S_{12}	S_{23}	S_{22}	0	0	0
0	0	0	S_{24}	0	0
0	0	0	0	S_{55}	0
0	0	0	0	0	S_{55}

$$S_{11} = \frac{1}{E}$$

$$S_{12} = -\frac{v_{12}}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$S_{23} = \frac{v_{22}}{E_2}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} = \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2}$$

$$S_{SS} = \frac{1}{G_{12}}$$

محکمہ تعلیمات

$$C_{22} = C_{33}$$

$$C_{12} > C_{13}$$

$$C_{55} = C_{66}$$

$$C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}$$

C_{11}	C_{12}	C_{12}
C_{21}	C_{22}	C_{23}
C_{21}	C_{32}	C_{22}
o	o	o
o	o	o
o	o	

၁ ၂ ၃

0 0 0

0 0 0

$$\frac{C_{22} - C_{23}}{2} \quad 0 \quad 0$$

0 (66) 0

2 8 6

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$$

مؤلفه عمر عفتل

تعداد خوابت غیر ضرر برابر 12، تعداد خوابت مستقل برابر 5، مولده است. (یعنی تنها به 5 مرتبه آزمون در آزمایگاه نیاز داریم).

$$E_1, E_2, v_{21}, v_{23}, G_{12}$$

Isotropic Material : μ is same

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad v_{23} = v_{13} = v_{12} = v, \quad G_{23} = G_{13} = G_{12} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

در این دسته از مدار خازن در قطب مثبت است از جهت همسند.

ماتریس معکوس

C_{11}	C_{12}	C_{12}	0	0	0
C_{12}	C_{11}	C_{12}	0	0	0
C_{12}	C_{12}	C_{11}	0	0	0
			$\frac{C_{11}-C_{12}}{2}$	0	0
0	0	0	0	$\frac{C_{11}-C_{12}}{2}$	0
0	0	0	0	0	$\frac{C_{11}-C_{12}}{2}$
0	0	0	0	0	$\frac{C_{11}-C_{12}}{2}$

$$C_{12} = C_{21}$$

$$C_{11} = C_{22}$$

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} + \frac{C_{22} - C_{23}}{2}$$

تعداد مکمل های مستقل: 2

فقداد كدلفی کرمان : ۱۲

۱. فقط با راستن علامت می توان
غام میزنیم هم C را نوشت

ماوراء النهر

دولت های تاریخی مصر

ساده ترین تم معادله‌ی مساحتی در تم ضرایب مستقی که به راحتی حدک هفت است، به صورت زیر نوشته شود (به طور مستقیم در آرایگاه اندازه گیری نمی‌گردد به آن ضرایبی که به طور مستقیم در آرایگاه اندازه گیری شده و داریس C داری سازند، ثابت هندسی (Engineering cons.) می‌گویند.

S_{11}	S_{12}	S_{12}	0	0	0
S_{12}	S_{11}	S_{12}	0	0	0
S_{12}	S_{12}	S_{11}	0	0	0
0	0	0	S_{44}	0	0
0	0	0	0	S_{44}	0
0	0	0	0	0	S_{44}

$$S_{11} = \frac{1}{E}$$

$$S_{12} = \frac{-v}{E}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}$$

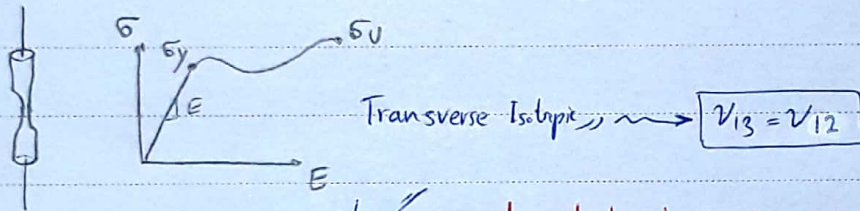
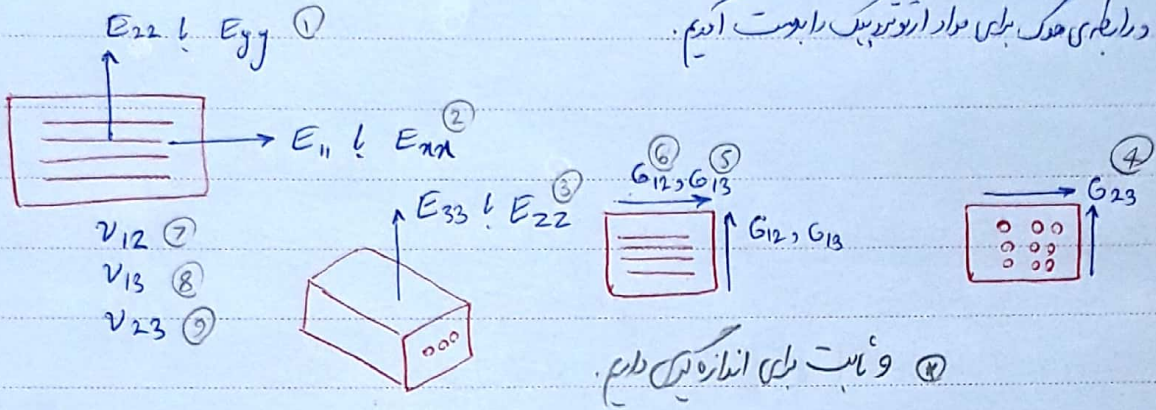
$$C_{II} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{\gamma \cdot E}{(1 + \gamma)(1 - 2\gamma)}$$

$$C_{44} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

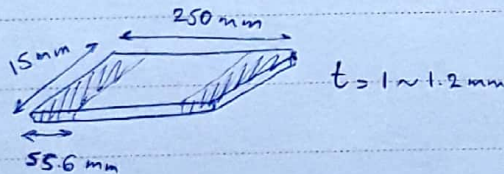
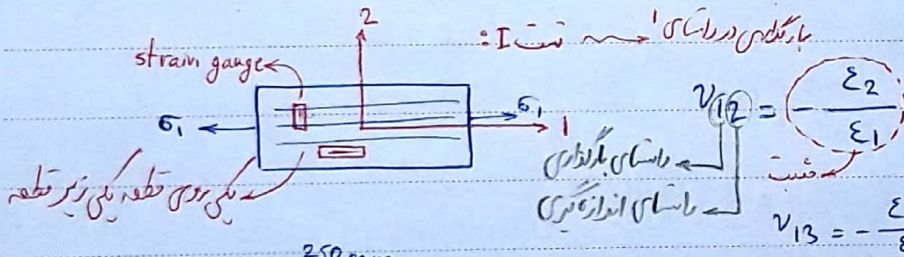
(ثوابت هندسی) Engineering Constants : فصل اول Tsai

ثوابت هندسی فیزیکی هستند از قبیل E ، ν و G که از طریق آزمایش بدست آمده و با استفاده از اینها می توانیم ماتریس C را تشکیل داده و در رابطه های هک بلیس مواد ارتوتروپیک را بدست آوریم.



Longitudinal Young's Modulus (مدول یانگ طولی)

a) Uniaxial Test: $\sigma_1 \neq 0$ $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$



پایه از بتن است

استاندارد تست کشش کامپوزیت ها ASTM D3039

چون تسلیم آن بهترین مقادیر است

ν_{12} : Major Poisson's Ratio (نسبت پواسون بزرگ)

ν_{21} : Minor Poisson's Ratio (نسبت پواسون کوچک)

$$\nu_{ij} \neq \nu_{ji} \begin{cases} \nu_{12} \neq \nu_{21} \\ \nu_{13} \neq \nu_{31} \\ \nu_{23} \neq \nu_{32} \end{cases}$$

$$\nu_{12} \gg \nu_{21}$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$b) \quad \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$$

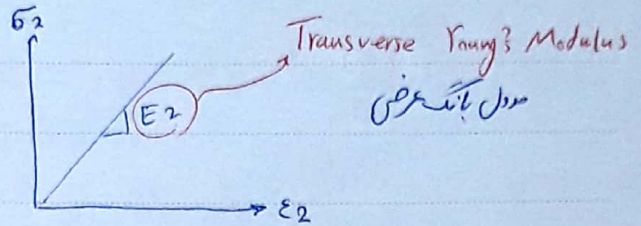
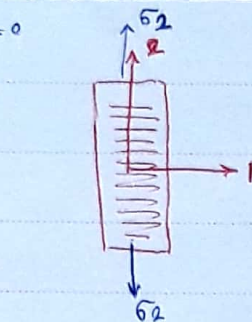
خس نه فرست به نك دنگه

قوت Tab : 2 ~ 3 mm

اگر Tab باشد، نگه

دنگه نظام grip کردن دو طرفه

هم درین قطعه خواصی می افتد که ممکن است مرکز تنش به جای وسط قطعه از دو طرف قطعه بدب گشت شود



$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

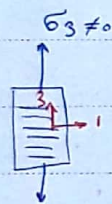
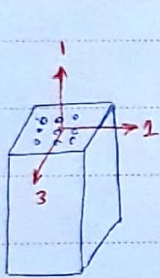
$$\epsilon_1 = -\nu_{21} \epsilon_2 = -\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\epsilon_3 = -\nu_{23} \epsilon_2 = -\nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\nu_{21} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \nu_{23} = -\frac{\epsilon_3}{\epsilon_2}$$

Similarity : if $\sigma_3 \neq 0$

9. مله



$$E_3 = \frac{\sigma_3}{\epsilon_3}$$

$$\epsilon_1 = -\nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_3}$$

$$\epsilon_2 = -\nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_3}$$

طبقه Tsai ترتیب نشان ندهد $\nu_{31} = \nu_{13}$

در تاب نشان : 1-2-3 $\Rightarrow$ off مدارهای و $\Rightarrow$ x-y-z $\Rightarrow$ on مدارهای

اندازه گیری

$$\nu_{yx} = \nu_{21}$$

در Hyer برعکس بود

$$\tau_{13} \neq 0 \rightarrow G_{13} = \frac{\tau_{13}}{\gamma_{13}}$$

$$\tau_{23} \neq 0 \rightarrow G_{23} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}}$$

$$\tau_{12} \neq 0 \rightarrow G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}}$$

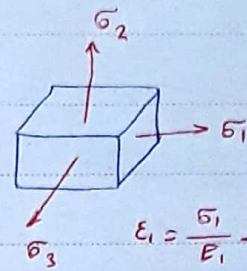
مدول های برشی (از نسبت به چرخش)

صاف

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^I + \varepsilon_1^{II} + \varepsilon_1^{III} = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_3}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^I + \varepsilon_2^{II} + \varepsilon_2^{III} = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_3}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3^I + \varepsilon_3^{II} + \varepsilon_3^{III} = \frac{\sigma_3}{E_3} - \nu_{13} \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2}$$



$$\delta_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}}, \quad \delta_{13} = \frac{\tau_{13}}{G_{13}}, \quad \delta_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

Orthotropic Materials

Hyet (برای این)

معمولاً در قطعات کامپوزیت $E_1 \gg E_2$

	σ_1	σ_2	σ_3	τ_{23}	τ_{13}	τ_{12}
ε_1	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0
ε_2	s_{21}	s_{22}	s_{23}	0	0	0
ε_3	s_{31}	s_{32}	s_{33}	0	0	0
δ_{23}	0	0	0	s_{44}	0	0
δ_{13}	0	0	0	0	s_{55}	0
δ_{12}	0	0	0	0	0	s_{66}

S_{ij} Compliance Matrix

$$\varepsilon_{ij} = Q_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

در فضا با این ماتریس سرکار داریم

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}$$

نویس

در کامپوزیت ها با این ماتریس سرکار داریم

بدون علامت (مثبت)

$$s_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad s_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad s_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}$$

$$s_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad s_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad s_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}$$

$$s_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad s_{32} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad s_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$s_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad s_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad s_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

$C_{ij} = C_{ji}$ ماتریس سختی $\Rightarrow Q_{ij} = Q_{ji}$ ماتریس سختی در دو نشان هستند

$\Downarrow$

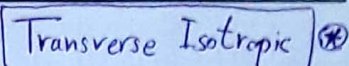
$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \begin{cases} s_{12} = s_{21} \\ s_{13} = s_{31} \\ s_{23} = s_{32} \end{cases}$$

$$s_{12} = s_{21} \Rightarrow \frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad E_1 \gg E_2 \Rightarrow \nu_{12} \gg \nu_{21}$$

$$s_{13} = s_{31} \Rightarrow \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$$

$$s_{23} = s_{32} \Rightarrow \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

رابطه بین مؤلفه های ماتریس C با ماتریس S ← 25



③ $v_{12} = v_{13}$

$$E = \frac{\text{غلزات}}{2(1 + \nu)}$$

$\rightarrow$ $\text{C}_{23} \text{ O}_2$

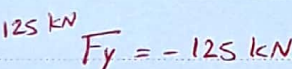
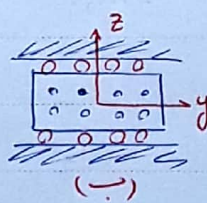
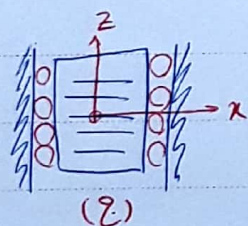
$$v_1 \sim v_{23} \mid v_{32} \text{ f } \in \mathcal{C}_{\text{ind}}$$

$E_1, E_2, V_{21}, V_{23}, G_{12}$
 بدست می آید و مستقل نیست

سی فولندی مستقل در کامیونیت های هسگند عرض دارم

$$E \longrightarrow [\text{GPa}] \quad 10^9 \text{ Pa}$$

مشارکت در کامپوزیت‌ها برای تکمیل ۳ بعدی تنش (استرادیاید) و ثابت مهندسی در آزمایشگاه اندازه‌گیری شوندر


$$\nu_{13} = \nu_{12} = 0.248, \quad G_{23} = 3.2 \text{ GPa}$$


(۶) در جهت تقویت وجود دارد

در حالت فنون ما برای (A) تکرار کرد و نتایج را مقایسه کنید $\leftarrow A$
 $v = 0.3$, $E = 72.46 \text{ Pa}$

$$[Q] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

plane strain

یادآورید در فلزات و مواد انیزوتروپیک؟

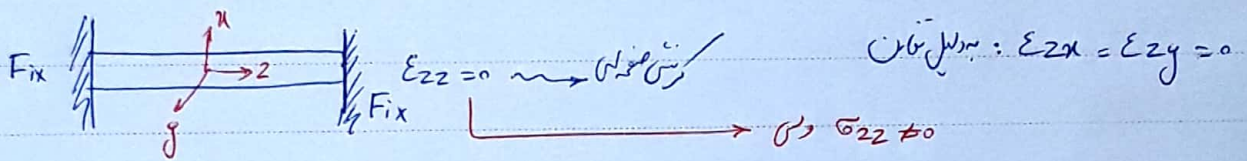
④ مسائل در حالت کرنش سه بعدی هستند ولی تحلیل‌های دو بعدی در بعضی از حالت‌ها جواب‌های مهندسی مناسبی دارد و مسائل سه بعدی

را به دو بعدی تقسیم دارد و زمان و هزینه‌ها را کاهش می‌دهد. به همین دلیل در مسائل مهندسی دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای

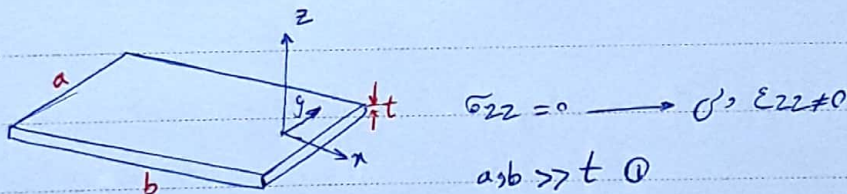
Plain Strain & Plane Stress

در نظر گرفتن شوند

در کرنش صفحه‌ای، یکی از ابعاد نسبت به دو بعد دیگر خیلی بلندتر است. مانند سیم‌کشی‌هایی که دو انتهای آن فیکس شده باشند.

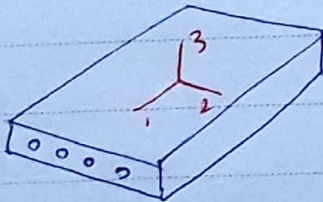


در تنش صفحه‌ای، یکی از ابعاد نسبت به دو بعد دیگر خیلی کوچکتر است به طوری که بتوان از تنش‌های در آن دایره صرف نظر کرد.



② بارگذاری داخلی صاف باشد

⑤ معمولاً یک لایه‌های کامپوزیت به دلیل ضخامت خیلی کم (در مقایسه با دو بعد دیگر) خیلی نزدیک به حالت دو بعدی بوده و مسائل مربوط به کامپوزیت‌ها



$$\sigma_3 = 0 \quad \text{و} \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0$$

$$\begin{cases} \epsilon_{23} = S_{44} \cdot \tau_{23} = 0 \\ \epsilon_{13} = S_{55} \cdot \tau_{13} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_3 = 0 \rightarrow \epsilon_3 = S_{31} \sigma_1 + S_{32} \sigma_2 + S_{33} \sigma_3$$

را با فرض تنش صفحه‌ای تحلیل می‌کنند.

به این ترتیب رابطه‌ی تنش کرنش در مواد ایزوتروپیک (همسانگرد عطفی) و کمالات مادی (On-Axis) به صورت زیر ساده می‌شود:

4 ماتریسهای سازه ای در این درجی
را بدست آورد

$$G_{12}, \nu_{12}, E_2, E_1$$

ماتریس نرمی

ماتریس سختی

تشریح نموداری

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

ع از رابطه ای می توان بدست آورد

27 جزوه

*** PDF Hyer 76

Orthotropic Materials

معکوس ماتریس نرمی 22

بر اساس Hyer

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$C_{11} = \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}S_{23}}{S}$$

$$C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S}$$

$$C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}S_{13}}{S}$$

$$C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S}$$

$$C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{12}}{S}$$

$$C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}$$

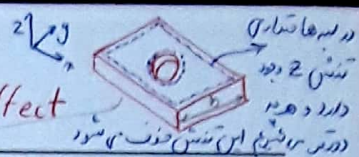
$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}}$$

$$C_{55} = \frac{1}{S_{55}}$$

$$C_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}S_{23} - S_{22}S_{13}S_{13} - S_{33}S_{12}S_{12} + 2S_{12}S_{23}S_{13}$$

در کامپوزیت ها هم می توان از دایره ای دور استفاده کرد و فرض می کند



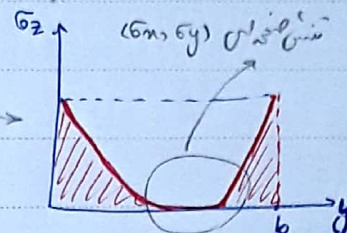
edge effect

جلسه 10

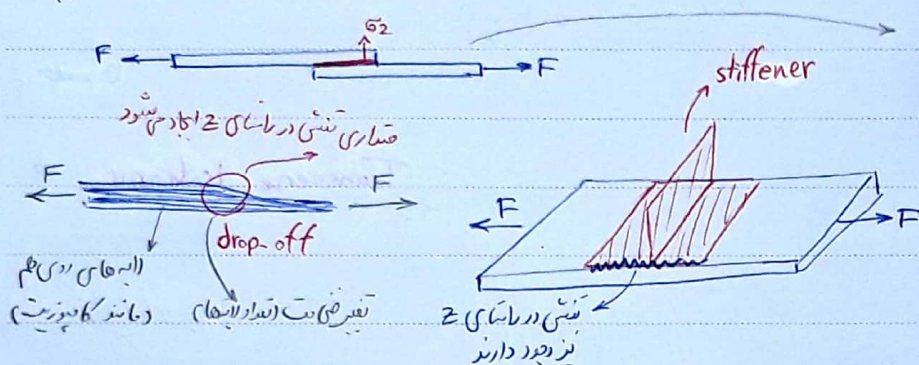
ایراد فرض تشنش صفحه ای :

۱- تحلیل چند لایه ها در زیر لبه های آزاد با استفاده از این فرض خلاف می باشد

۲- در اتمالات چوبی، تشنش زیاد دارد شدن به صفحه به یک تشنش بیش به محض دیگر تشنش می شود اما فشاری تشنش در راستای z نیز دارد می شود که ما آن را صرف نظر کرده ایم.



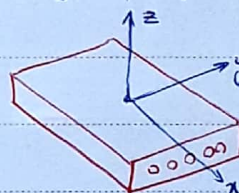
SS چوب



* علامت کتاب Tsai : قبل از بحث Hyer می نشینم

مدل الاستیسیته در جهت ایات E_x عمود بر ایات E_y عرضعمود بر صفحه E_z مدل بیش داخل صفحه ای G_{xy} خارج صفحه ای G_{xz} G_{yz} ① محور xyz کرده ای on-axis با کرده ای (محور کلی)

② کرده ای 123 کرده ای off-axis با کرده ای (محور کلی)

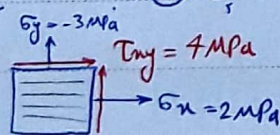
 $E_y = E_z$ نسبت پواسون ν_{xy}

Major Poisson's Ratio

نسبت پواسون ν_{yz} ν_{xy} نسبت پواسون ν_{xy} ν_{zx}, ν_{xz} $\nu_{zx} = \nu_{yz}$ ν_{xy}, ν_{yz} $G_{zx} = G_{yz}$ $G_{yz} = \frac{E_y}{2(1+\nu_{yz})}$

$$\frac{\nu_{yx}}{E_x} = \frac{\nu_{xy}}{E_y}$$

تقریب) مدل یک لایه تخت چوبی درین رابطه با بارگذاری مطابق شکل زیر مانتیسی می، مانتیسی منحنی و فریب پواسون را بدست آورید.



تشنش صفحه ای

Carbon/Epoxy:

۱- ثابت مانتیسی از جدول مشخص شوند:

 $E_x = 181 \text{ GPa}$ $E_y = 10.3 \text{ GPa}$ $\nu_{yx} = \nu_{xy} = 0.28$ $G_{xy} = 7.17 \text{ GPa}$

مید

* σ_{xy} ، σ_x به صورت σ_x و σ_y به صورت σ_y نشان می دهند

$$S_{xx} = \frac{1}{E_x} = 0.5525 (10^{-11}) \text{ Pa}^{-1}$$

$$S_{xy} = -\frac{\nu_y}{E_y} = -\frac{\nu_x}{E_x} = -0.1547 (10^{-11}) \text{ Pa}^{-1} \quad : \text{۲- ماتریس کرنش}$$

$$S_{yy} = \frac{1}{E_y} = 9.7087 (10^{-11}) \text{ Pa}^{-1}$$

$$S_{ss} = \frac{1}{E_s} = 0.1395 (10^{-9}) \text{ Pa}^{-1}$$

همان G_s

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{yx} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

on-axis

۳- ماتریس سختی:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix}$$

← از جنس E

on-axis

$$Q_{xx} = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} = 1.81 \cdot 8 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$Q_{xy} = \frac{\nu_y \cdot E_x}{1 - \nu_x \nu_y} = \frac{\nu_x \cdot E_y}{1 - \nu_x \nu_y} = 2.897 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$Q_{ss} = E_s = 7.17 \text{ GPa}$$

$$Q_{yy} = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} = 10.35 \text{ GPa}$$

* تحول دم Transformation of Stress & Strain (Tsai)

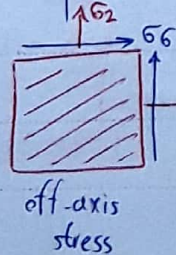
مفهوم: تا این قسمت ثابت می شد (در $E_x, E_y, \dots$) در کدهای on-axis (یا کدهای مادی - کدهای مکانی) از طریق آزمایش بدست آورده به صورت جداول در کتاب های مربوط به کامپوزیت ها درج می باشند. بر اساس خطی on-axis، ماتریس های سختی Q و کرنش های تشکیل می شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_i &= Q_{ij} \cdot \epsilon_j \\ \epsilon_i &= S_{ij} \cdot \sigma_j \\ \sigma_{ij} &= \epsilon_{ij} \end{aligned}$$

مورد استفاده قرار دهیم.

انتهای این ماتریس ها می توانیم رابطه ی هک با به صورت

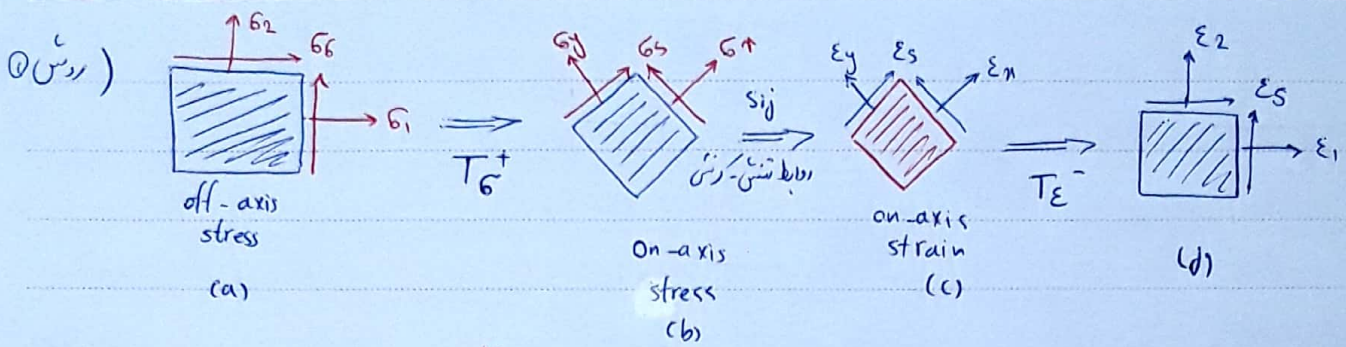
مشاکی که الان مطرح می شود این است که اگر در یک قطعه ما المان off-axis، نمونه های مختلفی داشته باشیم و بخواهیم بدست آوریم؟



۱- راه حل: از دایان کامپوزیت استفاده می کنیم.

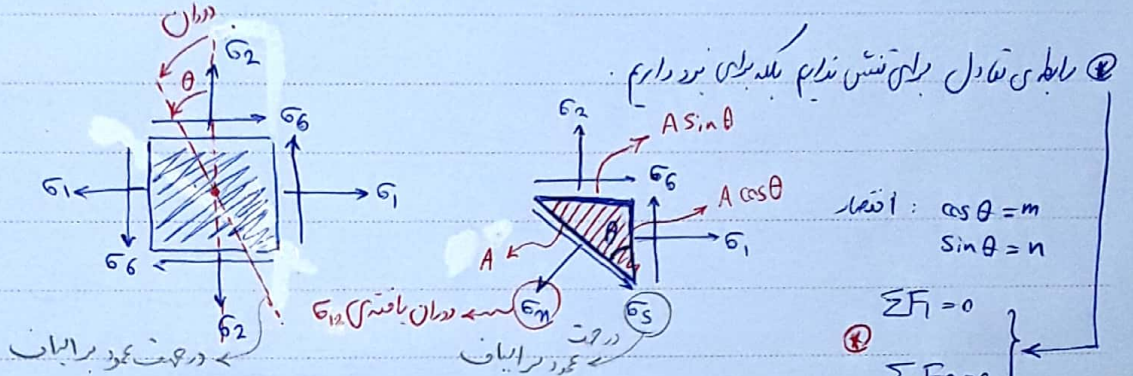
۲- خطی مکانی را در جهت off-axis بدست آوریم.

انجام تست



از b:

الف) ریش درجهت
عمود بر ایات



$$\sum F_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1 A \cos \theta + A \sin \theta \sigma_6 - A \cos \theta \sigma_x + A \sin \theta \sigma_y = 0$$

ا ب ریش است که ایات با هم در افقی می سازند
 θ ریش است که ایات با هم در افقی می سازند

$$\textcircled{1} \quad m \sigma_x - n \sigma_y = m \sigma_1 + n \sigma_6$$

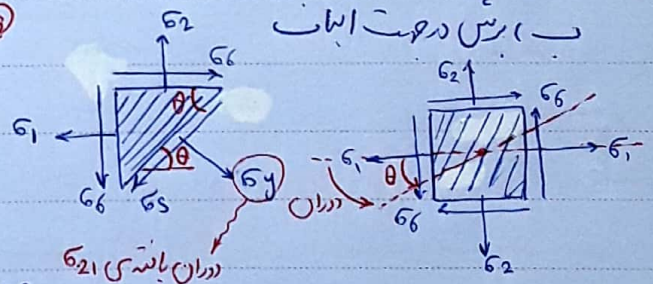
$$\textcircled{2} \quad n \sigma_x + m \sigma_y = n \sigma_2 + m \sigma_6$$

$$\textcircled{1,2} \quad \sigma_x = m^2 \sigma_1 + n^2 \sigma_2 + 2mn \sigma_6 \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1,2} \quad \sigma_y = -mn \sigma_1 + mn \sigma_2 + (m^2 - n^2) \sigma_6 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} \sigma_y = n^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 - 2mn \sigma_6 \\ \sigma_x = -mn \sigma_1 + mn \sigma_2 + (m^2 - n^2) \sigma_6 \end{cases}$$

ب) ریش درجهت ایات



	ϵ_1 σ_1	ϵ_2 σ_2	ϵ_6 σ_6
ϵ_x یا σ_x	m^2	n^2	$2mn$
ϵ_y یا σ_y	n^2	m^2	$-2mn$
$\epsilon_{x/2}$ یا σ_s	$-mn$	mn	$m^2 - n^2$

$$\begin{cases} m = \cos \theta \\ n = \sin \theta \end{cases}$$

باید توجه کرد که ماتریس متناظر نمی باشد

ماتریس دوران مؤلفه تنش از کدهای off به کدهای on

$T_{3 \times 3}$
ماتریس تبدیل تنش

$$\sigma_{on} = T \cdot \sigma_{off}$$

$$\sigma_{off} = T^{-1} \sigma_{on}$$

$$\textcircled{T_\sigma}^+$$

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

Subject

اثبات اینکه مقادیر ویژه همان تنش ها (کارش ها) اصلی و بردارهای ویژه همان بردارهای اصلی هستند:

یادآوری: هرگاه ضرب یک ماتریس در یک بردار برابر عدد در همان بردار شود، به آن عدد مقدار ویژه و به آن بردار بردار ویژه می گویند.

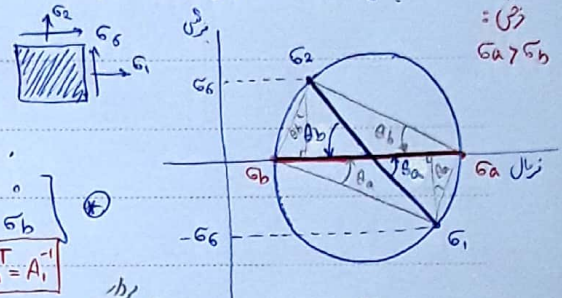
$$M \hat{n} = \lambda \hat{n} \Rightarrow (M - \lambda I) \hat{n} = 0 \Rightarrow |M - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

مقادیر ویژه: $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

بردار: $\hat{n}$

ماتریس: M

تغییر عرض: λ



$$\sigma' = A \sigma A^T$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & \sigma_b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I} \quad \begin{bmatrix} m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \sigma_a \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \sigma_a \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_a = \text{مقدار ویژه} \\ \text{II} \quad \begin{bmatrix} -n & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n \\ m \end{bmatrix} = \sigma_b \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n \\ m \end{bmatrix} = \sigma_b \begin{bmatrix} -n \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_b = \text{مقدار ویژه} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_1 - \lambda & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \sigma_a, \sigma_b$$

نویس آردین زاویه ای دوران (پاد ساعتی) حرکت مختصات فعلی برای رسیدن به بردارهای اصلی

$$\text{I, II} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_a & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 - \sigma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_a & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 - \sigma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tan \theta_a \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \tan \theta_a = \frac{\sigma_6}{\sigma_1 - \sigma_a} = \frac{\sigma_6}{\sigma_1 - \sigma_a} \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_b & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 - \sigma_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n \\ m \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_b & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_2 - \sigma_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \tan \theta_b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \tan \theta_b = \frac{\sigma_6}{\sigma_1 - \sigma_b} = \frac{\sigma_6}{\sigma_1 - \sigma_b} \end{cases}$$

$\lambda_2 = \sigma_b$ بردار ویژه

یادآوری: نسبت آردین مقدار ویژه یک ماتریس 2×2 و 3×3

نکته: ضرب مقادیر ویژه برابر با دترمینان ماتریس و مجموع آنها برابر با اثر ماتریس است.

$\text{trace} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots$ $\text{det} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots$

$\text{trace} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ $\text{det} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

$2 \times 2: \lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$

$3 \times 3: \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$I_1 = a + e + i = \text{trace}$

$I_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$

$I_3 = |M| = \det(M)$

if $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \lambda \end{bmatrix}$

نکته: *

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = \alpha \\ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = \beta \\ \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = \gamma \\ \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = \lambda \end{cases}$$

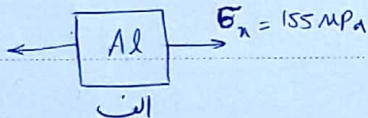
$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_y}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_x}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = 50 \text{ mm}, \Delta y = 50 \text{ mm}$$

TA

$$E = 70 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$



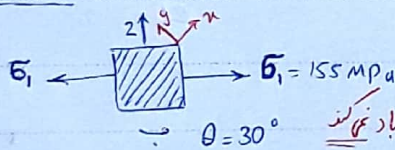
مثال: مقایسه تغییر ابعاد در آلومینوم و ربر:

Carbon/Epoxy:

$$E_x = 181 \text{ GPa}$$

$$E_y = 10.3 \text{ GPa}$$

$$\nu_{xy} = 0.28 \quad G_{xy} = E_s = 7.17 \text{ GPa}$$

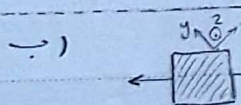


تغییر ابعاد در این حالت کرنش برشی ایجاد نمی کند

$$\begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{cases} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{cases} = \begin{cases} 2140 \\ -642 \\ 0 \end{cases} \times 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{mm}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \Delta x = \epsilon_x \cdot \Delta x = (2140 \times 10^{-6}) \times 50 = 0.1070 \text{ mm} \rightarrow \Delta x + \delta \Delta x = 50.107 \text{ mm} \\ \delta \Delta y = \epsilon_y \cdot \Delta y = (-642 \times 10^{-6}) \times 50 = -0.0321 \text{ mm} \rightarrow \Delta y + \delta \Delta y = 49.968 \text{ mm} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{cases} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{61} & s_{62} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{cases}$$

$$s_{11} = u_1 + u_2 \cos 2\theta + u_3 \cos 4\theta$$

$$u_1 = \frac{1}{8} (3s_{xx} + 3s_{yy} + 2s_{xy} + s_{ss})$$

$$u_2 = \frac{1}{2} (s_{xx} - s_{yy})$$

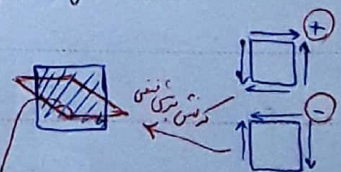
$$u_3 = \frac{1}{8} (s_{xx} + s_{yy} - 2s_{xy} - s_{ss})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{cases} = \begin{bmatrix} 50.8 & -26.9 & -62.2 \\ -26.9 & 88.9 & -3.77 \\ -62.2 & -3.77 & 186 \end{bmatrix} \begin{cases} 155 \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 7880 \\ -4170 \\ -9640 \end{cases} \times 10^{-6}$$

تغییر ابعاد در این حالت کرنش برشی ایجاد می کند

افزایش ظاهری تا یکد به اندازه 0.553 درج

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \Delta_1 = \epsilon_1 \cdot \Delta_1 = 0.00788 \times 50 = 0.394 \text{ mm} \rightarrow \Delta_1 + \delta \Delta_1 = 50.394 \text{ mm} \\ \delta \Delta_2 = \epsilon_2 \cdot \Delta_2 = (-0.00417) \times 50 = -0.209 \text{ mm} \rightarrow \Delta_2 + \delta \Delta_2 = 49.791 \text{ mm} \end{cases}$$

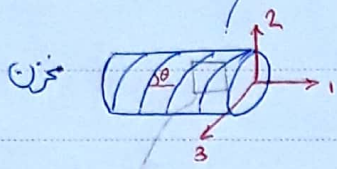


اگر 30- بود کرنش برشی شکل تغییر می کند

ص 45 -> (باز هم منشی می شود) به حالت خ منشی دارد

فیلament winding درست می‌کند

محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها در on-axis



$$\theta = 53.1^\circ$$

Graphite/Epoxy

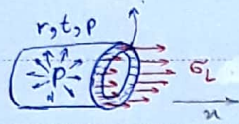
$$\begin{cases} E_x = 155 \text{ GPa} \\ E_y = 12.1 \text{ GPa} \\ \nu_{xy} = 0.248 \\ G_{xy} = E_s = 9.4 \text{ GPa} \end{cases}$$

ابعاد و ضخامت

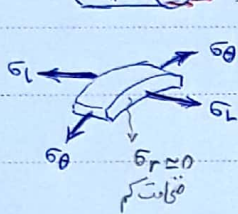
$$\begin{cases} D_i = 63.5 \text{ cm} \\ t = 2 \text{ cm} \\ \theta = 53.1^\circ \end{cases}$$

$$P = 1.379 \text{ MPa}$$

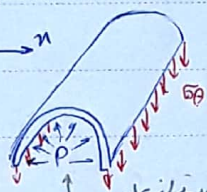
بادا درون



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (2\pi r t) \sigma_L - P(\pi r^2) = 0 \Rightarrow \sigma_L = \frac{Pr}{2t}$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (2tL) \sigma_\theta - (2rL)P = 0 \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$$



$$\sigma_\theta = 2\sigma_L$$

چون وقتی ضوابط کم باشد، تنش‌ها در این دو جهت از هم دور می‌شوند و این تنش‌ها را می‌توانیم

$$\sigma_L = \sigma_1 = \frac{Pr}{2t} = \frac{PD_i}{4t} = \frac{1.379 \times 63.5}{4 \times 2} = 10.95 \text{ MPa}, \quad \sigma_\theta = \sigma_2 = \frac{Pr}{t} = \frac{PD_i}{2t} = 21.89 \text{ MPa}$$

$$m = \cos \theta, \quad n = \sin \theta$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.64 & 0.96 \\ 0.64 & 0.36 & -0.96 \\ -0.48 & 0.48 & -0.28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10.95 \\ 21.89 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17.95 \\ 14.88 \\ 5.25 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_n} & -\frac{\nu_y}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_n}{E_n} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 17.95 \\ 14.88 \\ 5.25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19.18 \times 10^{-5} \\ 1.2 \times 10^{-3} \\ 1.2 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{s/2} \end{Bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{s/2} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{s/2} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{nn} & s_{ny} & 0 \\ s_{yn} & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{nn} & Q_{ny} & 0 \\ Q_{yn} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = R [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{s/2} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = R [T] R^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_s \end{Bmatrix}$$

$\leftarrow$ Q معادل
 $\leftarrow$ S معادل
 بدست آوردن $[Q]$ و $[S]$:

$$R \cdot T_e \cdot R^{-1} = T_e$$

پایین می چل

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} = T^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_a \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = T^{-1} \cdot Q \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = T^{-1} \cdot Q \cdot R \cdot T \cdot R^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix}$$

و نکته دارد که ϵ های آن ها مستقل هستند

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix}$$

$[Q] = T^{-1} Q R T R^{-1}$
 $[Q]^{-1} = [S]$
 $[S] = [Q]^{-1} \Rightarrow [S] = R T R^{-1} S T$
 پایین می چل

$[T] \leftarrow$ ① ②

$$[R][T_e^+][R^{-1}] = [T_e^+] \iff [T_e^+] = [R^{-1}][T_e^+][R] = [T]$$

④ برای بدست آوردن کرنش های off به کمک کرنش های off:

$$[Q] = T^{-1} Q R T R^{-1} \Rightarrow [Q] = [T_e^-][Q][T_e^+]$$

معکوس

$$[S] = R T R^{-1} S T \Rightarrow [S] = [T_e^-][S][T_e^+]$$

در رابطه های مقابل را می توانیم به صورت همگی
 نیز (مقاومت) شکل مالا (ص 28) بدست آوریم.
 بدین صورت که ابتدا کرنش های off را به on (شکل می دهیم) و
 سپس با کمک ماتریس $[S]$ آن را به کرنش های on تبدیل می کنیم. سپس کرنش های on را در f off بزرگ داریم (T_e^-) .

زادری داخل ماتریس دوران

نکته: ماتریس های $[T_e]$ و $[T_e^-]$ دکلایه ماتریس دوران را اگر به توان عددی برسانیم، مانند این است که آن عدد را بهشت θ فرکانس اثبات آن نیز واضح است زیرا توان در کیفیت نمی فرستد و فرکانس چند ماتریس دوران در هم مشابه این است که یکبار زیاد را جمع کرد و داخل یک ماتریس

قرار دهیم. همچنین توان منفی برابر این است از ماتریس ها به سزای همان معکوس ماتریس است:

یعنی θ ساعتگرد می چرخد پلوس ساعتگرد

$$[T_e]^{-1} = [T_e^-] \quad [T_e^-]^{-1} = [T_e] \quad T^2 = T(2\theta), \quad T^n = T(n\theta)$$

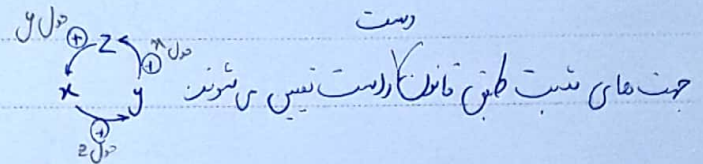
نقدی دیگر آن که در میان ماتریس های دوران برابر 1 است: $|T_e| = 1$ و $|T_e^-| = 1$

ما در این درس گامیزیت را شامل صفحات گوناگون در نظر گرفتیم و هر صفحه را به دلیل اهمیت کم آن به صورت تفسیر نمودیم که در این
 Subject بسیار مناسب می باشد اما مجموع این صفحات که یک تخته کاغذی را در دست می کنند می تواند هر چه تفسیر را داشته باشد.
 Date تفسیر را می توان با تفسیر صفحه ای تحلیل کرد (اگر به دنبال باب (دین) هستیم)
 تفسیر را می توان با تفسیر صفحه ای تحلیل کرد (اگر به دنبال باب (دین) هستیم)

نکته: در صفحات قبل ماتریس دوران در صفحه را ترتیب ده گنگ آن Q, S, T, T_c را بدست آوردیم.

اما در صفحات ۳ بعدی نیز می توان ماتریس دوران را ترتیب کرد. برای این امر کافیست هر دو دانی در فضای ۳ بعدی را در واقع ترتیب از

دوران های معمولی در صفحات xy, yz, xz با به عبارت دیگر ماتریس دوران با ضرب ۳ ماتریس دوران R_x, R_y, R_z دانست.



$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

همانطور که در دوران ۲ بعدی به یاد داشتیم:

$$R_\alpha = R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & n \\ 0 & -n & m \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m = \cos \alpha \\ n = \sin \alpha \end{matrix}$$

هر دو دانی در فضای ۳ بعدی می توان در واقع ترتیب از دوران (α) و (β) دانست:

⊗ علت آنکه $(-n)$ گذاشتیم برین گردد به تندی بالا. یعنی جهت مایل دست

راست و جهت ماتریس دوران معمولی داریم: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

اما همانگونه که می دانیم در ماتریس ستونی (بردار مکان ۳ بعدی) ترتیب zyx

برعکس حالت بالا می باشد یعنی: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ به همین علت برای روابط ترتیب

به جای $n, -n$ می گذاریم. حال می توانیم ماتریس دوران (α, β, γ) را اینگونه بنویسیم:

$$R = R_\alpha R_\beta R_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⊗ مثال: دوران ۳ بعدی حول محور z : $\sigma' = A \sigma A^T = R \sigma R^T$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_2 & \sigma'_3 \\ \sigma'_4 & \sigma'_5 & \sigma'_6 \\ \sigma'_7 & \sigma'_8 & \sigma'_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ -n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \\ \sigma_7 & \sigma_8 & \sigma_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \\ \sigma'_7 \\ \sigma'_8 \\ \sigma'_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \\ \sigma_9 \end{bmatrix}$$

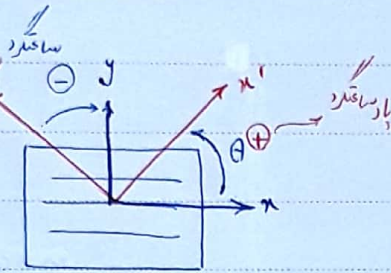
FPF: روش است که در آن تحلیل تنش بر اساس گسست اولین لایه می باشد و شکست اولین لایه نیز در اثر شکست ابعاد آن صورت می گیرد. البته لازم به ذکر است که پیش از شکست اولین لایه، لایه های بعدی

ممکن است بتوانند نیروها را تحمل کنند و در صورتی که شکست اولین لایه منجر به شکست سازه می شود.

در پروژه پایانی این درس از این روش استفاده می کنیم.

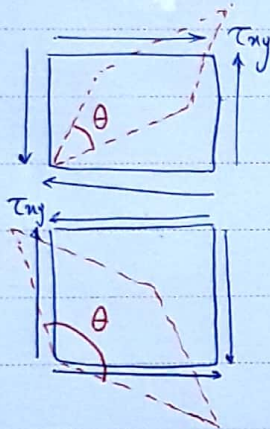
جلد ۱۱

اهمیت علامت در کامپوزیت:



① در تبدیلات تنش در تنش:

② علامت تنش در تنش:



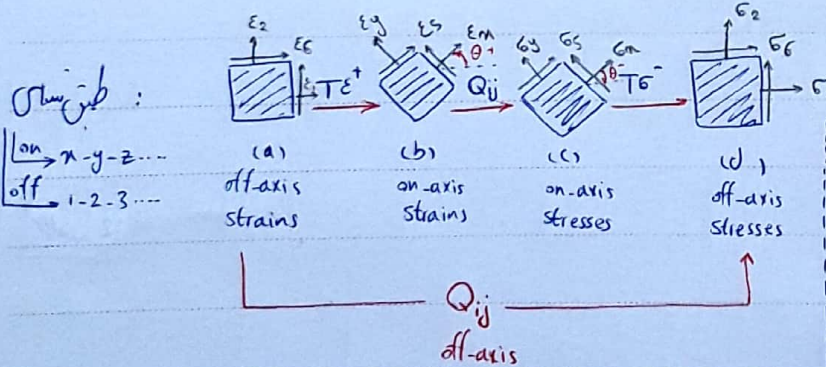
اگر زاویه حفظ کوچکتر شود، علامت تنش در تنش $\oplus$ است. $\tau_{xy} > 0$ و $\gamma_{xy} > 0$

در دایره در برعکس است. $\tau_{xy} < 0$ و $\gamma_{xy} < 0$

$\tau_{xy} = G_{xy} \cdot \gamma_{xy}$

پار ساختار $\ominus$ ساختار $\oplus$

Chapter 3: off-axis stiffness of Unidirectional Composites



$$\begin{cases} \sigma_x = Q_{xx} \epsilon_x + Q_{xy} \epsilon_y \\ \sigma_y = Q_{yx} \epsilon_x + Q_{yy} \epsilon_y \\ \sigma_s = Q_{ss} \epsilon_s \end{cases} \quad (2)$$

با جایگزینی روابط ① در ③:

$$\sigma_x = Q_{xx} (m^2 \epsilon_1 + n^2 \epsilon_2 + mn \epsilon_s) + Q_{xy} (n^2 \epsilon_1 + m^2 \epsilon_2 - mn \epsilon_s)$$

$$\sigma_y = \dots$$

$$\sigma_s = \dots$$

$$\begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{cases} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (1) \rightarrow \text{معادله 3}$$

درمان یکدست تنش: ل-ر

$$\sigma_1 = m^2 \sigma_x + n^2 \sigma_y - 2mn \sigma_s$$

$$\sigma_2 = \dots$$

$$\sigma_s = \dots$$

با جایگزینی روابط فوق (روابط ۱) مربوط به کدهای ماس در روابط ردیور داریم:

می بیند

در تنش‌های σ_1 و σ_2 در راستای on بر مبنای 4 مؤلفه کار داریم پس بعد از دوران به 6 مؤلفه نیاز داریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = Q_{11}\epsilon_1 + Q_{12}\epsilon_2 + Q_{16}\epsilon_6 \\ \sigma_2 = Q_{21}\epsilon_1 + Q_{22}\epsilon_2 + Q_{26}\epsilon_6 \\ \sigma_6 = Q_{61}\epsilon_1 + Q_{62}\epsilon_2 + Q_{66}\epsilon_6 \end{cases}$$

$Q_{11}, Q_{12}, Q_{16}, Q_{22}, Q_{26}, Q_{66} = ?$

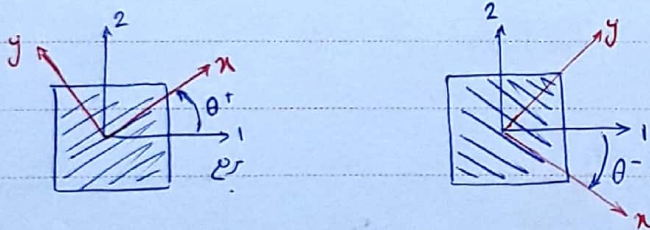
$m = \cos\theta, n = \sin\theta$

	Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xy}	Q_{ss}		S_{xx}	S_{yy}	S_{xy}	S_{ss}
Q_{11}	m^4	n^4	$2m^2n^2$	$4m^2n^2$	S_{11}	m^4	n^4	$2m^2n^2$	m^2n^2
Q_{22}	n^4	m^4	$2m^2n^2$	$4m^2n^2$	S_{22}	n^4	m^4	$2m^2n^2$	m^2n^2
Q_{12}	m^2n^2	m^2n^2	m^4+n^4	$-4m^2n^2$	S_{12}	m^2n^2	m^2n^2	m^4+n^4	$-m^2n^2$
Q_{66}	m^2n^2	m^2n^2	$-2m^2n^2$	$(m^2-n^2)^2$	S_{66}	$4m^2n^2$	$4m^2n^2$	$-8m^2n^2$	$(m^2-n^2)^2$
Q_{16}	m^3n	$-mn^3$	mn^3-m^3n	$2(mn^3-m^3n)$	S_{16}	$2m^3n$	$-2mn^3$	$2(mn^3-m^3n)$	mn^3-m^3n
Q_{26}	mn^3	$-m^3n$	m^3n-mn^3	$2(m^3n-mn^3)$	S_{26}	$2mn^3$	$-2m^3n$	$2(m^3n-mn^3)$	m^3n-mn^3

69 - Tsai

91 - Tsai

* توجه داریم در سطح اول رابطی بین مؤلفه‌های ماتریس تنش در محورهای on (on-axis) هستند و مؤلفه‌های Q_{16} یا Q_{26} می‌نمایند. لذا این ماتریس فقط بیان تبدیل مؤلفه‌های on ماتریس تنش به مؤلفه‌های off به کار می‌رود و علامت زاویه θ مطابق شکل زیر استاندارد شود.



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}^{-1}$$

off-axis compliance

مؤلفہاں مائریس ہاں صں جل راں نول بہ گت (الکھا دودا) جٹلتاں بہ صورت زیر خلاصہ کرد :

$$m^4 = \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) \quad m^3 n = \frac{1}{8} (2 \sin 2\theta + \sin 4\theta) \quad m^2 n^2 = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\theta)$$

$$mn^3 = \frac{1}{8} (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) \quad n^4 = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta)$$

بعضین بہ طور قرار داس عبارت زیر را تبدیل کنیم :

$$U_1 = \frac{1}{8} (3Q_{xx} + 3Q_{yy} + 2Q_{xy} + 4Q_{ss})$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (Q_{xx} - Q_{yy}) \quad U_3 = \frac{1}{8} (Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{xy} - 4Q_{ss})$$

$$U_5 = \frac{1}{2} (U_1 - U_4)$$

$$U_4 = \frac{1}{8} (Q_{xx} + Q_{yy} + 6Q_{xy} - 4Q_{ss})$$

$$U_5 = \frac{1}{8} (Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{xy} + 4Q_{ss})$$

$$U_5 - U_4 = Q_{ss} - Q_{xy}$$

رابطہ مائریس U ہاں درجہ 56

$$U_1 = \frac{1}{8} (3S_{xx} + 3S_{yy} + 2S_{xy} + S_{ss})$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (S_{xx} - S_{yy}) \quad U_3 = \frac{1}{8} (S_{xx} + S_{yy} - 2S_{xy} - S_{ss})$$

$$U_5 = 2(U_1 - U_4)$$

$$U_4 = \frac{1}{8} (S_{xx} + S_{yy} + 6S_{xy} - S_{ss})$$

$$U_5 = \frac{1}{2} (S_{xx} + S_{yy} - 2S_{xy} + S_{ss})$$

74 - Tsai				92 - Tsai			
	1	U_2	U_3		1	U_2	U_3
Q_{11}	U_1	$\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$	S_{11}	U_1	$\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
Q_{22}	U_1	$-\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$	S_{22}	U_1	$-\cos 2\theta$	$\cos 4\theta$
Q_{12}	U_4	0	$-\cos 4\theta$	S_{12}	U_4	0	$-\cos 4\theta$
Q_{66}	U_5	0	$-\cos 4\theta$	S_{66}	U_5	0	$-4 \cos 4\theta$
Q_{16}	0	$\frac{1}{2} \sin 2\theta$	$\sin 4\theta$	S_{16}	0	$\sin 2\theta$	$2 \sin 4\theta$
Q_{26}	0	$\frac{1}{2} \sin 2\theta$	$-\sin 4\theta$	S_{26}	0	$\sin 2\theta$	$-2 \sin 4\theta$

توابع توانی
power functionsتوابع زوایایی دوگانه (20 و 40)
multiple-angle functions

⑧ مزیت های نوشتن ماتریس تبدیل S و Q به فرم صیقل نسبت به فرم صی 36:

1- در این فرم ماتریس به صورت $[6 \times 3]$ (18 دانه) است درحالیکه در فرم قبلی به صورت $[6 \times 4]$ (24 دانه) بود پس در فرم جدید تعداد دانه ها و در نتیجه تعداد حسابات و عملیات کمتر شده است.

2- در فرم جدید 4 دانه صی منفی و 4 دانه صی مثبت (V_1, V_4, V_5, V_6) داریم درحالیکه در فرم قبلی هر 24 دانه منفی بودند پس در فرم جدید از 18 دانه فقط 10 دانه منفی هستند و باقی 8 فقط این 10 دانه تغییر می کنند پس حسابات سریع تر و راحت تر انجام می گیرد.

3- در فرم جدید تنها با صی $\sin$ و $\cos$ زوایایی 20 و 40 به سادگی می توان دانه های ماتریس را بدست آورد درحالیکه در فرم قبلی باید مرتباً از به تان رساندن توابع مثلثاتی استفاده می کردیم پس حسابات ساده تر شده اند.

4- گرفتن مشتق و انتگرال از زوایایی بیگانه به مراتب راحت تر از توابع توانی است.

تغییرات θ تغییر می کنند

اگر روابط V را برای S ها و Q های off از نو پس کنیم متوجه می شویم که (V_1, V_4, V_5, V_6) و (V_2, V_3) متغیر می باشند.

برای بررسی off

$$\vec{V}'_1 = \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) = \frac{1}{8} (6V_1 + 2V_4 + 4V_5) = \frac{1}{8} (8V_1) = V_1$$

$$\vec{V}'_4 = V_4 \quad \vec{V}'_5 = V_5 \quad \vec{V}'_1 = V_1 \quad \vec{V}'_4 = V_4 \quad \vec{V}'_5 = V_5 \quad \vec{V}'_1 = V_1$$

به همین ترتیب:

$$\vec{V}'_2 = V_2 \cos 2\theta \quad \vec{V}'_3 = V_3 \cos 4\theta$$

$$\vec{V}'_2 = V_2 \cos 2\theta \quad \vec{V}'_3 = V_3 \cos 4\theta$$

همچنین تغییرات V ها از روابط بود می کنند:

پس نتیجه می گیریم که در کامپوزیت های یک جهت قی بعد از دوران θ به مقدار θ ، روابط (V_1, V_4, V_5, V_6) و (V_2, V_3) متغیر می شوند و S های off هم برقرار است (ثابت هستند) و همچنین روابط جدید (off) (V'_2, V'_3) را می توان به کمک روابط بالا بدست آورد.

$\sigma_{on} = [Q]_{on} \epsilon_{on}$


$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

normal coupling

shear coupling

$$\sigma_{off} = [Q]_{off} \varepsilon_{off}$$

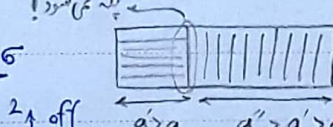
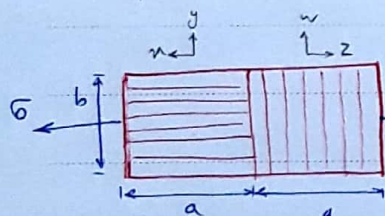
200

- 1- مؤلفه‌های ماتریس سختی در مؤلفه‌های $off-axis$ بر خلاف $on-axis$ به جایی $\leq$ مؤلفه‌های $on-axis$ دارند و مؤلفه‌های $on-axis$ هستند.
- 2- مؤلفه‌های ماتریس سختی با اندیس 61 و 62 مربوط به $shear coupling$ هستند که مؤلفه‌های بیش‌ترش را به مؤلفه‌های زوال کرنش برشی مرتبط می‌کنند.
- 3- مؤلفه‌های ماتریس سختی با اندیس 16 و 26 مربوط به $normal coupling$ هستند که مؤلفه‌های زوال تنش را به مؤلفه‌های بیش‌ترش کرنش برشی مرتبط می‌کنند.

4. مولدها را تبدیل متغیرها کنی از ریشه 4 هستند. به همین دلیل ریشه نویسی برای مشتق گیری و اشتغال گیری مشکل بوده. دمی توان از جدول بعدی

(ص 37) برای بارگی استفاده نوز: $\frac{\epsilon_y}{\epsilon_m} = \frac{E_m}{E_z} \Rightarrow \frac{\epsilon_y}{\epsilon_m} = \frac{E_m}{E_z} \Rightarrow \frac{\epsilon_y}{\epsilon_w} = \frac{E_m}{E_z} \cdot \frac{\epsilon_m}{\epsilon_w} = 1 \Rightarrow \epsilon_y = \epsilon_w$

عزیز! یک نمونه کامپیوتری از به هم چسبیدن دو (ایس) که جهت مطابق شکل زیر تهیه شده است.



در اثر بار اعمال شده شکل نهایی نمونه را بدست آورید.

$$\epsilon_{a''} = 13.94 \epsilon_{a'} \rightarrow \frac{175}{10.4}$$

جواب هفتم داد را با استفاده از سنج مدول زیر نشان دهید:

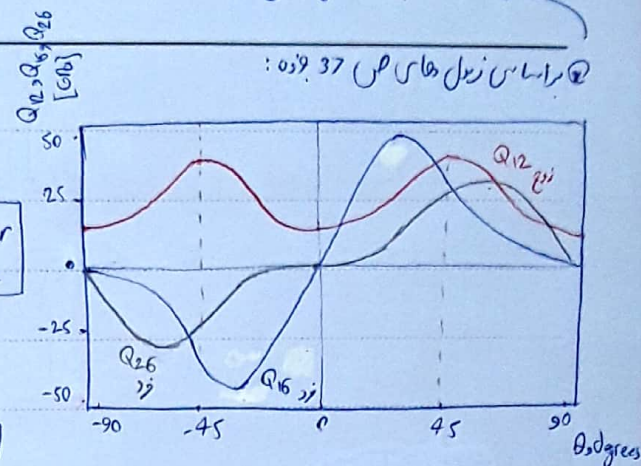
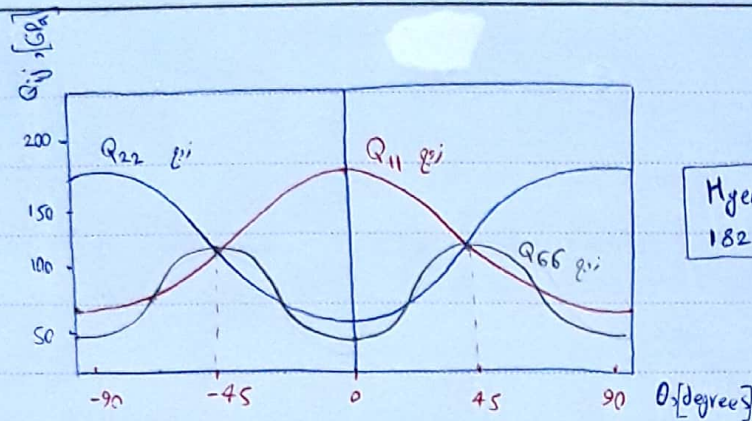
(*) در این سؤال اگر θ ها زاویه های غیر از 0° و 90° داشته باشند $r_2 = 0.28$

دیگر تغییر صفحات ها برابر نمی شود.

ص 45 مقدار u_2 و u_3 منفی شود $\times$
 u_4

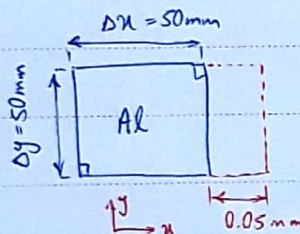
طرح جدول می 37 متغیر V و هپتین Q₁₁, Q₂₂, Q₁₂, Q_{6,6}, Q₁₆, Q₂₆ (متغیرهای مستند) هپتین Q₁₁, Q₂₂ و Q₁₂، Q_{6,6} برآع زرد، از هاستند.
هپتین Q₁₆ و Q₂₆ برآع زرد از هاستند و متغیران ها برآس هاستند، مثبت و برآس متغیر صقی، منفی خواهد بود.

از این تمیز نتیجه می گیریم که اگر تنش یکسان σ در جهت عمود یا موازی با محور یابی کامپوزیت تک جهته وارد شود، کرنش عرضی (منظر کرنش) است که در رئاسی بار اعمال شده ناپدید و در رئاسی وجه دیگر اندازه گیری شود. یکسان خواهد بود. صفحه 20 کامپوزیت



Q15: A 50x50 element of Al in fig 1.15 stretched 0.05 mm in the X-direction.

The Y-direction doesn't change and the right corner angles remain right. Find out the stress required to effect this deformation.



$$\epsilon_x = \frac{\Delta \Delta x}{\Delta x} = \frac{0.05}{50} = 1000 \mu\epsilon, \quad \epsilon_y = \frac{\Delta \Delta y}{\Delta y} = \frac{0}{50} = 0, \quad \gamma_{xy} = 0$$

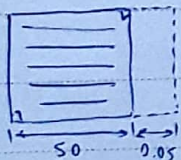
$$\text{Al} \begin{cases} E = 72 \text{ GPa} \\ \nu = 0.3 \end{cases} \quad t \ll a, b$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = Q_{11} \epsilon_x = \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_x = \frac{72 \times 10^9}{1-0.3^2} \times 1000 \times 10^{-6} = 79.6 \text{ MPa} \\ \sigma_y = Q_{22} \epsilon_x = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \epsilon_x = \frac{0.3 \times 72 \times 10^9}{1-0.3^2} \times 1000 \times 10^{-6} = 23.9 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 0 \end{cases}$$

$$\text{Al} \rightarrow 79.6 \text{ MPa}$$

b) Fiber aligned with the X-axis & stretched in the X-direction by 0.05 & no deformation in Y-direction.

Carbon/epoxy: $E_x = 155 \text{ GPa}$, $E_y = 12.1 \text{ GPa}$, $G_{xy} = 4.4 \text{ GPa}$, $\nu_{xy} = 0.248$



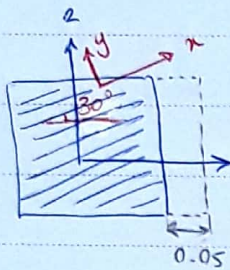
$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11} \epsilon_x = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}^2} \epsilon_x = 155.7 \text{ GPa} \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1-\nu_{xy}^2} \epsilon_x = 12.158 \text{ GPa} \\ \sigma_{xy} &= \frac{\nu_{xy} E_x}{1-\nu_{xy}^2} \epsilon_x = 3.021 \text{ GPa} \end{aligned}$$

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = Q_{11} \epsilon_x = 155.7 \text{ MPa} \\ \sigma_y = Q_{22} \epsilon_x = 3.02 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 0 \end{cases}$$

$$\text{Fiber} \rightarrow 155.7 \text{ MPa}$$

c) In case "b", fiber oriented at $+30^\circ$: $\sigma_{off} = Q_{off} \cdot \epsilon_{off}$ $\epsilon_1 = \frac{\Delta n}{\Delta n} = 1000/\mu\epsilon$



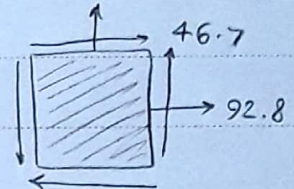
$$m = \cos \theta = \cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$n = \sin \theta = \sin(30) = \frac{1}{2}$$

$$Q_{11} = 92.8 \text{ GPa} \quad Q_{12} = 30.01 \text{ GPa} \quad Q_{22} = 21 \text{ GPa}$$

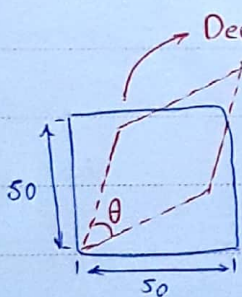
$$Q_{16} = 46.7 \text{ GPa} \quad Q_{26} = 15.5 \text{ GPa} \quad Q_{66} = 31.5 \text{ GPa}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = Q_{11} \epsilon_1 + Q_{12} \epsilon_2 + Q_{16} \epsilon_6 = 92.8 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = Q_{12} \epsilon_1 = 30.1 \text{ MPa} \\ \sigma_6 = Q_{16} \epsilon_1 = 46.7 \text{ MPa} \end{cases}$$



d) in case "b", fiber oriented at -30° :

مانند مثال قبل (c) است با این تفاوت که در روابط $\theta = -30^\circ$ می‌گذاریم.



Decrease in right angle

a) Al

b) carbon/epoxy, $\theta = 0$

c) $\theta = +30$

d) $\theta = -30$

تقریباً: مقدار تنش در حالت را بر روی اینکه برش خالص داشته باشیم بدست آورید.

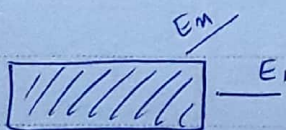
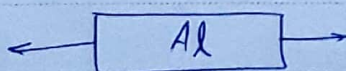
$$\gamma_{xy} = 1000 \times 10^{-6} \text{ (rad)}$$

نظیر زاویه الیاف است نه زاویه تغییر شکل

$$1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

سؤال: یک قطعه از Al ($E = 70 \text{ GPa}$) با هم. اگر با ایسات کربن ($E = 180 \text{ GPa}$) جایگزین شود، این ایسات باید چه زاویه ای داشته باشند؟

جوابه 13



کاربرد off-axis engineering constants

* off-axis Engineering constants :

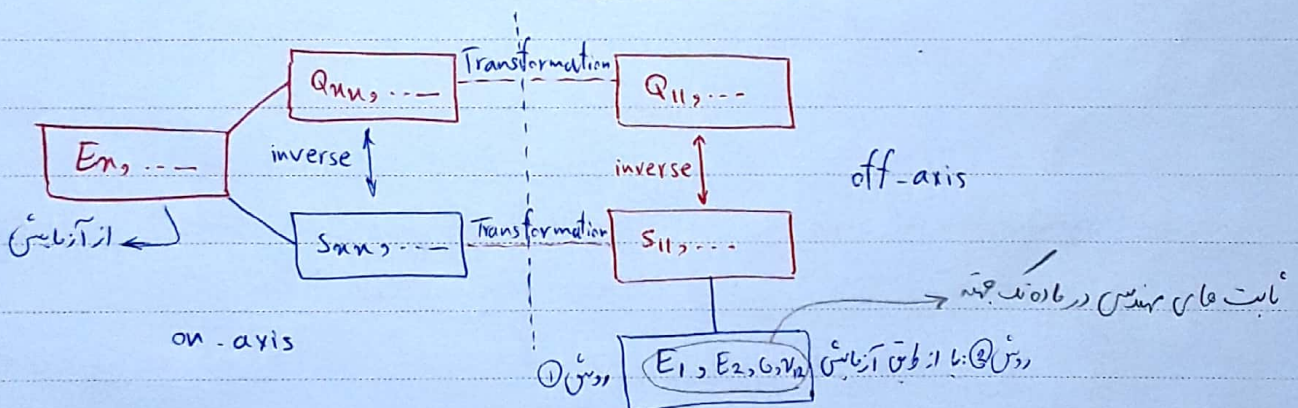
در مباحث قبلی برای مدار تک جهت ارتوتروپیک از طریق آزمایش، ثابت‌های هندسی در کدرهای مادر (on) بدست آمدند و از طریق

روابط تنش کرنش تحلیل تنش انجام می‌گیرد. در موردی که قطعه مورد نظر در کدرهای off باشد از طریق دوران مؤلفه‌های ماتریس تنش کرنش

رابطه‌های تنش کرنش در کدرهای off تعریف می‌شوند.

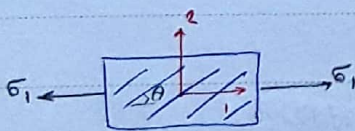
برای مقایسه ~~خواص مکانیکی~~ خواص مکانیکی مورد نیاز با مدار همسانگرد تنش از قبل (ابعاد فلزات، ثابت‌های هندسی برای کدرهای off

نیاز تعریف می‌شوند که خواص مقایسه‌ای هندسی ساده و ارزش‌های بسیاری ندارد.



* بدست آوردن ثابت‌های هندسی off-axis از طریق آزمایش :

①- Uniaxial Tension Test along the 1-axis : $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}$ (از طریق کرنش سنج)



$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\text{از طریق} \begin{cases} \epsilon_1 = S_{11} \cdot \sigma_1 \\ \epsilon_2 = S_{21} \cdot \sigma_1 \\ \epsilon_3 = S_{31} \cdot \sigma_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{1}{S_{11}}$$

من بد

* توجه داریم که ν_{61} در مدار ارتزودیک (نکات) و در مدار ارتزودیک وجود ندارد و برخلاف ضریب پواسن ν_{21} که با ν_{61} در یک راستا است.

با علامت $\oplus$ مثبت که ظاهر می شود نه $\ominus$ (به علت آنکه کرنش برشی را به کرنش طولی تبدیل می کند و نیاز به علامت $\ominus$ نیست)

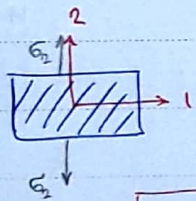
$$\nu_{21} = \ominus \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad \text{longitudinal's Poisson's Ratio} \quad (2)$$

Major Poisson's Ratio

$$\nu_{61} = \frac{\epsilon_6}{\epsilon_1} \quad \text{Shear coupling coefficient}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \nu_{21} = -\frac{S_{21}}{S_{11}}, \quad \nu_{61} = \frac{S_{61}}{S_{11}}, \quad \begin{cases} S_{12} = S_{21} = -\nu_{21} S_{11} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \\ S_{61} = \nu_{61} S_{11} = \frac{\nu_{61}}{E_1} \end{cases}$$

② - Uniaxial Tension along the 2-axis:



$$\sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_1 = \sigma_6 = 0$$

$$\begin{cases} \epsilon_2 = S_{22} \cdot \sigma_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \\ \epsilon_1 = S_{12} \cdot \sigma_2 \\ \epsilon_6 = S_{62} \cdot \sigma_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{1}{S_{22}}$$

$$\nu_{12} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}$$

Transverse Poisson's Ratio
Minor " "

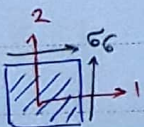
$$\nu_{62} = \frac{\epsilon_6}{\epsilon_2} = \frac{S_{62}}{S_{22}}$$

shear coupling coefficient

$$S_{12} = -\nu_{12} S_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}$$

$$S_{62} = \nu_{62} S_{22} = \frac{\nu_{62}}{E_2}$$

③ - Pure shear test along the 1-2 axis:



$$\sigma_6 \neq 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$$\begin{cases} \epsilon_6 = S_{66} \cdot \sigma_6 \\ \epsilon_1 = S_{16} \cdot \sigma_6 \\ \epsilon_2 = S_{26} \cdot \sigma_6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_6 = \frac{1}{S_{66}}$$

$$\begin{cases} \nu_{16} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_6} = \frac{S_{16}}{S_{66}} \\ \nu_{26} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_6} = \frac{S_{26}}{S_{66}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{16} = \nu_{16} S_{66} = \frac{\nu_{16}}{E_6} \\ S_{26} = \nu_{26} S_{66} = \frac{\nu_{26}}{E_6} \end{cases}$$

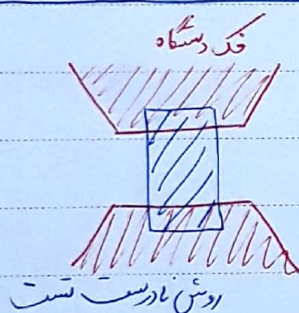
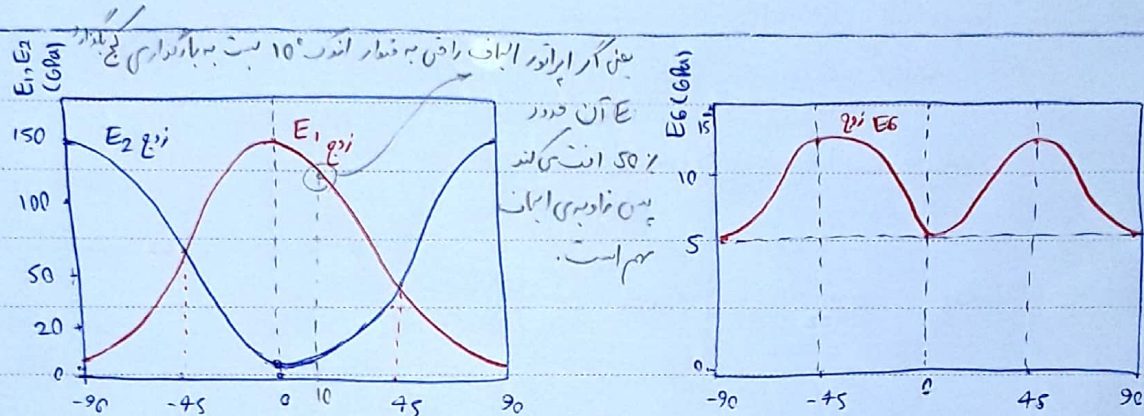
در ارتش برشی تغییر طول می دهد
(در مولات اینگونه نیست)

صی بند

	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_6
ϵ_1	$\frac{1}{E_1} S_{11}$	$-\frac{\nu_{12}}{E_2} S_{12}$	$\frac{\nu_{16}}{E_6} S_{16}$
ϵ_2	$-\frac{\nu_{21}}{E_1} S_{21}$	$\frac{1}{E_2} S_{22}$	$\frac{\nu_{26}}{E_6} S_{26}$
ϵ_6	$\frac{\nu_{61}}{E_1} S_{61}$	$\frac{\nu_{62}}{E_2} S_{62}$	$\frac{1}{E_6} S_{66}$

به دست ماتریس :

البته این 3 آزمایش در واقعیت انجام نمی‌گیرد و فقط به دلیل تکرار آن در این درس ذکر شد. در اصل (واقعیت) از Transformation ماتریس on-axis استفاده می‌کنیم.



روش نادرست تست

چرا که قطعه می‌خواهد به نرمی و پس با آن راه را بگیریم.

یا ایجاب شکست می‌شوند (گت کشش)
یا ایجاب Buckle می‌کند (گت فشار)
یا در راستای عرض برش خوردگی می‌شوند (کشش)
(فشار)

مدهای failure (ص 84 تا 82)

fail کردن کامپوزیت‌ها

شکل فک دستگاه باید حالت خاصی باشد و واضح
حالت درست فک دستگاه در این تست باید به صورت آریب باشد تا مانع تغییر شکل برش نشود تا قطعه خواب نشود.

نمونه شکل ایمن متقابل پس از اعمال بار هم

$\theta = 45^\circ$

$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & U_2 & U_3 \\ S_{11} & U_1 & 0 & -1 \\ S_{22} & U_1 & 0 & -1 \\ S_{12} & U_4 & 0 & 1 \\ S_{66} & U_5 & 0 & 4 \\ S_{16} & 0 & 1 & 0 \\ S_{26} & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} S_{11} = U_1 - U_3 \\ S_{22} = U_1 - U_3 \\ S_{12} = U_4 + U_3 \\ S_{66} = U_5 + 4U_4 \\ S_{16} = S_{26} = U_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = S_{11} \cdot \sigma \\ \epsilon_2 = S_{21} \cdot \sigma \\ \epsilon_6 = S_{61} \cdot \sigma \end{cases}$

صاف شد

26 طبقین : $S_{xx} = 5.525 \text{ (TPa)}^{-1}$ $S_{yy} = 97.087 \text{ (TPa)}^{-1}$ $S_{xy} = -1.547 \text{ (TPa)}^{-1}$

$S_{ss} = 139.470 \text{ (TPa)}^{-1}$ $U_1 = 55.526 \text{ (TPa)}^{-1}$ $U_2 = -45.781 \text{ (TPa)}^{-1}$

چون $S_{xx} < S_{yy}$

پس U_1 و U_2 را نیز منفی باشد (نصف کنگه ۳۰ در پایین من ۳۹)

$U_3 = -4.221 \text{ (TPa)}^{-1}$ $U_4 = -5.767 \text{ (TPa)}^{-1}$ $U_5 = 2(U_1 - U_4) = 122.586 \text{ (TPa)}^{-1}$

من قبل $\Rightarrow$

$$\begin{cases} S_{11} = 59.747 \text{ (TPa)}^{-1} \\ S_{12} = -9.988 \text{ (TPa)}^{-1} \\ S_{16} = -45.781 \text{ (TPa)}^{-1} \end{cases}$$

افزایش طول $\Rightarrow \epsilon_1 = S_{11} \cdot \sigma > 0$

کاهش طول $\Rightarrow \epsilon_2 = S_{12} \cdot \sigma < 0$

کاهش طول $\Rightarrow \epsilon_6 = S_{16} \cdot \sigma < 0$

اگر $\theta = -45^\circ$ باشد: آنگاه شکل نهایی به صورت می شود. S ها مانند حالت قبل است اما این تفاوت که $S_{16} = S_{26} = -U_2$ $\epsilon_6 > 0$

الف) $\theta = 45^\circ$

ب) $\theta = 45^\circ$

تیرین: شکل المان متقابل پس از اعمال بار τ

④ شکل نهایی را بر اساس مقدار τ و θ می توانیم بکشیم

$\Rightarrow S$ ها مانند حالت قبل $\Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{16} \tau \\ S_{26} \tau \\ S_{66} \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -45.781 \\ -45.781 \\ 99.518 \end{Bmatrix} \text{ (TPa)}^{-1} \cdot \tau$

نتیجه گیری $\Rightarrow$

if $\tau > 0 \Rightarrow$

- $\epsilon_1 < 0$ کاهش طول در دو راستا در برابر
- $\epsilon_2 < 0$ کاهش طول در دو راستا در برابر
- $\epsilon_6 > 0$ افزایش طول در دو راستا در برابر

if $\tau < 0 \Rightarrow$

- $\epsilon_1 > 0$ افزایش طول در دو راستا در برابر
- $\epsilon_2 > 0$ افزایش طول در دو راستا در برابر
- $\epsilon_6 < 0$ کاهش طول در دو راستا در برابر

⑤ نتیجه گیری مهم: اگر θ و τ هم علامت باشند، المان در دو راستا کاهش طول می دهد و اگر مختلف علامت باشند در دو راستا افزایش طول می دهد

تیرین: مایه به نکته من تیرین قبل، میله کامپوزیتی رو به چه شکل در می آید؟

$\theta = -45^\circ$

ماده در سمت راست اوله τ و θ مثبت در سمت چپ مختلف علامت $(\tau$ مثبت و θ منفی) از

نکته: مالا می توان نتیجه گرفت که میله به صورت متقابل در می آید: در جنبه سمت راست هم طول آن و هم ضخامت آن بزرگتر شده و سمت چپ بلندتر شده.

Example 1: Filament cylindrical pressur vessel

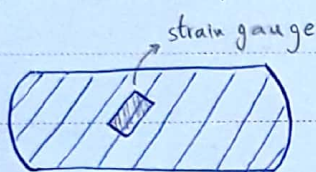
Material: Glass/Epoxy

$$\theta = 53.1^\circ, d = 1\text{ m}, t = 20\text{ mm}$$

$$E_x = 40\text{ GPa}, E_y = 10\text{ GPa}, E_s = 3.5\text{ GPa}, \nu_{xy} = 0.25$$

By strain gauge along fiber direction: $\epsilon_x = 0.001$

determine the inner pressure of the vessel



$$\begin{aligned} \uparrow 2 \sigma_\theta &= \frac{Pr}{t} \\ \rightarrow \sigma_t &= \frac{Pr}{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Pr}{2t} \\ \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.64 & 0.96 \\ 0.64 & 0.36 & -0.96 \\ -0.48 & 0.48 & -0.28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Pr}{2t} \\ \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x = 0.36 \frac{Pr}{2t} + 0.64 \frac{Pr}{t} \\ \sigma_y = 0.64 \frac{Pr}{2t} + 0.36 \frac{Pr}{t} \\ \sigma_s = -0.48 \frac{Pr}{2t} + 0.48 \frac{Pr}{t} \end{Bmatrix}$$

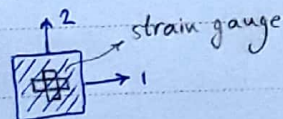
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \quad \epsilon_x = S_{xx} \sigma_x + S_{xy} \sigma_y + S_{xs} \sigma_s$$

$$\Rightarrow 0.001 = \left(\frac{1}{40} \right) \left(0.82 P \times \left(\frac{500}{20} \right) \right) - \left(\frac{0.25}{40} \right) \left(0.68 \times \frac{500}{20} \right) \rightarrow 0.40625 P = 0.001$$

$$\Rightarrow S_{xx} = \frac{1}{E_x} \quad S_{xy} = \frac{-\nu_{xy}}{E_x}$$

$$\Rightarrow P = 2.462 \text{ E-3 GPa} = 2.462 \text{ MPa}$$

Example 2:



$$\theta = 45^\circ, \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_6 = 0$$

$$\epsilon_1 = \sqrt{\quad} \quad \epsilon_2 = \sqrt{\quad}$$

$$m = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on-axis (P)

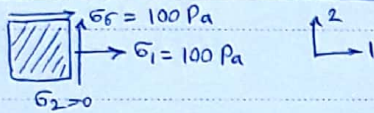
هدف: بدست آوردن $G_{xy} = E_s$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_6 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x = \frac{1}{2} \sigma_1 \\ \sigma_y = \frac{1}{2} \sigma_1 \\ \sigma_s = -\frac{1}{2} \sigma_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_6) \\ 0.5(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_6) \\ \epsilon_2 - \epsilon_1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \rightarrow -\frac{1}{2} \sigma_1 = E_s (\epsilon_2 - \epsilon_1) \rightarrow E_s = \frac{0.5 \sigma_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \checkmark$$

Example 3:



هدف: زاویه θ را طوری تعیین کنید که تنش‌های σ_x و σ_y در راستای θ و عمود بر آن یکدیگر برابر شوند.

if $\sigma_x = \sigma_y \rightarrow \theta = ?$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = [T\sigma] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_x = \sigma_y \Rightarrow m^2 \sigma_1 + 2mn \sigma_6 = n^2 \sigma_1 - 2mn \sigma_6 \Rightarrow (m^2 - n^2 + 4mn) \sigma_6 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (4 \sin \theta \cos \theta) = 0 \Rightarrow \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = -0.5 \Rightarrow \theta = -13.28^\circ$$

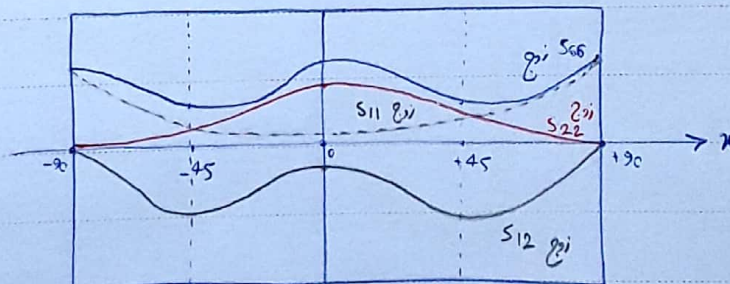
نتیجه: در حالتی که $\sigma_x = \sigma_y$ باشد، θ را می‌تواند برابر...

جلسه 14

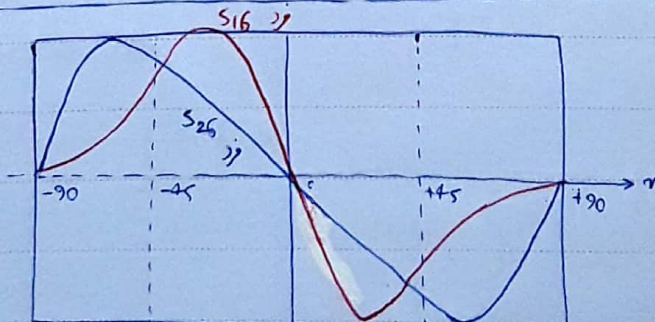
مثبت

$$\begin{cases} 0 < S_{11} \\ 0 < S_{22} \\ 0 < S_{66} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta > 0 \\ \theta < 0 \end{cases}$$

منفی $0 > S_{12} \Rightarrow \theta < 0, \theta > 0$ برای



$$\begin{cases} S_{16} = \frac{\nu_{16}}{E_6} \\ \nu_{16} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_6} \end{cases}$$



A diagram of a rectangular element in the x - y plane. The element has a width Δx and a height Δy . A vertical stress $\Delta \sigma$ is indicated by a red arrow pointing upwards from the bottom edge of the element.

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

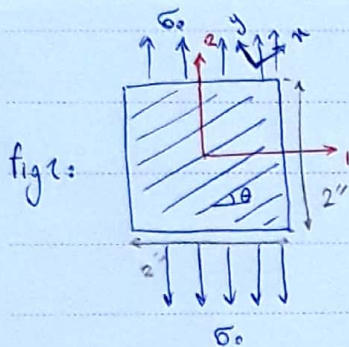
$$\epsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta y} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_s = arb \quad a = \tan a \approx \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$b = \tan b \approx \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\sigma_0 = 50 \text{ ksi}$ & material properties of $\begin{cases} E_x = 25 \times 10^6 \text{ psi} \\ E_y = 1 \times 10^6 \text{ psi} \\ G_{xy} = E_s = 0.5 \times 10^6 \text{ psi} \\ \nu_{yx} = 0.25 \end{cases}$ Find the displacement field?



ابتدا لاها را حساب می‌کنیم. بعد از دوران ماتریس Y ، ماتریس زیر در محورها off را بدست می‌آوریم. سپس از طریق رابطه Y - off ، مؤلفه‌های کرنش بدست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = S_{12} \cdot \sigma = -2.75 \times 10^{-7} \\ \varepsilon_2 = S_{22} \cdot \sigma = 7.75 \times 10^{-7} \\ \varepsilon_6 = S_{62} \cdot \sigma = -4.8 \times 10^{-7} \end{cases}$$

$\sigma_x = 50 \text{ ksi} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = -0.01225 \text{ in/in} = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow u = -0.01225x + f(y) \\ \epsilon_2 = 0.03775 \text{ in/in} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow v = 0.03775y + g(x) \\ \epsilon_r = -0.024 \text{ rad} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f'(y) + g'(x) = -0.024 \end{cases}$

$\vec{v} = 0$
درایم بنویسیم
 $\vec{v}_{net}$

فرض کنیم
 $f_{xy} = c_1 + c_2 y \rightarrow f'_{xy} = c_2$
 $g_{xm} = c_3 + c_4 x \rightarrow g'_{xm} = c_4$

$\Rightarrow c_2 + c_4 = -0.027$

یعنی جابجایی همدی با درازانی بدون برش

اگر برش داشته باشیم $\theta \neq \theta'$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow c_2 = c_4$

$\Rightarrow U = -0.01225x + c_1 + c_2 y$
 $V = 0.03725y + c_3 + c_4 x$

$$\Rightarrow \begin{cases} U = -0.01225x + c_1 + c_2y \\ V = 0.03725y + c_3 + c_4x \end{cases}$$

اگر کرنش برشی داشته باشیم $\theta \neq \theta'$

المان

فرقی در دوران $\theta' = \theta''$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow c_2 = c_4 = -0.012$

چون با همی ندارد

$$\leadsto x=y=0 \Rightarrow U=V=0 \Rightarrow c_1=c_3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = -0.01225x - 0.012y \\ v = 0.03725y - 0.012x \end{cases}$$

در FEM نیز تغییرات جابجایی کار داریم

۴) به خود با ایمانی چون کمرش با تدبیرات با ایمانی

مربوط است نه حرفاً خود جای می. $\epsilon_n = \frac{\partial u}{\partial n}$

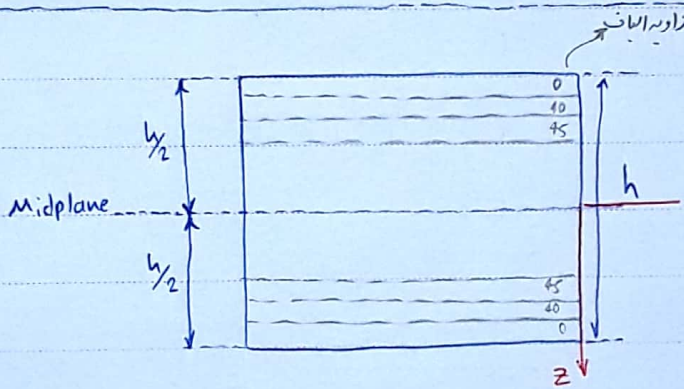
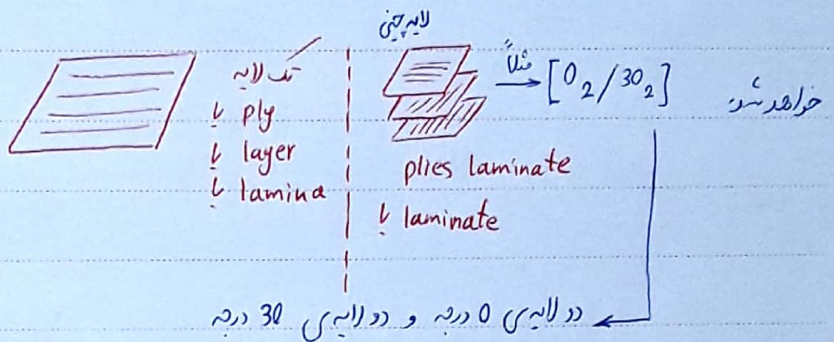
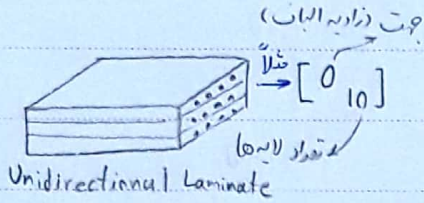
علامت تغییرات

* در حالت mat باید طول الیاف بزرگتر از طول گران باشد. اگر کمتر باشد هیچ خاصیت مدیست کننده ندارد و بالکس به دلیل کمزورتش سازه را تضعیف می کند.

Tsai - Chapter 4 : In-plane stiffness of symmetric laminates

← بارگذاری غیر out-plane است چون تنش آن تابع 0 نمی است.

* در این فصل سفتی laminate های متقارن با الیه های مختلف و جهت تقارن الیاف بررسی خواهد شد.



حالت 15

Laminate Code: $[0_3/90_2/45/-45_3]_S$ → تعداد الیه $2(3+2+1+3) = 18$ → Symmetric (متقارن)

→ Midplane (یعنی نسبت به این الیه تقارن دارند) $[0/60/45/60/0]_S$ → یعنی این الیه را یکبار حساب می کنیم

$[0/45/-45/45/0]_T$ → Total الیه 5

$[0/90/45]_T$ → الیه 3

کربن کولر سیریش

Gl Ke Ca

Hybrid Laminate: $[0/90/45]$ ← الیاف تقارن

In-plane stress/strain relationship for laminates:

$$Q_{ij}(z) = Q_{ij}(-z) \quad i, j = 1, 2, 6$$

assumptions:

1- The Laminate is symmetric

جنس لایه ها در z و $-z$ برابرست
یعنی θ در z و $-z$ با هم برابرست

$$[\theta(z) = \theta(-z)]$$

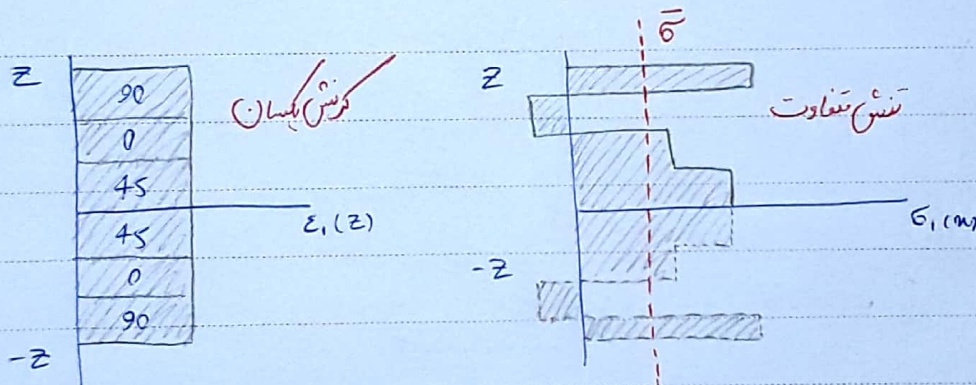
$$\theta(z) = \theta(-z)$$

2- Strain in the thickness of the laminate is constant

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1(z) = \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2(z) = \epsilon_2^0 \\ \epsilon_6(z) = \epsilon_6^0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{کشش در همه لایه ها} \\ \text{یعنی تنش ها در دو بدو (طی عرض) به هم وابسته هستند و به یک اندازه هستند.} \end{array}$$

توجه شود که این فرض نامعین صاف است که ضخامت Laminate نسبت به دو بدو دیگر به حد کافی کوچک باشد.

اما تنش در راستای قنات Laminate ثابت نموده مقدار آن از طریق ماتریس سختی هر لایه بدست می آید.



حال سؤال این است که رابطه تنش کرنش را چگونه بنویسیم؟
 $\bar{\sigma} = E(\epsilon)$

قنات laminate

در این رابطه از $\bar{\sigma}$ (تنش متوسط) استفاده می کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz \\ \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz \\ \bar{\sigma}_6 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 dz \end{array} \right.$$

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} \epsilon_1 + Q_{12} \epsilon_2 + Q_{16} \epsilon_6) dz$$

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \left[\int_{\text{لایه اول}} + \int_{\text{لایه دوم}} + \dots \right] \quad \bar{\sigma}_2 = \dots \quad \bar{\sigma}_6 = \dots$$

$$(N.m^{-2}) Pa \xleftarrow{\text{داده}} Q_{ij}$$

$$(N.m^{-1}) Pa.m \xleftarrow{\text{وادر}} A_{ij}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \left[\int Q_{11} dz \cdot \hat{\epsilon}_1 + \int Q_{12} dz \cdot \hat{\epsilon}_2 + \int Q_{16} dz \cdot \hat{\epsilon}_6 \right] = \frac{1}{h} [A_{11} \hat{\epsilon}_1 + A_{12} \hat{\epsilon}_2 + A_{16} \hat{\epsilon}_6]$$

Equivalent Modulus (مستقل مدول)
! Extensional stiffness matrix

$$A_{11} = \int Q_{11} \cdot dz \quad A_{12} = \int Q_{12} \cdot dz$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{1}{h} [A_{21} \hat{\epsilon}_1 + A_{22} \hat{\epsilon}_2 + A_{26} \hat{\epsilon}_6]$$

$$A_{16} = \int Q_{16} \cdot dz \quad A_{22} = \int Q_{22} \cdot dz$$

$$\bar{\sigma}_6 = \frac{1}{h} [A_{61} \hat{\epsilon}_1 + A_{62} \hat{\epsilon}_2 + A_{66} \hat{\epsilon}_6]$$

stress Resultants: تنش حاصل داخلی

فهرست لیست

$$N_1 = \bar{\sigma}_1 \cdot h$$

دیس کا برقی چلاؤ پرو (فہرست)

$$N_2 = \bar{\sigma}_2 \cdot h$$

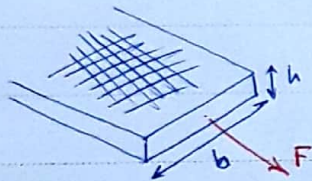
$$N_6 = \bar{\sigma}_6 \cdot h$$

$$N_1 = A_{11} \cdot \hat{\epsilon}_1 + A_{12} \cdot \hat{\epsilon}_2 + A_{16} \cdot \hat{\epsilon}_6$$

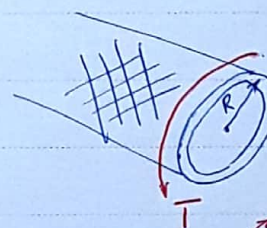
$$N_2 = A_{21} \cdot \hat{\epsilon}_1 + A_{22} \cdot \hat{\epsilon}_2 + A_{26} \cdot \hat{\epsilon}_6$$

$$N_6 = A_{61} \cdot \hat{\epsilon}_1 + A_{62} \cdot \hat{\epsilon}_2 + A_{66} \cdot \hat{\epsilon}_6$$

	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\epsilon}_6$
N_1	A_{11}	A_{12}	A_{16}
N_2	A_{21}	A_{22}	A_{26}
N_6	A_{61}	A_{62}	A_{66}

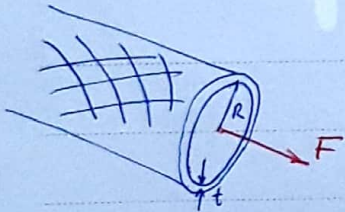


$$N_1 = \frac{F}{b} \quad N_2 = N_6 = 0$$



$$\tau = \frac{T}{2At}$$

$$N_6 = \frac{T}{2\pi R^2}$$



$$N_1 = \frac{F}{2\pi R}$$

کلا کامپوزیت ہا در راستی (عمود بر الیاف) تنش فشاری را بہتر از کشش تحمل
کی کنند یعنی (استقامت فشاری) ان ہا از (استقامت کشش) بیشتر است:

$$\gamma_c > \gamma_t$$

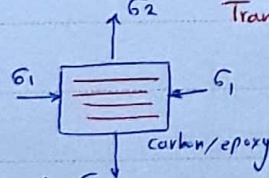
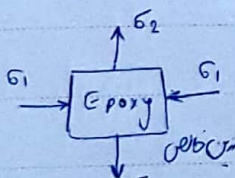
Tensile

بالا 53

Transverse Strength

Compressive

در راستی σ_2 ، (استقامت) ایمان سمت پ بہتر است



بہ علت آنکہ سمت پ برین خالص است انامست راستی الیاف ماضوہا یکی نہ ایجاد کردہ اند موجب غرکز تنش و تضعیف استقامت کامپوزیت

در آن جہت سی شوند مثلاً استقامت چپ برابر با 80 MPa و راست برابر با 40 MPa است. بہ علت غرکز تنش در حالت کشش عرضی، $\gamma_c > \gamma_t$ سی باشد

بالا 53

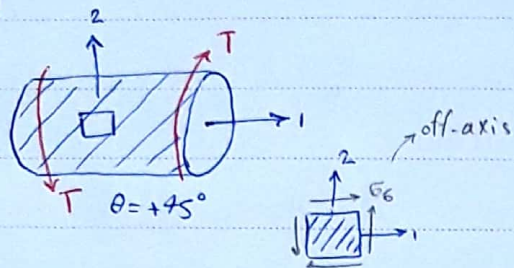
بالا 8

مثال

TA

هدف: طول استوانه چگونه تغییر می کند؟

(الف)



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

(روش 1)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ -\sigma_s \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_x/E_x & 0 \\ -\nu_y/E_y & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/E_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ -\sigma_s \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_s}{E_x} + \frac{\sigma_s \nu_x}{E_x} \\ -\frac{\sigma_s \nu_y}{E_x} - \frac{\sigma_s}{E_y} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \frac{\nu_x}{E_x} &= \frac{\nu_y}{E_y} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_s}{E_x} + \frac{\sigma_s \nu_x}{E_x} \\ -\frac{\sigma_s \nu_y}{E_x} - \frac{\sigma_s}{E_y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$E_x \gg E_y \rightarrow \frac{1}{E_x} \ll \frac{1}{E_y}$$

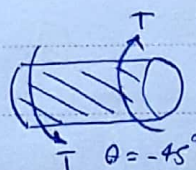
$$\Rightarrow \epsilon_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_s}{E_x} + \frac{\sigma_s \nu_x}{E_x} - \frac{\sigma_s \nu_y}{E_x} - \frac{\sigma_s}{E_y} \right] = \frac{1}{2} \sigma_s \left[\frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right] < 0 \Rightarrow \epsilon_1 < 0$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \end{Bmatrix}_{1,2,6} = \begin{bmatrix} S_{ij} \end{bmatrix}_{1,2,6} \begin{Bmatrix} \sigma \end{Bmatrix}_{1,2,6} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{16} \sigma_s \\ S_{26} \sigma_s \\ S_{66} \sigma_s \end{Bmatrix}$$

(روش 2)

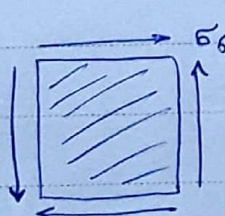
$$\Rightarrow \epsilon_1 = S_{16} \sigma_s \Rightarrow \epsilon_1 < 0$$

$$\frac{S_{26} - S_{16}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right)$$

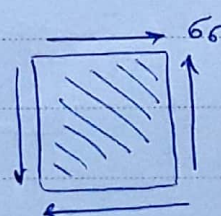


تقریباً حالتی که T برعکس شود طول چگونه تغییر می کند؟

(الف)



(ب)



مثال هدف: کدام حالت بهینه است؟

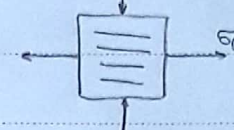
Carbon/Epoxy:

X_T	X_C	Y_T	Y_C	S	
(MPa)	1500	1500	40	246	68

X : Longitudinal
 Y : Transverse
 S : Shear

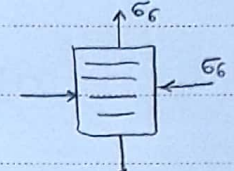
(الف)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_6 \\ -\epsilon_6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



(ب)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\epsilon_6 \\ \epsilon_6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



چون تنش پایین S ، انجم فشاری عرضی است که در جهت عمود بر الیاف از انجم کششی در همان جهت بیشتر است. به علت تمرکز تنش در حوضه های نه الیاف در زیر ایجاد کرده اند.

Stress-strain Relationship:

حاصل 16

	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\epsilon}_6$		N_1	N_2	N_6
N_1	A_{11}	A_{12}	A_{16}	$\hat{\epsilon}_1$	a_{11}	a_{12}	a_{16}
N_2	A_{21}	A_{22}	A_{26}	$\hat{\epsilon}_2$	a_{21}	a_{22}	a_{26}
N_6	A_{61}	A_{62}	A_{66}	$\hat{\epsilon}_6$	a_{61}	a_{62}	a_{66}

ماتریس سختی معادل
eq. stiffness matrix

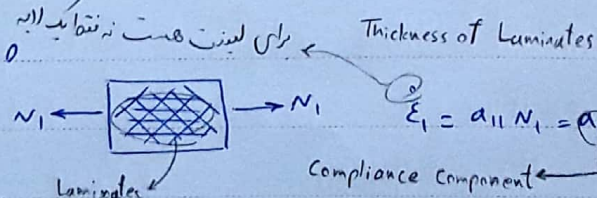
ماتریس نرمی معادل
eq. compliance matrix

این دو ماتریس متقابل هستند

توجه شود که این روابط تنش-کشی متقابل برای تغییر فرم های هندسی چند لایه های متجانس برقرار می باشد.

نوابت مهندسی لاینت متجانس:

$$1) N_1 \neq 0 \quad N_2, N_6 = 0$$



$$\hat{E}_2 = \frac{1}{h \cdot a_{22}}$$

$$\hat{E}_6 = \frac{1}{h \cdot a_{66}}$$

$$\nu_{21} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} \quad \text{Major Poisson's Ratio}$$

$$\nu_{12} = \frac{-a_{21}}{a_{22}}$$

$$\nu_{61} = \frac{a_{61}}{a_{11}}$$

$$\nu_{16} = \frac{a_{16}}{a_{66}}$$

$$\nu_{26} = \frac{a_{26}}{a_{66}}$$

$$\nu_{62} = \frac{a_{62}}{a_{22}}$$

در کامپوزیت تک جهته : $0 < \nu_{12} < 0.3$

$$\nu_{21} = 0.6$$

در فلزات : $0 < \nu < 0.3$

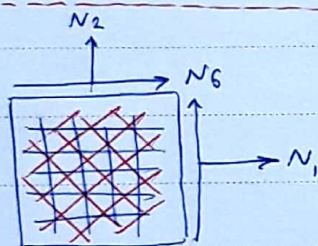
④ در مدار کامپوزیت ما توجه به مقدار دالانته تم های ماتریس می ($a_{11}, a_{12}, \dots$) می توانیم لجنیت با فرب براسن مثبت ، منفی و صفر

دالنته با شیم . برای مثال برای لجنیت $[0/90]$ این فرب برابر صفر و برای $[10/15]$ این فرب منفی است .

④ توانست سهندس فرب براسن تست های ساده س تک جهته بدست می آید به هین دلیل شتخته های یک صی لجنیت را نشان می دهند

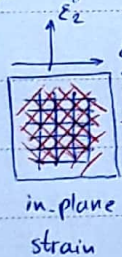
در حقیقت ما با بدله های A_{ij} ، از کار می کنیم ولی کامپیتر E واقعی به کار می آید
که بدلهیم مثلا کامپوزیت تک جهته لن با شتافات دکل فربان طاصی دکلیم کنیم . (مثلا وقتی بدلهیم یک ساندس فولاد را با
کامپوزیت دکلیم کنیم ما بدیل از لاله چنی E را به گرنه لن بدست آوریم به E فولاد برابر باشد)

④ هدف : بدست آوردن شتق کرنش در هر لاله



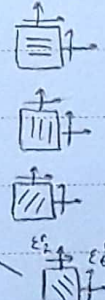
Stress Resultants

$$\bar{\epsilon} = a_{ij} N$$



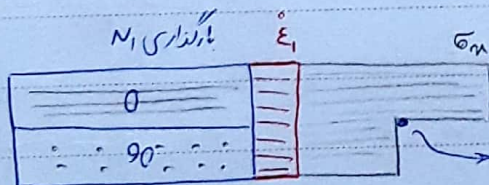
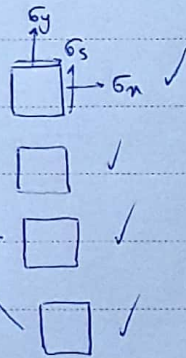
in-plane strain

$$A_{ij} \checkmark \xrightarrow{\text{inverse}} a_{ij} \checkmark$$



$$\sigma = Q \epsilon$$

از روابط
شتق کرنش



در تنش ها ... اگر N_2 بود در ساندس این کرنش ها برابر است

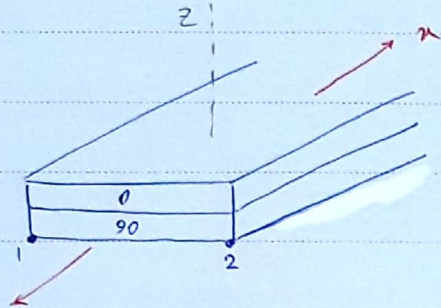
Material discontinuity → stress discontinuity
انفعال شتق
Material discontinuity → در ساندس این کرنش ها برابر است
stress singularity (stress singularity) که شتق در تریک لبه دکلیم به ساندس میل می کند فرق دارد (edge effect)

④ توجه شود تئوری چند لاله های کلاسیک (classical Lamination Theory) یا (CLT) که در لیسانس و فنی لیسانس تدریس می شوند ، در ساندس خود اثر edge effect و شتق های singular ربط با آن را حساب نمی کنند را توجه داریم که انفعال شتق به ناشی از خدای (ایده های شتافات

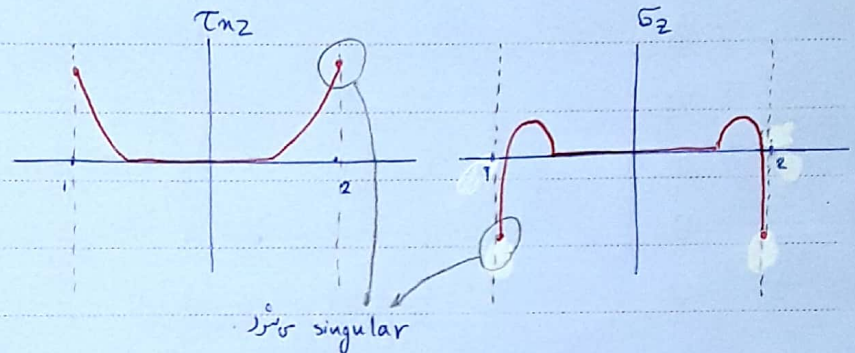
می باشد (material discontinuity) توسط این تئوری ساندس می شوند

توضیح: نم از ازمایش مدرس مانند اکروس و انجیس بر مناس نمودن الاستیسیته و مدل سازی سه بعدی مسائل را حل می کنند به همین دلیل

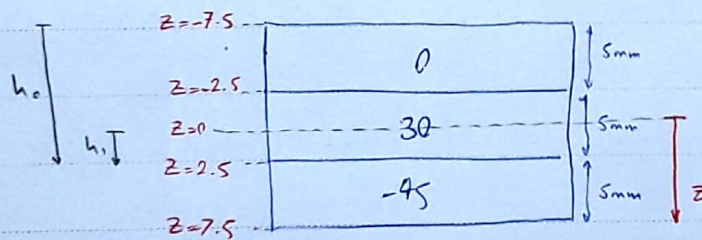
به قدرت اتوماتیک بدیده اثر لایه و تنش های singular مربوط به آن توسط نم از ازمایش و گزارش می شوند اما توجه شود مقدار امان ها اطراف



لایه های آزار به شدت باید ریز شوند



Ex: Find the stiffness matrix "A" for a three ply [0/30/-45] Carbon/Epoxy Laminate as shown below:



حل: 1- ابتدا از جدول کتاب خواص مواد، ماتریس Q_{on} را می نویسیم.

$$Q_{on} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 181.8 & 2.897 & 0 \\ 2.897 & 10.35 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \int Q_{ij} dz = \sum_{k=1}^3 Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \Rightarrow A_{ij} = (Q_{ij}^k) (h_k - h_{k-1})$$

$$[A] = [Q^0] (-0.0025 - (-0.0075)) + [Q^{30}] (0.0025 - (-0.0025))$$

$$+ [Q^{-45}] (0.0075 - 0.0025) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.739 \times 10^8 & 3.884 \times 10^8 & 5.663 \times 10^7 \\ 3.884 \times 10^8 & 4.533 \times 10^8 & -1.141 \times 10^8 \\ 5.663 \times 10^7 & -1.141 \times 10^8 & 4.525 \times 10^8 \end{bmatrix} \text{ Pa-m}$$

مقادیر است

رابطه های ماتریسی ها: ***

ماتریس سفتی [Q]

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{nn} \\ Q_{yy} \\ Q_{ny} \\ Q_{ss} \end{Bmatrix}$$

ماتریس نرمی [S]

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & -1 \\ 4 & 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{nn} \\ S_{yy} \\ S_{ny} \\ S_{ss} \end{Bmatrix}$$

Evaluation of in-plane Modulus:

مسئله 17

گفته شد که مدول صاف شدن لایه ها در جهت (x, y) توسط رابطه مدول off-axis (که همان تبدیل لایه ها به یکدیگر است)

معمولاً برای یک انتگرال نشان داده شده است. در این قسمت هدف ما این است که از روش های دیگر استفاده کنیم.

که می توانیم با استفاده از این روش ها را به دست آوریم:

$$A_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} dz = \int_{-h/2}^{h/2} [U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta] dz$$

$$= U_1 \int_{-h/2}^{h/2} dz + U_2 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta dz + U_3 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta dz$$

$$= U_1 h + U_2 V_1 + U_3 V_2$$

where $V_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta dz$ and $V_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta dz$

$$\Rightarrow A_{11} = U_1 h + U_2 V_1 + U_3 V_2$$

Similarly: $A_{22} = U_1 h - U_2 V_1 + U_3 V_2$

$$A_{12} = \int Q_{12} dz = \int (U_4 - U_3 \cos 4\theta) dz = U_4 h - U_3 V_2$$

$$A_{66} = U_5 h - U_3 V_2$$

$$A_{16} = \frac{1}{2} U_2 V_3 + U_3 V_4$$

$$A_{26} = \frac{1}{2} U_2 V_3 - U_3 V_4$$

	h	U_2	U_3
A_{11}	U_1	V_1	V_2
A_{22}	U_1	$-V_1$	V_2
A_{12}	U_4	0	$-V_2$
A_{66}	U_5	0	$-V_2$
A_{16}	0	$\frac{1}{2}V_3$	V_4
A_{26}	0	$\frac{1}{2}V_3$	$-V_4$

$$V_{[1,2,3,4]} = \int_{-h/2}^{h/2} [\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta] dz$$

laminates

با استفاده از رابطه ماتریس در برد و 4 فاکتور هندسی، 6 مدول الاستیسیته کلاسیک

الیه‌ها آن مثل هم است شغف می‌شود. با توجه به اینکه تابع $\cos$ و $\sin$ بین $[-1, +1]$ محدود هستند لذا V ها نیز محدود به $[-1, +1]$ هستند

اگر نسبت متناهی باشد

$$V_1^* = \frac{V_1}{h} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot dz = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot dz$$

ابتدا V را نسبت به ضخامت laminate نرمالایز می‌کنیم:

چون سیستم پیاپی نیست (discret) است:

$$V_1^* = \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{m/2} \cos 2\theta_i (z_i - z_{i-1}) = \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{m/2} \cos 2\theta_i \cdot h_i$$

h_i : ضخامت لایه i ام

m : تعداد الیه‌ها

نسبت حجمی هر لایه

از الیه‌ها

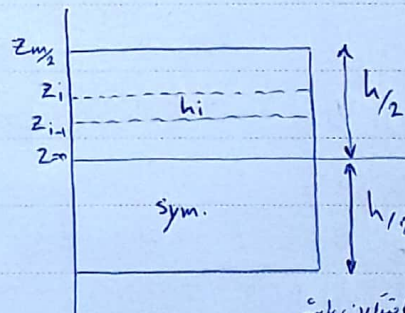
$\sum_{i=1}^{m/2} V_i = V_1 + V_2 + \dots = 1$

$\sum_{i=1}^m V_i = 1$

اگر متناهی باشد

مثلا:

0	$V_i = \frac{2h_i}{h} = \frac{2(90^\circ \text{ لایه})}{h}$
90	
90	
0	



$$V_1^* = \sum_{i=1}^{m/2} \cos 2\theta_i \cdot V_i = V_1 \cos 2\theta_1 + V_2 \cos 2\theta_2 + V_3 \cos 2\theta_3 + \dots$$

$$V_2^* = V_1 \cos 4\theta_1 + V_2 \cos 4\theta_2 + V_3 \cos 4\theta_3 + \dots$$

$$V_3^* = V_1 \sin 2\theta_1 + V_2 \sin 2\theta_2 + V_3 \sin 2\theta_3 + \dots$$

$$V_4^* = V_1 \sin 4\theta_1 + V_2 \sin 4\theta_2 + V_3 \sin 4\theta_3 + \dots$$

	1	U_2	U_3
A_{11}^*	U_1	V_1^*	V_2^*
A_{22}^*	U_1	$-V_1^*$	V_2^*
A_{12}^*	U_4	0	$-V_2^*$
A_{66}^*	U_5	0	$-V_2^*$
A_{16}^*	0	$\frac{1}{2}V_3^*$	V_4^*
A_{26}^*	0	$\frac{1}{2}V_3^*$	$-V_4^*$

$$A_{ij}^* = \frac{A_{ij}}{h}$$

Normalized A_{ij}

③ رشتۀ لایه چینی معروف برپس می شوند:

1. Cross-ply Laminates: (مقادی لایه های متقاطع)

در این نوع چند لایه، جهت الیاف در لایه ها فقط 0 و 90 است.

θ_i	$\cos 2\theta_i$	$\cos 4\theta_i$	$\sin 2\theta_i$	$\sin 4\theta_i$
0	1	1	0	0
90	-1	1	0	0

یا $[0_3/90]$ یا $[0_2/90_2]_s$ یا $[0/90]_T$

$$\nu_0 = \frac{1}{2}$$

$$\nu_0 = \frac{4}{8}$$

$$\nu_0 = \frac{3}{4}$$

$$\bar{\nu}_1 = \nu_0 \cos 2\theta_0 + \nu_{90} \cos 2\theta_{90} = \nu_0 - \nu_{90}$$

دقت شود در حالت کلی این عبارت ضرغی باشد چون ممکن است سه لایه 0 داشته باشیم و یک لایه 90.

$$\bar{\nu}_2 = \nu_0 + \nu_{90} = 1$$

$$\bar{\nu}_3 = \bar{\nu}_4 = 0$$

طبق این عبارت برای laminate های cross-ply در حالت $\bar{\nu}_2 = 1$ است.

$$\bar{\nu}_3 = \bar{\nu}_4 = 0$$

	1	U_2	U_3
A_{11}^*	U_1	$\nu_0 - \nu_{90}$	1
A_{22}^*	U_1	$\nu_{90} - \nu_0$	1
A_{12}^*	U_4	0	-1
A_{66}^*	U_5	0	-1
A_{16}^*	0	0	0
A_{26}^*	0	0	0

	$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_6$
$\bar{\sigma}_1$	A_{11}^*	A_{12}^*	A_{16}^*
$\bar{\sigma}_2$	A_{21}^*	A_{22}^*	A_{26}^*
$\bar{\sigma}_6$	A_{61}^*	A_{62}^*	A_{66}^*

	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}_6$
$\bar{\epsilon}_1$	a_{11}^*	a_{12}^*	a_{16}^*
$\bar{\epsilon}_2$	a_{21}^*	a_{22}^*	a_{26}^*
$\bar{\epsilon}_6$	a_{61}^*	a_{62}^*	a_{66}^*

inverse

Transverse Isotropic نیستند

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

به این نوع laminate ها، laminate های ارتوتروپیک می گویند که ماتریس سختی آن ها فقط 4 مدول می دارند.

④ لذا در این نوع لایه چینی A_{12}^* و A_{66}^* ثابت بوده و به تعداد لایه های 0 و 90 بستگی ندارند.

⑤ U_1 تا U_5 جلا نشان داده شده تا بعد از چینی لایه ها باشند و به تعداد لایه ها بستگی ندارند.

$$U_1 + U_3$$

* در صورتیکه تعداد لایه‌های 0 و 90 برابر باشند، $A_{11}^* = A_{22}^*$ می‌باشد.

* تنها رفتار عجیب این نوع laminate این است که فریب پیاپی در آن حدوداً غرض می‌باشد.

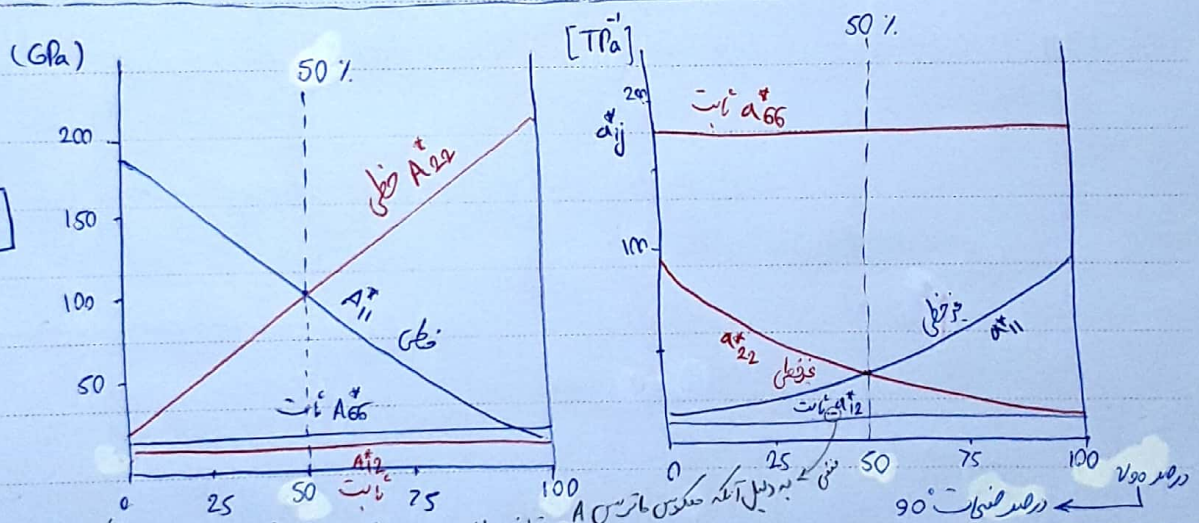
نی‌ندان تغییر داد ثابت است!

سوال) در یک لایه‌بندی cross-ply مدل صغری A_{11} و A_{22} و A_{66} را چگونه می‌توانیم افزایش دهیم

لایه‌های 0 با زیاد می‌کنیم (لایه‌های 90 را زیاد می‌کنیم)

فهرین) فریب پیاپی برای لایه‌بندی‌های cross-ply انجمنی glass/epoxy و carbon/epoxy با (لایه‌بندی $[0_2/90_2]_T$ را بدست آورید.

[از فرمول می‌توانیم لایه‌ها که در کتاب Tsai دوجو دارد استفاده شود]



A_{ij}^*

Tsai - 134

$$[A]^{-1} = [a]$$

$$[A^*]^{-1} = [a^*]$$

2- Angle-ply Laminates: (چند لایه‌های شطرنج) $[+\theta]$ $\theta_1 = +\varphi$ $\theta_2 = -\varphi$

مردار استفاده) شفت‌های انتقال قدرت در خودروها یا

تدبیرهای گاز و ...

در این حالت جهت حفظ تعادل laminate باید تعداد لایه‌هایی با زاویه $+\varphi$ با لایه‌های $-\varphi$ برابر باشند

لایه‌های با زاویه $+\varphi$

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$$

لایه‌های با زاویه $-\varphi$

$$v_1^* = \frac{1}{2} (\cos 2\varphi + \cos 2\varphi) = \cos 2\varphi, \quad v_2^* = \cos 4\varphi, \quad v_3^* = v_4^* \Rightarrow A_{16} = A_{26} = 0$$

پس این لایه‌بندی نیز ارتوتروپیک است.

با cross-ply فرس می‌کنند $[-\pi/4/\pi/4]$

در کامپوزیت ها به دلیل وجود الیاف و رزین ها می توان گفت که اینها دارای دو نوع اند، ترک ها در رزین ایجاد می شوند اما به دلیل دراز بودن الیاف (در این حالت) مدت زمان بیشتری نسبت به فزات طول می کشد تا ترک تمام سازه را در برگیرد و قطع و قطعه قطعه شدن سازه (در این قسمت باید ترک در سازه را به رزین و الیاف نسبت می دهند)

برای مثال در لایه $[T_4/-T_4]$

$$\cos 2\phi = 0, \quad \cos 4\phi = -1$$

$$T_{300}/\text{epoxy} : \begin{aligned} A_{11}^* &= 56.66 \\ A_{12}^* &= 42.3 \\ A_{66}^* &= 46.59 \\ A_{16}^* &= A_{26}^* = 0 \end{aligned}$$

	1	U_2	U_3
A_{11}^*	U_1	$\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$
A_{22}^*	U_1	$-\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$
A_{12}^*	U_4	0	$-\cos 4\phi$
A_{66}^*	U_5	0	$-\cos 4\phi$
A_{16}^*	0	0	0
A_{26}^*	0	0	0

$$T_{300}/\text{Epoxy} \left\{ \begin{aligned} \dot{E}_1 = \dot{E}_2 &= \frac{1}{a_{11} \cdot h} = 25.05 \text{ GPa} \\ \dot{E}_6 &= \frac{1}{a_{66} \cdot h} = 46.57 \text{ GPa} \\ \nu_{21} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} = 0.746 \end{aligned} \right.$$

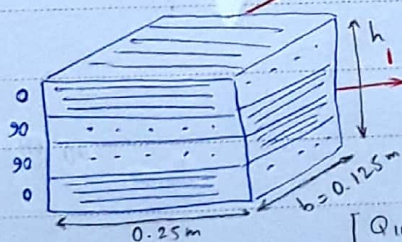
$$T_{300}/\text{Epoxy} \left\{ \begin{aligned} E_1 = E_2 &= 16.7 \text{ GPa} \\ E_6 &= 9.46 \text{ GPa} \\ \nu_{21} &= 0.167 \end{aligned} \right.$$

* ملاحظه شود که مقادیر برای laminate متناظر با لایه از laminate یک جهتی باشد. علاوه بر آن وقت شود در این لایه ضعیف تر

پایسون برابر 0.746 بدست آمده از جهتی $\nu = 0.5$ فزات ضعیف تر است.

هدف: محاسبه تنش ها در کرنش ها، نیروها در چند لایه متناظر تحت کرنش ϵ_x

[TA]



$$t = 0.15 \text{ mm} \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 \times 10^{-3} \\ \epsilon_2 &= 0 \\ \epsilon_6 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{پایین ترین لایه}$$

$$\text{Graphite/Epoxy} \left\{ \begin{aligned} E_n &= 155 \text{ GPa} \\ E_y &= 12.1 \text{ GPa} \\ E_s &= 4.4 \text{ GPa} \\ \nu_n &= 0.248 \\ \nu_y &= 0.019 \end{aligned} \right.$$

$$Q_{\text{off-axis}} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$U_1 = \frac{1}{8} (3Q_{nn} + 3Q_{yy} + 2Q_{xy} + 4Q_{ss})$$

$$Q_{nn} = \frac{E_n}{1 - \nu_n \nu_y} = \frac{155}{1 - (0.248)(0.019)} = 155.7 \text{ GPa}$$

$$Q_{xy} = \frac{\nu_n E_y}{1 - \nu_n \nu_y} = \frac{(0.248)(12.1)}{0.995} = 3.02 \text{ GPa}$$

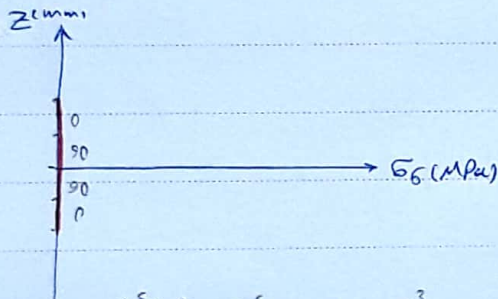
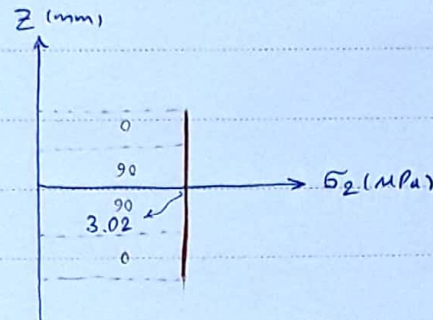
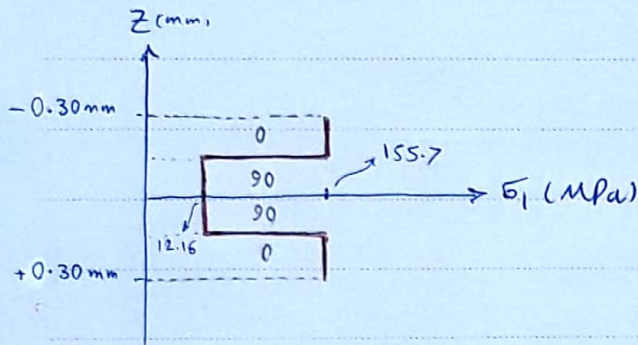
$$Q_{yy} = \frac{E_y}{0.995} = 12.16 \text{ GPa}$$

$$Q_{ss} = 4.4 \text{ GPa}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = [Q][\epsilon] = \begin{bmatrix} 155.7 & 3.02 & 0 \\ 3.02 & 12.16 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 155.7 \\ 3.02 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

برای لایه 90 درجه:

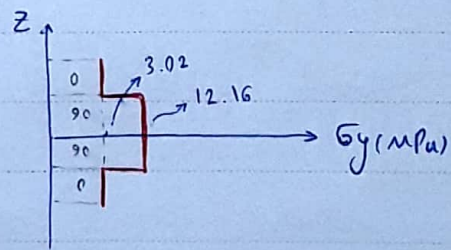
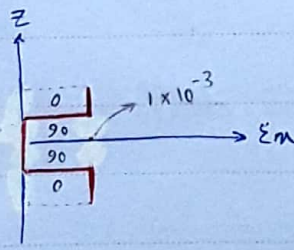
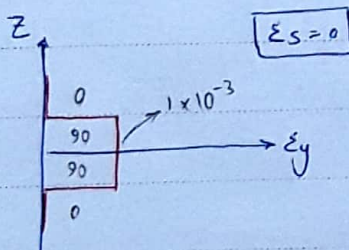
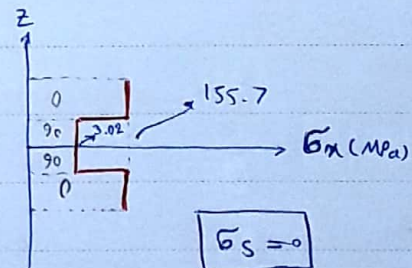
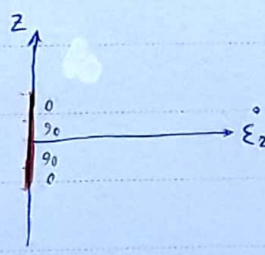
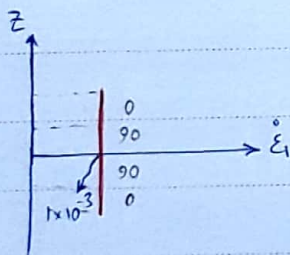
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.16 & 3.02 & 0 \\ 3.02 & 155.7 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12.16 \\ 3.02 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

 $[Q]_{90}$ نکته: در 90° جای مذکور σ_{90} و σ_{xx} با σ_{yy} و σ_{zz} عوض می شود.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix}_{90} = [T]_{90} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_{90} = [T]_{90} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.02 \\ 12.16 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 155.7 \\ 3.02 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



صاف شد

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz = \int_{z_0}^{z_1} \sigma_1 dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_1 dz + \int_{z_2}^{z_3} \sigma_1 dz + \int_{z_3}^{z_4} \sigma_1 dz$$

$$= \int_{-300 \times 10^{-6}}^{-150 \times 10^{-6}} 155.7 \times 10^6 dz + \int_{-150 \times 10^{-6}}^0 12.16 \times 10^6 dz + \int_0^{150 \times 10^{-6}} 12.16 \times 10^6 dz + \int_{150 \times 10^{-6}}^{300 \times 10^{-6}} 155.7 \times 10^6 dz = 50400 \text{ N/m}$$

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz = 180.9 \text{ N/m} \Rightarrow \begin{cases} N_1 \times 0.125 = 50400 \times 0.125 = 6300 \text{ N} \\ N_2 \times 0.25 = 180.9 \times 0.25 = 452 \text{ N} \end{cases}$$

3- Quasi-Isotropic Laminates: (کمینیت های شبه آیزوتروپیک)

جلسه 18

در صورتی که شرایط زیرین مدل های منتهای یک کمینیت برقرار باشد، کمینیت شبه آیزوتروپیک گفته می شود

چون ایلف در مناسبت آن برکنده شده اند لذا شبیه آیزوتروپیک رفتار می کنند

ایلف منفرجه

Mat Composites

Chopped Fiber Composites

④ (در کمینیت های $\frac{1}{4}$ اگر لاها برابر باشند شبه آیزوتروپیک می شوند. اگر لاها 45 و 45- برابر باشند آیزوتروپیک می شود. اگر لاها 45 و 45- برابر باشند معاد (cross) می شود. اگر لاها 0 و 90- برابر باشند حالت خالی می شود. اگر لاها 0 و 90- برابر باشند در حالت کلی یا (angle-ply) می شود. در حالت کلی یا (General) می شود. لاها می توانند هر تعدادی باشند

$\sigma_1 = 0 \leftarrow A_{11} = A_{22} = U_1$

$A_{12} = U_4$

$\sigma_3 = \sigma_4 = 0 \leftarrow A_{16} = A_{26} = 0$

$\sigma_2 = 0 \leftarrow A_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) \leftarrow A_{66} = U_5$

مثال

حالت خالی

اگر لاها برابر باشند

مثال

$[0, 60, -60]_S$

$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{v}_4 = 0$

$A_{11} = A_{22} = U_1$

$A_{12} = U_4, A_{66} = U_5$

مثال

$[0, 90, 45, -45]_S$

$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = \frac{1}{4}$

$\vec{v}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$

$A_{11} = A_{22} = U_1$

$A_{12} = U_4, A_{66} = U_5$

4 - General $\frac{1}{4}$ Laminates:

	1	U_2	U_3
A_{11}^*	U_1	$U_0 - U_{90}$	$U_0 + U_{90} - U_{45} - U_{-45}$
A_{22}^*	U_1	$-U_0 + U_{90}$	$U_0 + U_{90} - U_{45} - U_{-45}$
A_{12}^*	U_4	0	$-U_0 - U_{90} + U_{45} + U_{-45}$
A_{66}^*	U_5	0	$-U_0 - U_{90} + U_{45} + U_{-45}$
A_{16}^*	0	$\frac{1}{2}(U_{45} - U_{-45})$	0
A_{26}^*	0	$\frac{1}{2}(U_{45} - U_{-45})$	0

فقط شامل این 4 زاویه می باشند و می توانند لاها متفاوت باشند.

در صورتی که با استفاده از T_{300} (کرن) یک کمینیت شبه آیزوتروپیک ساخته شود، خواص آن به صورت زیر خواهد بود:

$T_{300}/Epoxy$ $[0, 90/45/-45]_s$ $\rightarrow$ همای که ملاطفت می برد فای آن مانند Al است اما وزن آن 40 درصد کاهش پیدا می کند

$\nu = 0.296$

$E = 69.67$

$G = 26.88$

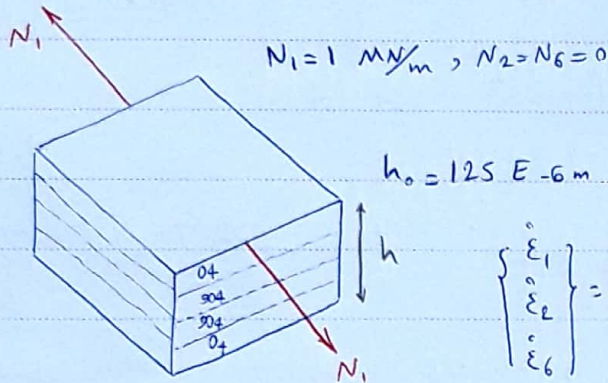
البته استحکام آن به مراتب بیشتر از Al است.

* Ply Stress and Strain Analysis:

جنس الیاف کربن
جنس رزین

اتصال

مثال: در چیدمانی متناوب و درجه 0/90 که از ماده Carbon/Epoxy که با کد T300/5208 تحت بارگذاری دخیل می باشد

به مدت $N_1 = 1 \text{ MN/m}$ تنش درگوش در هر لایه را بیست آورید

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = [a] \begin{Bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[A] \checkmark \Rightarrow a = [A]^{-1} \checkmark \quad [a] = \begin{bmatrix} 5.21 & -0.157 & 0 \\ -0.157 & 5.21 & 0 \\ 0 & 0 & 69.73 \end{bmatrix} \Rightarrow \epsilon = \begin{Bmatrix} 5.21 \times 10^{-3} \\ -0.157 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{on} = Q_{on} \cdot \epsilon_{on} \quad h = 16 \cdot h_0 = 16 \times 125 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-3} \text{ cm} \Rightarrow \bar{\sigma}_1 = \frac{N_1}{h} = 500 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \text{در لایه ی 90 درجه } \epsilon = \epsilon^0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.21 \times 10^{-3} \\ -0.157 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

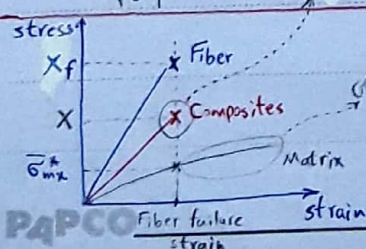
$$\begin{cases} Q_{xx} = 181.8 \\ Q_{yy} = 10.34 \\ Q_{xy} = 2.89 \\ Q_{ss} = 7.17 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.21 \times 10^{-3} \\ -0.157 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 946.7 \\ 13.4 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ (MPa)}$$

$$\text{برای لایه 90 درجه: } \begin{cases} \epsilon_x^0 = \epsilon_y \\ \epsilon_y^0 = \epsilon_x \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.157 \times 10^{-3} \\ 5.21 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13.4 \\ 53.41 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ (MPa)} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2} (946.7 + 53.41) = 500 \text{ MPa} \\ \bar{\sigma}_2 = 0 \\ \bar{\sigma}_6 = 0 \end{cases}$$

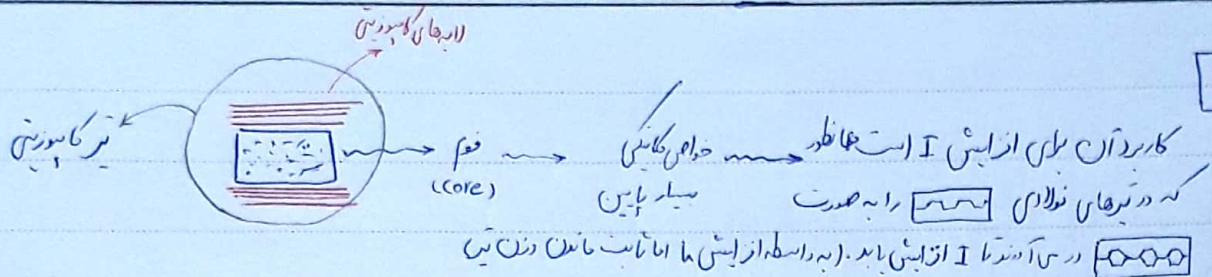
Fiber از رزین می رود در نتیجه کامپوزیت از هم می پاشد



*** نکته: کرنش شکست (failure strain) کامپوزیت به کرنش شکست الیاف نزدیک می باشد.

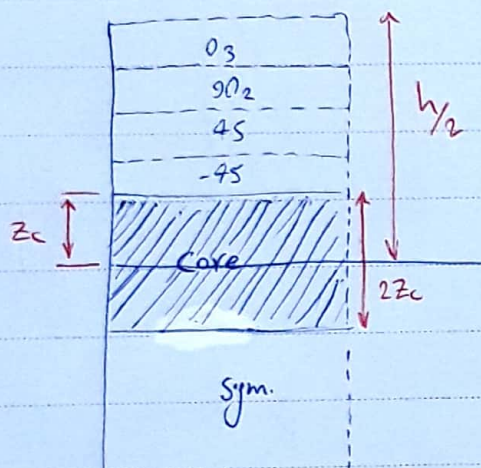
هیدروپن منحنی تنش-کرنش ماتریکس (رزین) در مایه ای مالای کرنش شکست الیاف، غیر خطی می باشد

جلسه ۱۹



Chapter 5) Flexural Stiffness of Symmetric Sandwich Laminates

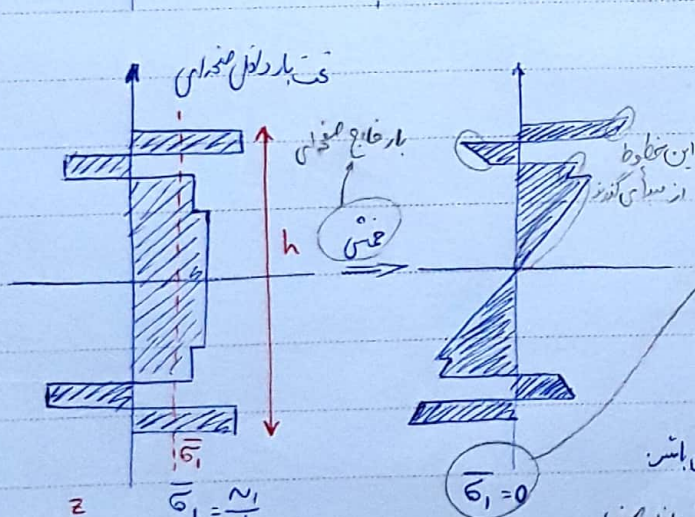
* با استفاده از فرم بدون افزایش وزن سی لایم I مقطع را افزایش داده و لحظیت باربری خمش چندانیه را (افزایش دهم). معمولاً در بدنه های قاب ها،



هواییها و دالها که به خمش لایم را هم، از فرم استفاده می شود.

مثلاً $[0_3 / 90_2 / 4_5 / -4_5 / z_c]$ core

فوقی با ضخامت ۱۰
 $[0 / 90 / H_{10}]_S$



* برای رفع شکل در این حالت به طای تنش منبجه از جان منبجه استفاده می شود.

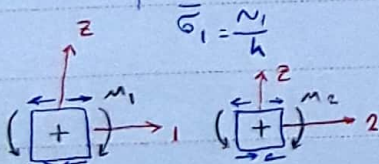
M_1, M_2, M_6 جان ها بر دایر عرض laminate هستند.

اگر تنش متوسط در منبجه بالایی مثبت باشد، همان مثبت است.

منفی // منفی // منفی

* در صورتی که تنش بیش در منبجه بالایی مثبت باشد، همان بیضی مثبتی باشد.

جان برش داخل منبجه

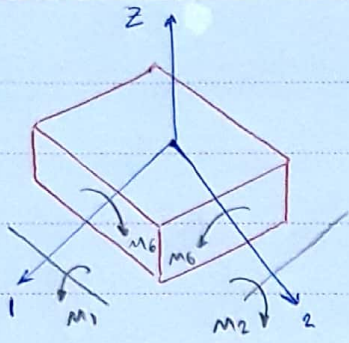


جان های خمشی (bending moment)

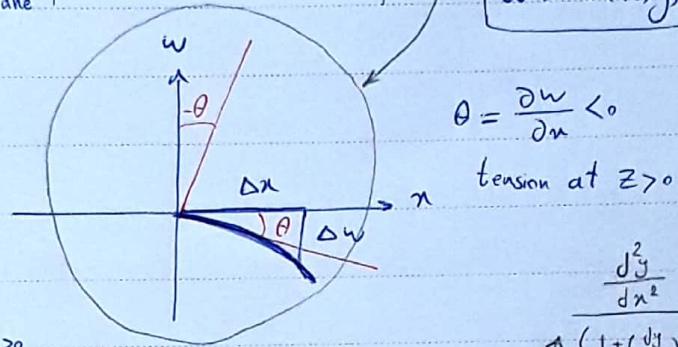
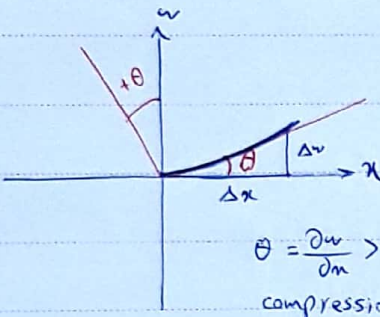
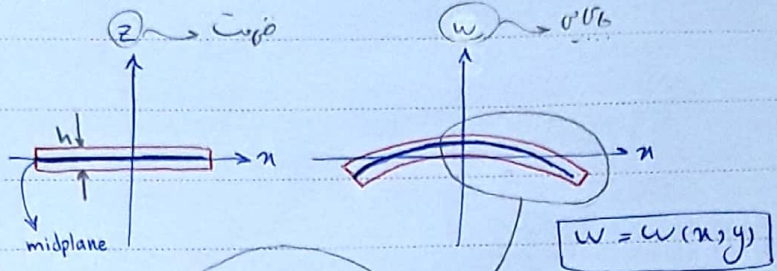
جان های منبجه

جان بیضی (twisting moment)

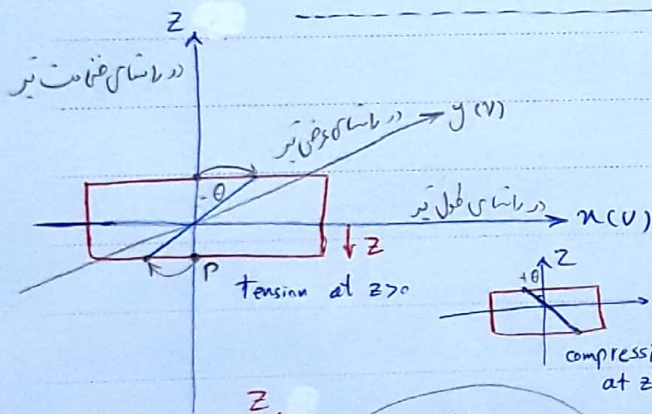
$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz \\ M_6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 z dz \end{aligned}$$



دقت شود هم در محاسبات را نسبت به محور میانی تیر کامپوزیتی انجام می دهیم



$$\frac{d^2}{dx^2} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}$$

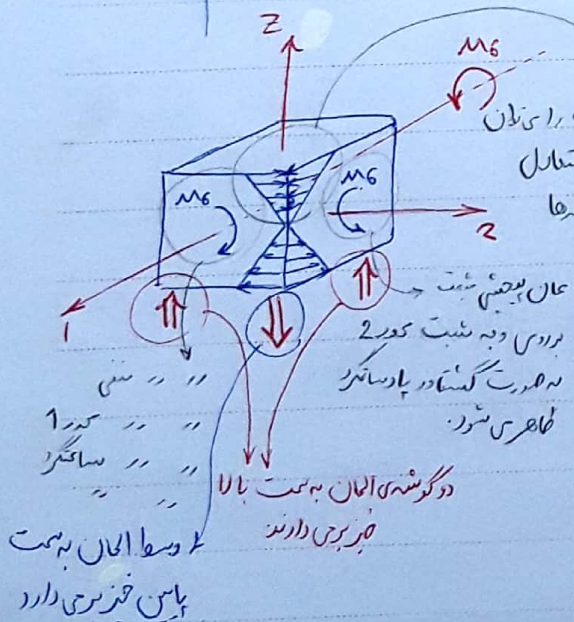


نقش $U = -z \frac{\partial w}{\partial x}$
بهین ریب $v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$

نسبت به اینها در تقارن مصالح

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} k_1 \\ \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} k_2 \\ \epsilon_6 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} k_6 \end{cases}$$

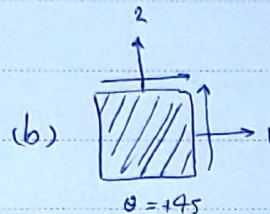
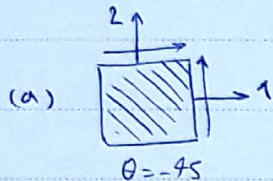
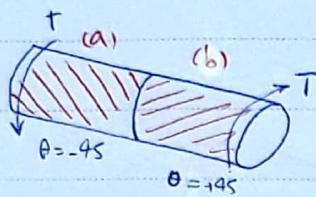
اثر همان بعضی ضعیف را می توان
به صورت 4 نیروی خود متقابل
(self-equilibrating forces)
وارد می شوند و تغییری ندارد



$$\begin{cases} \epsilon_1(z) = z \cdot k_1 \\ \epsilon_2(z) = z \cdot k_2 \\ \epsilon_6(z) = z \cdot k_6 \end{cases}$$

تمرین (تغییر شکل الاستوانه در جهت شعاعی (قطر) ؟

TA



$$S_{26} = 2mn^3 S_{xx} - 2m^3n S_{yy} + 2(m^3n - mn^3) S_{xy} + (m^3n - mn^3) S_{ss}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = [S_{ij}]_{i,j=1,2,6} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{16} \cdot \sigma_6 \\ S_{26} \cdot \sigma_6 \\ S_{66} \cdot \sigma_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{تغییر قط}$$

$$(a) \theta = -45 \rightarrow S_{26} = -\left(\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2}\right) > 0, E_x \gg E_y \Rightarrow S_{26} > 0$$

$$\sigma_6 > 0 \Rightarrow S_{26} \cdot \sigma_6 > 0 \Rightarrow \epsilon_2 > 0 \Rightarrow \text{افزایش قطر}$$

$$(b) \theta = +45 \rightarrow S_{26} = \left(\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2}\right) < 0, \sigma_6 > 0 \Rightarrow \epsilon_2 = S_{26} \cdot \sigma_6 < 0 \Rightarrow \text{کاهش قطر}$$

* نکته: اگر دو طرف مخزن قیدناشته باشیم تنش کمرش نداریم، یعنی در مائریس تنش باید حواسمان باشد که تنش $\sigma_t = \frac{Pr}{2t}$

$$\sigma_h = \frac{Pr}{t} \text{ داریم دلس}$$

hoop stress

Moment Curvature Relations: $\rightarrow$ (مکان های برش ها $N = A \epsilon \sim \epsilon$)

20 مهر

$$\{M\} = [D] \{k\} \quad M_1 = \int \sigma_1 z dz = \int (Q_{11} \epsilon_1 + Q_{12} \epsilon_2 + Q_{16} \epsilon_6) z dz$$

$$= \int (Q_{11} k_1 + Q_{12} k_2 + Q_{16} k_6) z^2 dz$$

$$\Rightarrow M_1 = \underbrace{\left[\int Q_{11} z^2 dz \right]}_{D_{11}} k_1 + \left[\int Q_{12} z^2 dz \right] k_2 + \left[\int Q_{16} z^2 dz \right] k_6$$

$$\Rightarrow M_1 = D_{11} k_1 + D_{12} k_2 + D_{16} k_6 \rightarrow \text{Similarity: } M_2 = \dots$$

$$M_6 = \dots$$

$$D_{11} = \int Q_{11} z^2 dz$$

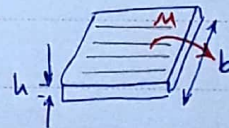
$$D_{12} = \int Q_{12} z^2 dz$$

$$D_{16} = \int Q_{16} z^2 dz$$

$$\text{مکان های برش ها} = \frac{M}{b}$$

	k_1	k_2	k_6		M_1	M_2	M_6	
M_1	D_{11}	D_{12}	D_{16}	inverse $\rightarrow$	k_1	d_{11}	d_{12}	d_{16}
M_2	D_{21}	D_{22}	D_{26}		k_2	d_{21}	d_{22}	d_{26}
M_6	D_{61}	D_{62}	D_{66}		k_6	d_{61}	d_{62}	d_{66}

* Effective flexural engineering constants.



$$M_1 \neq 0, M_2 = M_6 = 0 \rightarrow k_1 = d_{11} M_1 = d_{11} \frac{M}{b} \quad (1)$$

$$\text{Rigidity} : EI = \frac{M}{k_1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow EI = \frac{b}{d_{11}} \quad E = E_f = \frac{b}{I \cdot d_{11}}, \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$$E_1 = E_1^f = \frac{12}{h^3 d_{11}} \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} E_2 = E_2^f = \frac{12}{h^3 d_{22}}, \quad E_6 = E_6^f = \frac{12}{h^3 d_{66}}$$

$$\nu_{21}^f = -\frac{d_{21}}{d_{11}}, \quad \nu_{61}^f = \frac{d_{61}}{d_{11}}, \quad \nu_{62}^f = \frac{d_{62}}{d_{22}}$$

مقیاس بردار چرخش برش است

* Evaluation of flexural Modulus:

$$D_{11} = \int Q_{11} \cdot z^2 \cdot dz = \int [U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta] z^2 \cdot dz$$

$$= U_1 \int z^2 \cdot dz + U_2 \int \cos 2\theta \cdot z^2 \cdot dz + U_3 \int \cos 4\theta \cdot z^2 \cdot dz$$

نظراً از آنکه مربع میانی است
(در شکل منظم می بینیم)

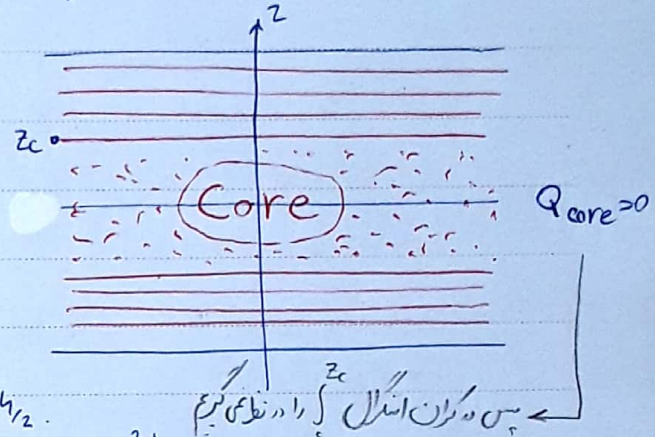
$$= U_1 h^* + U_2 \cdot V_{12} + U_3 \cdot V_{22}$$

$$h^* = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz = 2 \int_{z_c}^{h/2} z^2 \cdot dz$$

core

$$\rightarrow h^* = \frac{h^3}{12} \left[1 - \left(\frac{z_c}{h/2} \right)^3 \right] = \frac{h^3}{12} (1 - z_c^{*3})$$

$$z_c^* = \frac{2z_c}{h}, \quad V_{12} = 2 \int_{z_c}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z^2 \cdot dz, \quad V_{22} = 2 \int_{z_c}^{h/2} \cos 4\theta \cdot z^2 \cdot dz$$



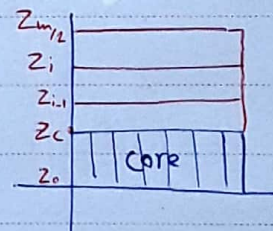
به همین ترتیب می توانیم Dها بدست می آوریم

	h^*	U_2	U_3
D_{11}	U_1	V_{12}	V_{22}
D_{22}	U_1	$-V_{12}$	V_{22}
D_{12}	U_4	0	$-V_{22}$
D_{66}	U_5	0	$-V_{22}$
D_{16}	0	$\frac{1}{2} V_{32}$	V_{42}
D_{26}	0	$\frac{1}{2} V_{32}$	$-V_{42}$

$$V_{12} = 2 \int_{z_c}^{h/2} [\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta] z^2 \cdot dz$$

$$V_{12} = 2 \int_{z_c}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z^2 \cdot dz = \frac{2}{3} \sum_{i=C+1}^{m/2} \cos 2\theta_i (z_i^3 - z_{i-1}^3)$$

$$V_{12}^* = \frac{12}{h^3} V_{12}$$



Ex: Flexural Modulus of cross-ply Laminates:

یادآوری:

θ_i	$\cos 2\theta_i$	$\cos 4\theta_i$	$\sin 2\theta_i$	$\sin 4\theta_i$
0	1	1	0	0
90	-1	1	0	0

Classical Lamination Theory

در بازرسی داخل صفحه‌ای که جلاست قبل از چسب زدن (CLT) ترتیب چین لایه‌ها هیچ تأثیری در ماتریس سفتی و نتایج مربوطه نداشت ولی توجه شود که در چسب زدن ترتیب چین لایه‌ها تأثیر بسیاری در مولفه‌های ماتریس $[D]$ و نتایج مربوطه دارد.
برای نشان دادن این اثر از یک laminate با 16 لایه با سچیدمان متکلف به شکل زیر استفاده خواهیم کرد:

T_{300}

04	02	90
904	902	90
904	02	90
904	902	90

$$T_{300/S208} \rightarrow 16 \text{ plies}, t_{ply} = 125 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$t_{laminate} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

گروه لایه $m=4$ $[0_4/90_4]_s$
 $m=8$ $[(0_2/90_2)_2]_s$
 $m=16$ $[0/90]_{4s}$
 $= [0/90]_{2s}$

$m=4$: $V_{1z} = 5 \times 10^{-10} \text{ m}^3$, $m=8$: $V_{2z} = 6.7 \times 10^{-10} \text{ m}^3$, $m=16$: $V_{3z} = V_{4z} = 0$

$$V_{1z} = \frac{h^3}{12} \frac{3}{m}, \quad V_{2z} = \frac{h^3}{12}, \quad V_{3z} = V_{4z} = 0$$

$$\begin{cases} \bar{V}_{21} = \frac{3}{m} \\ \bar{V}_{22} = 1 \\ \bar{V}_{23} = \bar{V}_{24} = 0 \end{cases}$$

$$z_c = 0$$

$$D_{ij}^* = \frac{D_{ij}}{h^3}$$

$$D_{16} = D_{26} = D_{15} = D_{25} = 0$$

	1	U_2	U_3
D_{11}^*	U_1	$\frac{3}{m}$	1
D_{22}^*	U_1	$-\frac{3}{m}$	1
D_{12}^*	U_2	0	-1
D_{66}^*	U_5	0	-1

صاف

تغییر در ۳ لایه چینی

ثابت در ۳ لایه چینی

$$m=4 \rightarrow D_{ij} = \begin{bmatrix} 106.9 & 1.93 & 0 \\ 1.93 & 21.18 & 0 \\ 0 & 0 & 4.78 \end{bmatrix} (N.m), \quad d_{ij} = \begin{bmatrix} 9.36 & -0.85 & 0 \\ -0.85 & 92.27 & 0 \\ 0 & 0 & 209.2 \end{bmatrix} (kN.m)^{-1}$$

حاصل جمع این دو همیشه ثابت است

$$m=8 \rightarrow D_{ij} = \begin{bmatrix} 85.48 & 1.93 & 0 \\ 1.93 & 42.61 & 0 \\ 0 & 0 & 4.78 \end{bmatrix} (N.m), \quad d_{ij} = \begin{bmatrix} 11.7 & -0.53 & 0 \\ -0.53 & 23.48 & 0 \\ 0 & 0 & 209.2 \end{bmatrix} (kN.m)^{-1}$$

$$m=16 \rightarrow D_{ij} = \begin{bmatrix} 64.05 & 1.93 & 0 \\ 1.93 & 64.05 & 0 \\ 0 & 0 & 4.78 \end{bmatrix} (N.m), \quad d_{ij} = \begin{bmatrix} 15.62 & -0.471 & 0 \\ -0.471 & 15.62 & 0 \\ 0 & 0 & 209.2 \end{bmatrix} (kN.m)^{-1}$$

نکات:

۱- مقدار D_{11} و D_{22} به ترتیب لایه چینی وابسته می باشد. هرچه ترتیب لایه چینی همگی برابر مقدار D_{11} و D_{22} باهم برابر می شود.

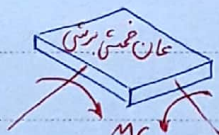
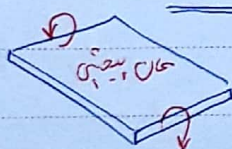
بیشتر m

۲- مؤلفه های پواسون ماتریس لغزش بین D_{12} و D_{21} بدون تغییر ثابت باقی مانده و به m وابسته نمی باشند. به عبارت دیگر

اگر در راستای (۱) انحنای داریم (K_1) ، همان خمشی در راستای (۲) اتفاق می افتد و می توان همان خمشی را m وابسته می باشد

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_6 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{Bmatrix}$$

۳- مؤلفه های برش ماتریس لغزش با گروه لایه ها ثابت مانده و مستقل از ۴ مؤلفه های غیر برش هستند. به عبارت دیگر انحنای در راستای (۱)



ثابت انحنای همان خمشی برش (m_6) در laminate می شود.

حالت خمشی برش
(با پیچش زنی می کنند)

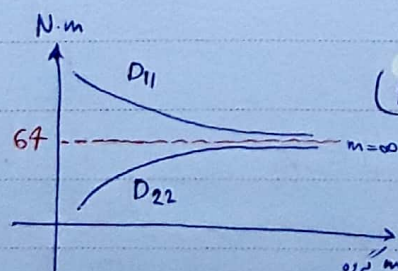
در دو جهت برش m_6 و با α آسن

۴- برخلاف D_{12} و D_{21} که مستقل از m بودند، D_{11} و D_{22} به m وابسته هستند. به عبارت دیگر همان خمشی در

راستای (۱) باعث انحنای در راستای (۲) می باشد و این انحنای به ترتیب لایه چینی وابسته است.

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{Bmatrix} = [d] \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_6 \end{Bmatrix}$$

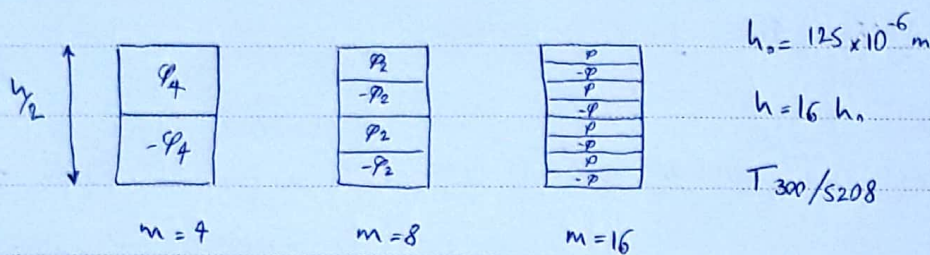
۵- مجموع مؤلفه های زغال لغزش ثابت هستند. $(D_{11} + D_{22} = d_{11})$



برای $T300/S208$

Flexural modulus of Angle-ply Laminates : $[\pm\phi]$

21



* در این نوع لایه چین ضرب کولینگ برش D_{61} و D_{62} برای $\pm\phi$ می تواند همگی را حذف کند زیرا این دو نسبت لایه ها به یکدیگر متناسب است و این متناسب شدن به نسبت ضدشان باشد بنابراین تنها در 3 حالت زیر ماتریس مستش $[D]$ ارتوروپیک خواهد شد:

$$\theta_i = +\phi, -\phi \quad V_{z1} = 2 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\phi \cdot z^2 \cdot dz = 2 \left[\int_{-h/4}^{h/4} \cos 2\phi \cdot z^2 \cdot dz + \int_{h/4}^{h/2} \cos(-2\phi) z^2 \cdot dz \right]$$

$$= \frac{h^3}{12} \cos 2\phi$$

(1) نسبت تک جبهه باشد
(2) cross-ply
(3) ضدشان

$$V_{z1}^* = \frac{12}{h^3} V_{z1} \Rightarrow V_{z1}^* = \cos 2\phi$$

Similarly : $V_{z2}^* = \cos 2\phi$, $V_{z3}^* = \frac{3}{m} \sin 2\phi$, $V_{z4}^* = \frac{3}{m} \sin 4\phi$ ($m = 4, 8, 16$)

	1	U_2	U_3
D_{11}^*	U_1	$\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$
D_{22}^*	U_1	$-\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$
D_{12}^*	U_4	0	$-\cos 4\phi$
D_{66}^*	U_5	0	$-\cos 4\phi$
D_{16}^*	0	$\frac{3}{2m} \sin 2\phi$	$\frac{3}{m} \sin 4\phi$
D_{26}^*	0	$\frac{3}{2m} \sin 2\phi$	$-\frac{3}{m} \sin 4\phi$

* به دلیل عدم صفر شدن V_{z4} ، V_{z3} ، چندانکه ارتوروپیک نمی باشد
($D_{16}, D_{26} \neq 0$)

(بخش 60) $\Rightarrow$ if $m \rightarrow \infty$ then $D_{16} = D_{26} = 0$:
چندانکه $\rightarrow$ ارتوروپیک

$$D_{ij}^* = \frac{12}{h^3 [1 - z_c^*]} D_{ij} \Rightarrow \text{if } z_c = 0 \text{ (مركز نداشتن)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{ij}^* = \frac{12}{h^3} D_{ij} = \frac{1}{h} A_{ij} = A_{ij}^* \\ D_{ij} = \frac{h^2}{12} A_{ij}, \quad d_{ij} = \frac{12}{h^2} a_{ij} \end{array} \right.$$

if $\phi = 45^\circ$ $D_{16} = D_{26} = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{3}{2m} U_2 = \frac{1}{m} U_2 \times 10^{-9}$

این روابط فقط برای Angle-Ply برقرار است آن هم هنگامی که $m \rightarrow \infty$ باشد یعنی ارتوروپیک باشد.

ص 71

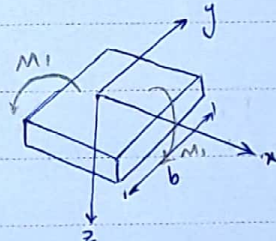
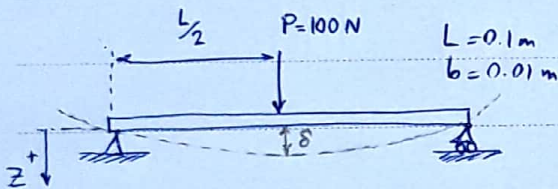
$$\rightarrow D_{ij}^* = \begin{bmatrix} 56.65 & 42.31 & \frac{1}{m} 128.5 \\ 42.31 & 56.65 & \frac{1}{m} 128.5 \\ \frac{1}{m} 128.5 & \frac{1}{m} 128.5 & 46.59 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow D_{16}^*$
 $\rightarrow D_{26}^*$

* با گذشتن $m = 4.8 \times 10^6$ در رابطه ماتریس D مشاهده می شود با افزایش گره لایه ها، کوپلینگ بیش در حال D_{16} ، D_{26} به سمت صفر میل نموده و رفتار خمینی به ارتوتروپیک نزدیک می شود.

* توجه شود در لایه های متقاطع D_{11} ، D_{22} ، D_{16} و D_{66} مستقل از گره لایه ها هستند. همچنین از ابتدا در $\varphi = 45^\circ$ ، $d_{11} = d_{22}$ می باشد.

مثال) تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت کرنایش خمشی سه نقطه ای می باشد.



$$[0.4 / 90.4]^\circ$$

$$T_{300/S208}$$

$$h_o = 125 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$M = \frac{PL}{4}, \quad M_1 = \frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{PL}{4b}, \quad M_2 = M_6 = 0$$

$$\{k\} = [d] \{m\} \rightarrow k_1 = d_{11} \frac{PL}{4b}, \quad k_2 = d_{21} \frac{PL}{4b}, \quad k_6 = 0$$

$$T_{300/S208} \xrightarrow[70^\circ]{\text{Table}} \begin{cases} d_{11} = 9.36 \\ d_{21} = -0.85 \\ d_{61} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{11} = 2.34 \text{ m}^{-1} \\ K_{21} = -0.212 \text{ m}^{-1} \\ K_{61} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{کرنش (خم) - کرنش (+)} \\ \text{در لایه ها باید این روابط برقرار باشد} \end{array} \right\} \begin{cases} \epsilon_1 = z K_1 \\ \epsilon_2 = z K_2 \\ \epsilon_6 = 0 \end{cases} \quad \text{if } z = 8h_o = 1 \times 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = 2.34 \times 10^{-3} \\ \epsilon_2 = -0.212 \times 10^{-3} \\ \epsilon_6 = 0 \end{cases}$$

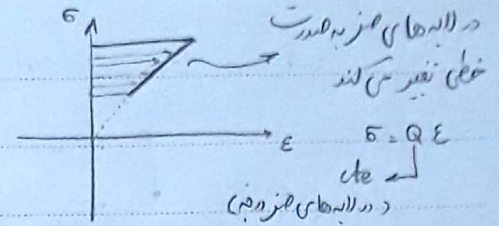
کرنش «بالا» لایه (لایه صفر درجه)

پس کرنش های on-Axis هستند

صفر بعد

از روابط تنش-کرنش در بالابین الیه

$$\{\sigma\} = [Q] \{\epsilon\} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 424 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 4.57 \text{ MPa} \\ \sigma_6 = 0 \end{cases}$$



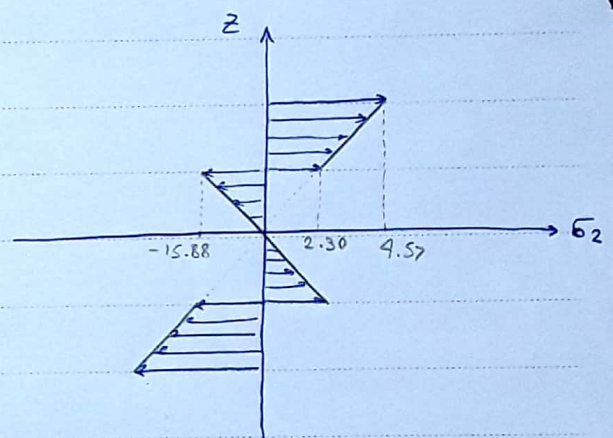
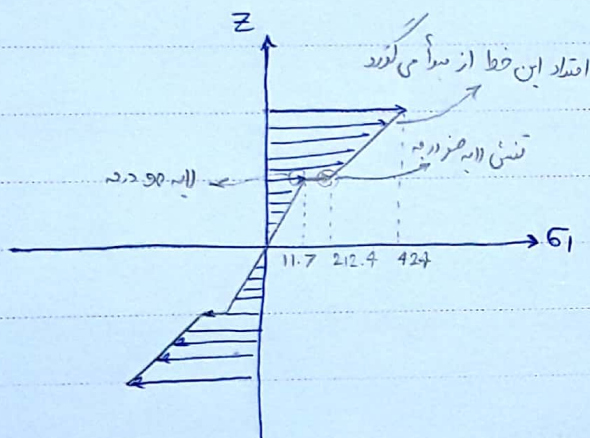
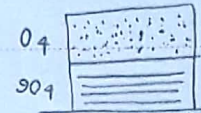
تنش‌ها در کمرش‌ها در بالابین الیه کمرش‌ها

$$z = 4h_0 = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (*) \quad \begin{cases} \epsilon_1 = 1.017 \times 10^{-3} \\ \epsilon_2 = -0.106 \times 10^{-3} \\ \epsilon_6 = 0 \end{cases}$$

$\varphi = 90^\circ$

از روابط تنش-کرنش

$$\begin{cases} \sigma_1 = 11.7 \\ \sigma_2 = -15.88 \text{ (MPa)} \\ \sigma_6 = 0 \end{cases}$$



$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}, \quad EI = \frac{M}{\frac{1}{K_1}} = \frac{b}{d_{11}} \rightarrow \delta = 1.95 \text{ mm} = \frac{PL^3}{48b} d_{11}$$

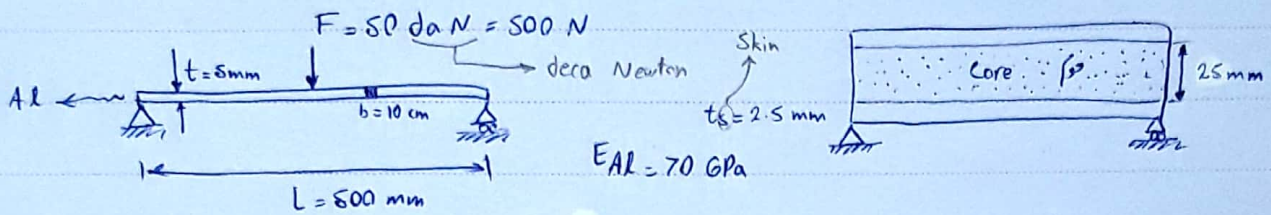
نرخ (تنش، کرنش) و محاسبه چنانچه ضرایب $[\pm 30/0]$ را نسبت امکان $K_1 = 2.22 (\frac{1}{m})$ بدست آید.

تولایه $t_{ply} = 0.15 \text{ mm}$

Carbon/Epoxy

$$\begin{cases} E_x = 155 \text{ GPa} \\ E_y = 12.1 \text{ GPa} \\ \nu_{yx} = 0.248 \\ E_s = 4.4 \text{ GPa} \end{cases}$$

مسئله (در دیتا طبق شکل زیر جایابی عرض در تقاطع (مال بار را بدست آورید) (کتاب Daniel Gay)



$$E_c = E_{core} = 60 \text{ MPa} \quad G_c = 20 \text{ MPa}$$

فرب (در کتاب شگل)

Solution: $w = \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx + \int \frac{1}{2} \frac{CV^2}{AG} dx$

$$AG = (b_c G_c t_c + b_s G_s t_s) = b (t_c G_c + t_s G_s)$$

$$\Delta = \frac{\partial w}{\partial F} = \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dF} dx + \int \frac{C}{AG} V \frac{dV}{dF} dx$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \rightarrow M = \frac{Fx}{2}, V = \frac{F}{2} \\ \frac{L}{2} \leq x \leq L \rightarrow M = \frac{F}{2}(L-x), V = \frac{F}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{FL^3}{48EI} + \frac{FL}{4} \frac{C}{GA} \quad C = 1.2$$

* ملاحظه شود در تیر آرمیچر شده جایابی عرض ناشی از برش تیر قابل صرف نظر است
 $\Delta = 16.7 \text{ mm} + 0.02 \text{ mm}$
 صرف نظر شود

چون E هسته خیلی کم است

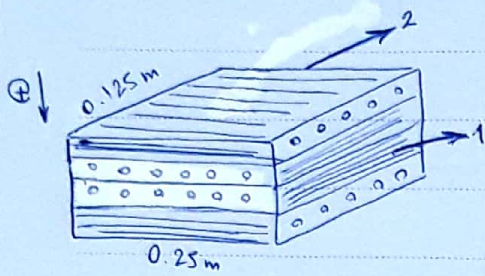
$$I = 2Ad^2 = 2bts \left(\frac{t_c + t_s}{2} \right)^2 = \frac{bts}{2} (t_s + t_c)^2$$

skin

$$EI = E_s \frac{bts}{2} (t_c + t_s)^2 + E_c \frac{bc^3}{12} = 7090 + 7.8$$

$$\Delta' = \Delta'_{\text{bending}} + \Delta'_{\text{shear}} = 0.18 + 1.04 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{\Delta}{\Delta'} = 14$$

نمیر توان صرف نظر کرد



$[0/90]_s$
Graphite/Epoxy

$$E_x = 155 \text{ GPa}$$

$$E_y = 12.1 \text{ GPa}$$

$$E_s = 4.4 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.248$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_6 = k_2 = k_6 = 0$$

$$k_1 = 3.33 \text{ m}^{-1}$$

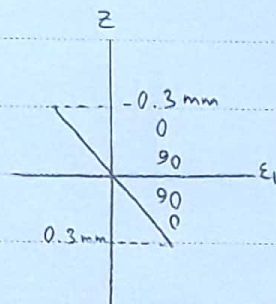
$$\text{ضخامت لایه} = 0.15 \text{ mm}$$

حرف: به سبب همان هاش ناشی از k_1

$$\epsilon_1 = \epsilon_1 + z k_1 = 3.33 z \rightarrow \text{تغییرات کرنش به صورت خطی با ضخامت}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_2 + z k_2 = 0$$

$$\epsilon_6 = \epsilon_6 + z k_6 = 0$$



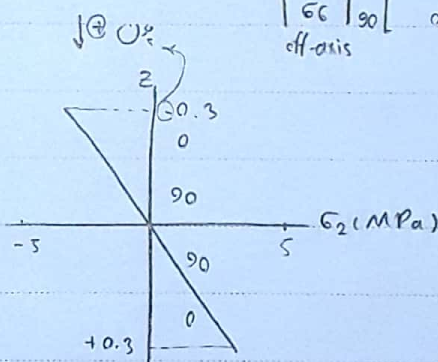
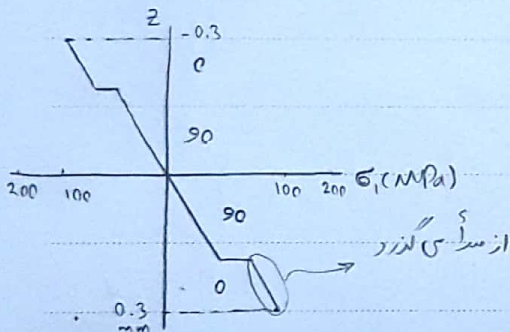
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 155.7 & 3.02 & 0 \\ 3.02 & 12.16 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 519000 z \\ 10060 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{90} = \begin{bmatrix} 12.16 & 3.02 & 0 \\ 3.02 & 155.7 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40500 z \\ 10060 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-0.3 \leq z \leq -0.15 \quad \text{برای لایه منفی بالا}$$

$$-0.15 \leq z \leq +0.15 \quad \text{برای لایه هاش 90}$$

$$0.15 \leq z \leq 0.3 \quad \text{برای لایه منفی پایین}$$



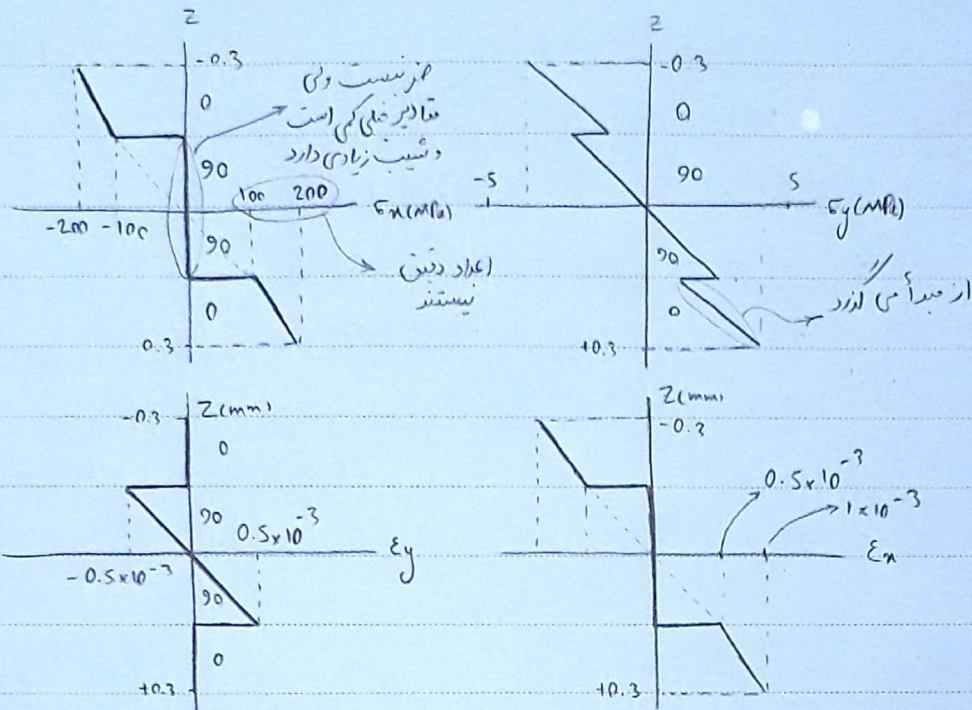
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_0$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix}_{90} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3.33 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_{90} = [T_{90}] \begin{Bmatrix} 40500 z \\ 10060 z \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10060 z \\ 40500 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ص. بعد



$$M_1 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \int_{-150 \times 10^{-6}}^{150 \times 10^{-6}} 519000 z^2 dz + \int_{-150 \times 10^{-6}}^0 40500 z^2 dz + \int_0^{150 \times 10^{-6}} 40500 z^2 dz + \int_{150 \times 10^{-6}}^{300 \times 10^{-6}} 519000 z^2 dz = 8.27 \left(\frac{N \cdot m}{m} \right)$$

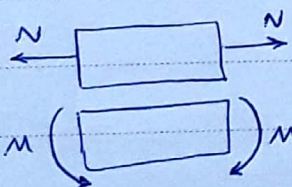
$$M_2 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = \int_{-150 \times 10^{-6}}^{150 \times 10^{-6}} 10050 z^2 dz = 0.1809 \left(\frac{N \cdot m}{m} \right)$$

$$M_1 \times L_y = 8.27 \times 0.125 = 1.033 (N \cdot m)$$

$$M_2 \times L_x = 0.1809 \times 0.25 = 0.0452 (N \cdot m)$$

Symmetric Laminate

حلانه 22



$$N = [A] \epsilon^0$$

$$M = [D] \kappa$$

(1) General or unsymmetric laminates ← حالت کلی

(2) تئوری تحریف ← چیدانه؟

ساله 2007-2013

آقای Soden ← 19 تئوری

Chapter 6: Properties of General Laminates

* در فصل های قبل در مورد تکه چند لایه متجانس با هندسه ثابت و تکه مار داخل منحنی با غش قرار گیرد، به ترتیب از طریق روابط $M = DK$ و $N = AE$ کلیه تنش و کرنش در تکه لایه های چند لایه متجانس اکتساب می گردد اما برای یک سری کاربردهای خاص منحنی تکه چند لایه های هوشمند طراحی کرد که مثلاً در اثر اعمال بار داخل منحنی یا بار غش به ترتیب غش و تغییر طول داخل منحنی در آن ها اتفاق شود. برای مثال مار هواپیما می تواند با تغییر لایه چینی به کوس طراحی شود که در اثر نیروی لیفت علاوه بر غش، همپیش در نوک تیر اتفاق شود و باعث شود که سرعت فلاپ در آن کنترل شود. در حقیقت با انتخاب لایه چینی مناسب می توان سازه های کامپوزیتی را به همدست هوشمند طراحی کرد.

* توجه شود در مورد تکه چند لایه متجانس نباشد در اثر کرنش تکه تاب بر روی دارد و یعنی N_1 باعث اتفاق K_1 در داخل تکه می شود.

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{h} \int \sigma_1 dz \longrightarrow N_1 = \int \sigma_1 dz$$

$$\sigma_1 = Q_{11} \epsilon_1 + Q_{12} \epsilon_2 + Q_{16} \epsilon_6$$

$$N_1 = \int \sigma_1 dz \longrightarrow N_1 = A_{11} \bar{\epsilon}_1 + A_{12} \bar{\epsilon}_2 + A_{16} \bar{\epsilon}_6$$

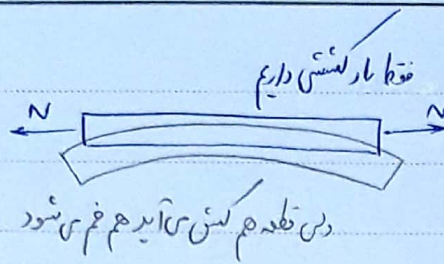
* از طرفی اگر همان کرنش منحنی + غش داشته باشیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1(z) = \bar{\epsilon}_1 + z K_1 \\ \epsilon_2(z) = \bar{\epsilon}_2 + z K_2 \\ \epsilon_6(z) = \bar{\epsilon}_6 + z K_6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ناشی از کرنش} \\ \text{ناشی از غش} \end{array}$$

$$N_1 = \int [Q_{11} (\bar{\epsilon}_1 + z K_1) + Q_{12} (\bar{\epsilon}_2 + z K_2) + Q_{16} (\bar{\epsilon}_6 + z K_6)] dz$$

* توجه مهم: در این رابطه غش ناشی از انتقال بین لایه نیست بلکه در اثر کرنش اتفاق شده است (نه ناشی از همان خارجی)

منبع



$$N_1 = \underbrace{\left(\int Q_{11} dz \right)}_{A_{11}} \dot{\epsilon}_1 + \underbrace{\left(\int Q_{12} dz \right)}_{A_{12}} \dot{\epsilon}_2 + \underbrace{\left(\int Q_{16} dz \right)}_{A_{16}} \dot{\epsilon}_6 + \underbrace{\left(\int Q_{11} z dz \right)}_{B_{11}} K_1 + \underbrace{\left(\int Q_{12} z dz \right)}_{B_{12}} K_2 + \underbrace{\left(\int Q_{16} z dz \right)}_{B_{16}} K_6$$

$$\Rightarrow N_1 = A_{11} \dot{\epsilon}_1 + A_{12} \dot{\epsilon}_2 + A_{16} \dot{\epsilon}_6 + B_{11} K_1 + B_{12} K_2 + B_{16} K_6$$

Similarly $\Rightarrow$

$$\begin{cases} N_2 = A_{21} \dot{\epsilon}_1 + A_{22} \dot{\epsilon}_2 + A_{26} \dot{\epsilon}_6 + B_{21} K_1 + B_{22} K_2 + B_{26} K_6 \\ N_6 = A_{61} \dot{\epsilon}_1 + A_{62} \dot{\epsilon}_2 + A_{66} \dot{\epsilon}_6 + B_{61} K_1 + B_{62} K_2 + B_{66} K_6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_i = A_{ij} \dot{\epsilon}_j + B_{ij} K_j \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$\begin{cases} A_{ij} \rightarrow [MN/m] \\ B_{ij} \rightarrow [kN] \\ D_{ij} \rightarrow [Nm] \end{cases}$$

توجه شود که واحدها را متفاوت قویف کردیم تا بتوانیم اعداد را با هم مقایسه کنیم.

* ماتریس B، ماتریس کوپلینگ نامیده می شود که اکتفا را به تنش های ضربه وصل می کند.

توجه شود برای لایه های تقارن، کلمه مؤلفه های ماتریس کوپلینگ B برابر صفر می باشد.

به همین ترتیب می توانیم کوپلینگ بین کرنش های صفحه ای و همان های فشرخ را نیز بدست آوریم.

من بعد

$$M_1 = \int \sigma_1 z dz = \int Q_{11} (\dot{\epsilon}_1 + z k_1) z dz + Q_{12} (\dot{\epsilon}_2 + z k_2) z dz + Q_{16} (\dot{\epsilon}_6 + z k_6) z dz$$

$$\Rightarrow M_1 = \underbrace{\int Q_{11} \dot{\epsilon}_1 z dz}_{B_{11} \dot{\epsilon}_1} + \underbrace{\int Q_{11} z^2 k_1 dz}_{D_{11} k_1} + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{M_i = B_{ij} \dot{\epsilon}_j + D_{ij} k_j}$$

$$\begin{cases} N_i = A_{ij} \dot{\epsilon}_j + B_{ij} k_j \\ M_i = B_{ij} \dot{\epsilon}_j + D_{ij} k_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon} \\ k \end{Bmatrix}$$

3×3 3×3
 3×3

در این ترازین کشش مسأله داده نمی شود
(باید صافیت منبسط)

	$\dot{\epsilon}_1$	$\dot{\epsilon}_2$	$\dot{\epsilon}_6$	k_1	k_2	k_6
N_1	A_{11}	A_{12}	A_{16}	B_{11}	B_{12}	B_{16}
N_2	A_{21}	A_{22}	A_{26}	B_{21}	B_{22}	B_{26}
N_6	A_{61}	A_{62}	A_{66}	B_{61}	B_{62}	B_{66}
M_1	B_{11}	B_{12}	B_{16}	D_{11}	D_{12}	D_{16}
M_2	B_{21}	B_{22}	B_{26}	D_{21}	D_{22}	D_{26}
M_6	B_{61}	B_{62}	B_{66}	D_{61}	D_{62}	D_{66}

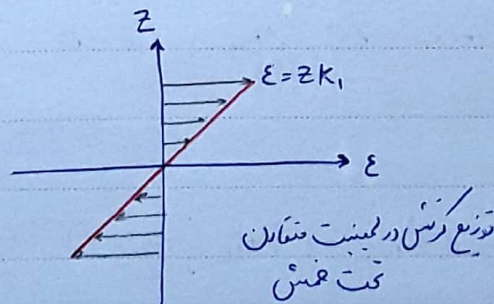
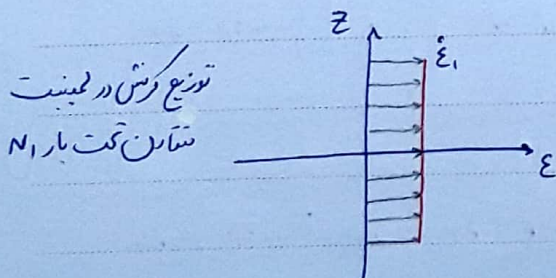
$$N = A \epsilon \rightarrow \epsilon = a N$$

$$M = D K \rightarrow K = d M$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon} \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

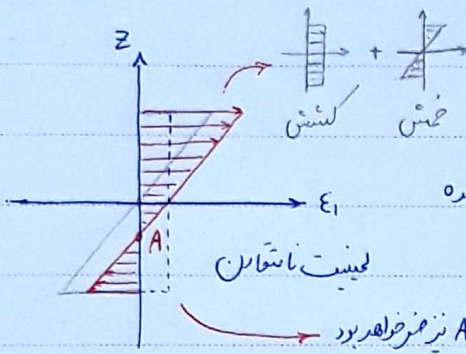
$$\alpha \neq A^{-1}, \beta \neq B^{-1}, \delta \neq D^{-1}$$

* Symmetric Laminates:



* همانطور که ملاحظه می شود در چیدانه متقارن N_1 مقدار کرنش همگانی ϵ_1 و M_1 مقدار کرنش k_1 را در چیدانه (یکبار) می کند

* در مورد سازه در یک چند لایه محوس (ناشایان) توزیع کرنش در اثر بار N_1 به صورت زیر خواهد شد:



در این حالت چون لمینیت ناشایان است، در اثر کشش N_1 ، در لمینیت آتاشده

است. توده متراکم است K_2 ، K_6 م آتاشده باشند.

تاریخ با آتاشده و تنش در A نیز خواهد بود

* Evaluation of Components of Modulus:

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, z^2) dz$$

$$\text{مثلا } [A_{11}, B_{11}, D_{11}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (1, z, z^2) dz = \int_{-h/2}^{h/2} (U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta) (1, z, z^2) dz$$

$$= U_1 \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) dz + U_2 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta (1, z, z^2) dz + U_3 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta (1, z, z^2) dz$$

$$= U_1 (h, 0, \frac{h^3}{12}) + U_2 (V_{1A}, V_{1B}, V_{1D}) + U_3 (V_{2A}, V_{2B}, V_{2D})$$

$$\text{قبلا انجام شد} : V_{1A} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot dz, \quad V_{2A} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta \cdot dz$$

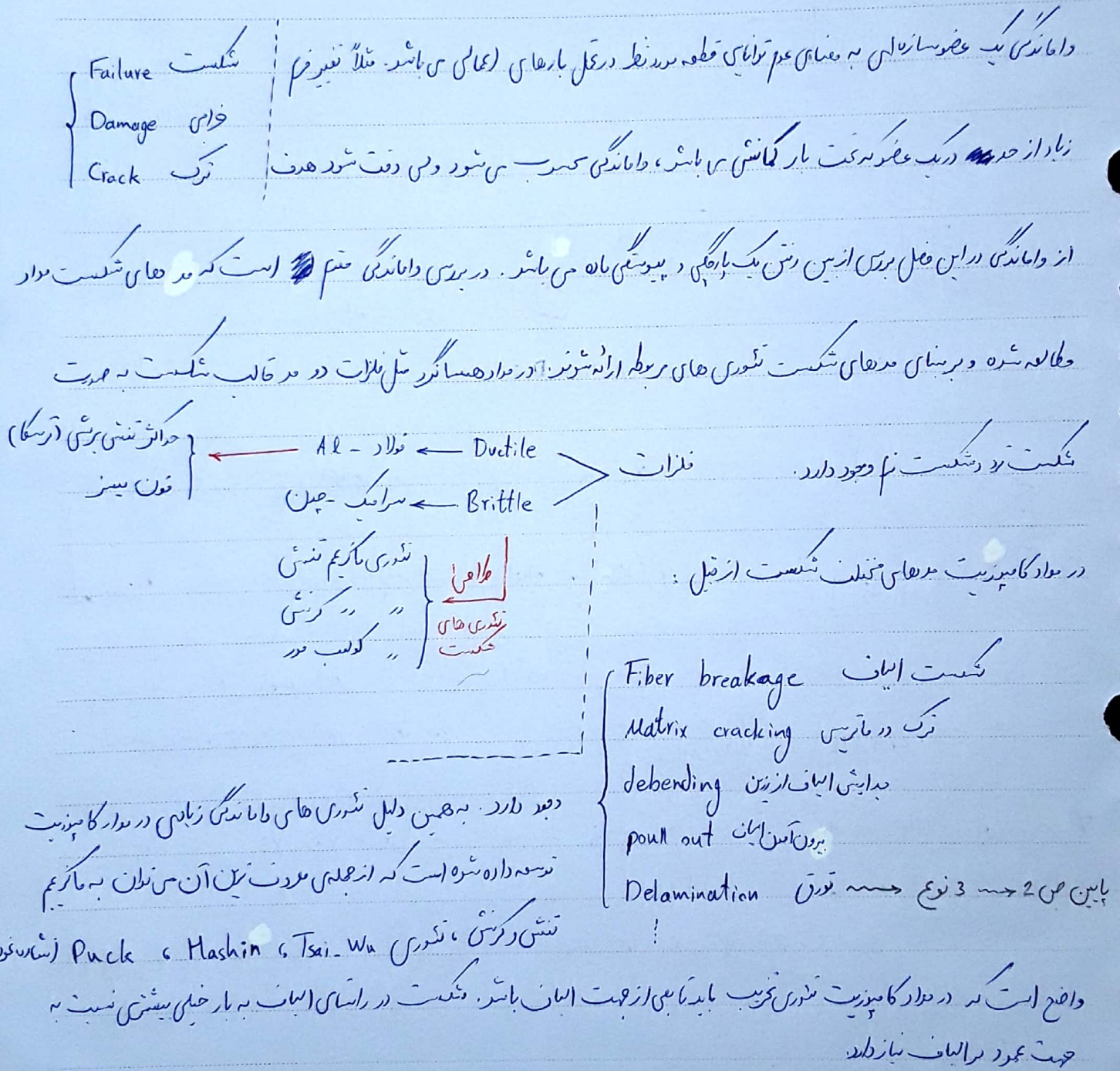
$$V_{1B} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z \cdot dz, \quad V_{2B} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta \cdot z \cdot dz, \quad V_{3B} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta \cdot z \cdot dz, \quad V_{4B} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta \cdot z \cdot dz$$

$$V_{1D} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z^2 \cdot dz, \quad V_{2D} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta \cdot z^2 \cdot dz, \quad V_{3D} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta \cdot z^2 \cdot dz, \quad V_{4D} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta \cdot z^2 \cdot dz$$

① «مقدمه سازی آزمونگاهی مواد مرکب پیشرفته» ← انتشارات علم و صنعت 1397

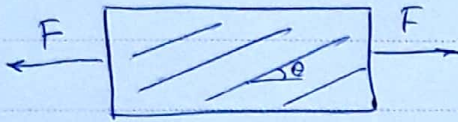
② «مبانی سافت مواد مرکب (کامپوزیت)» ← انتشارات نشر دانشگاهی 1398

* Failure theories of fiber-Reinforced Materials :

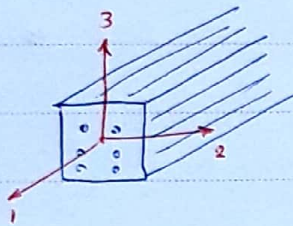


من بعد

مسئله: در یک قطعه کامپوزیت که الیاف در آن با زاویه θ قرار گرفته است تحت بارگذاری خارجی یک جهت با تحلیل تنش در قطعه های کامل تنش در جهت های مادی بدین مناسبت است که کدام یک از قطعه های تنش، تخریب در قطعه را کنترل می کنند.



مدهای دانه بندی در مدار کامپوزیت:

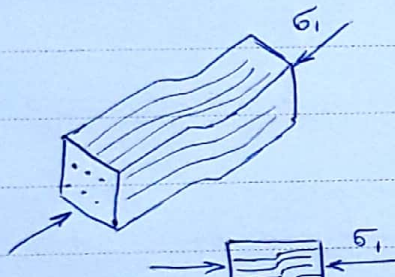


۱. اعمال بار در راستای الیاف (کشش)

استقامت در راستای الیاف X_t

ASTM D 3039

بدین آدرس E_m و ν_m



۲. اعمال بار در راستای ~~الیاف~~ (فشار) X_c

مردمست تحت بار فشار به دلیل حریف شدن الیاف (Kinking) یا

کمانش موضعی (Local Buckling) انباشتگی است یا microbuckling

واقع است که اگر در راستای الیاف جنس مات با الیاف ها رنگداری متفاوت باشد،

نسبت قطعه خیلی سریع تر از آن فرایند افتاد

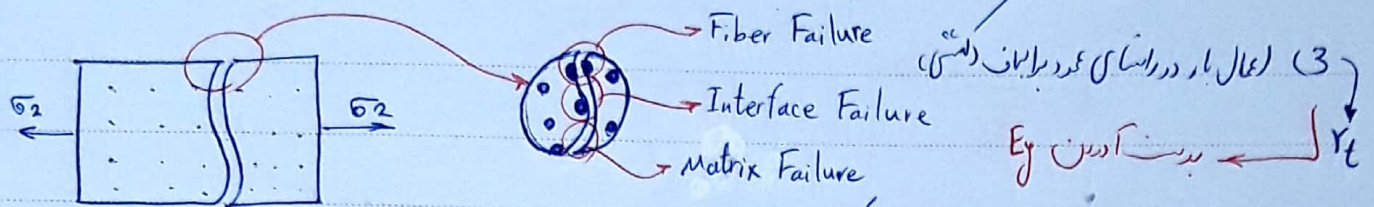
مثلاً $X_c = 800 \text{ MPa}$, $X_t = 2200 \text{ MPa}$

از لحاظ تئوری X_c و X_t یکسان است اما در عمل $X_c \leq X_t$ بدین مناسبت است. مثلاً در کربن اپوکسی $X_c < \frac{1}{2} X_t$

و در گلس اپوکسی نزدیک هم هستند.

مثلاً $X_c = 800 \text{ MPa}$, $X_t = 1000 \text{ MPa}$

من به



معمولاً دامانگی کشش در راستای عمود بر ایلاف بخاطر این از سه دمانگی به ترتیب زیر است:

- 1- دامانگی کشش ماتریس
- 2- دامانگی کشش ایلاف در راستای طولی
- 3- دامانگی سطح تماس بین ایلاف و رزین

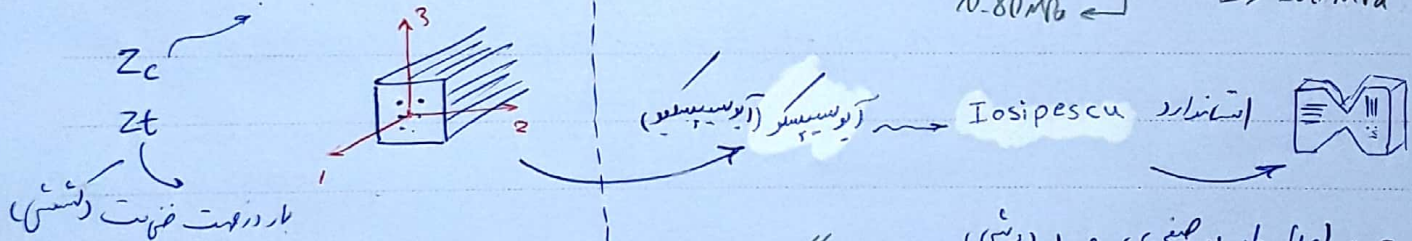
4- (ایحال بار در جهت عمود بر ایلاف (ضامن) Y_c)

معمولاً دامانگی ضامن در راستای عمود بر ایلاف در اثر فرود شدن ~~در~~ در شامل ایلاف، رزین و سطح تماس می باشد.

ضامن بیشتر از کشش است (برعکس Y_t و Y_c)

$Y_t \ll Y_c$
200 MPa
70-80 MPa

بار در جهت ضامن (ضامن)

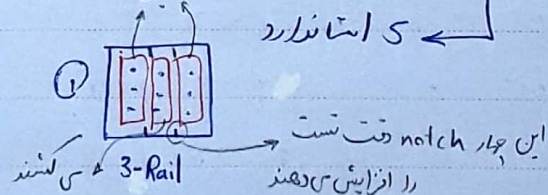


آیو سیپسکو (آیو سیپسکو)

5- (ایحال بار در جهتی 1-2 (برشی))

5 استاندارد

این دمانگی دارند



3-Rail

این چهار notch قوت تست را افزایش می دهند

بار در جهت ضامن (کشش)

شکست برشی

145°

3

4

5

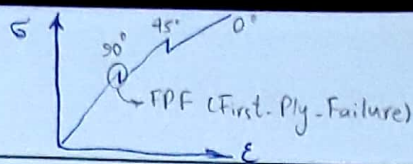
همان آیو سیپسکو

شکست در اثر برش ماتریس اتفاق می افتد. همان طور که گفته شد صفحه 1-3 و 1-2 خواص برابر دارند.

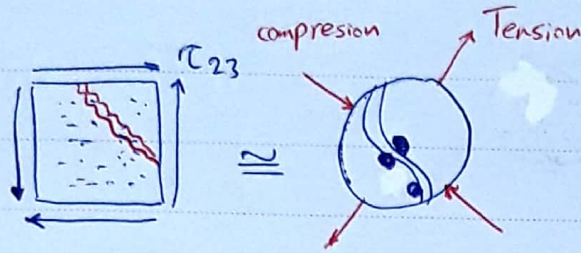
به همین دلیل $S_{xz} = S_{xy}$

مقاومت برشی داخلی

من بعد



محدودیت کرنش (لاستیک) در کرنش 90° است



(6) مقاومت برشی در جهته‌های 2-3

σ_{yz}

حلقه 24

* Maximum Stress & Strain Criteria:

یک گام سیزدهم در وضعیت محوری تنش در محوری چهار تریب می شود که:

- 1- تنش حداکثر در جهت ایستای اساسی یا بزرگتر از (استیکام) در همان جهت (X_c یا X_t) تحت تنش تک جهت در جهت ایستای در آرایشگاه باشد.
- 2- تنش حداکثر در جهت محوری بر ایستای اساسی یا بزرگتر از (استیکام) در همان راستا (Y_c یا Y_t) شود.
- 3- تنش حداکثر برشی داخل محورها (σ_{xy} یا σ_{yz}) بزرگتر یا اساسی (استیکام) برشی داخل محورها σ_{xy} شود.

* نریت تئوری ماکزیمم تنش:

حلقه‌های (6) در تریب

با استفاده از این تئوری مدولاس قطعه کاملاً شکنج می شود مثلاً اگر $(\sigma_x > X)$ باشد در تریب 1 یا 2
 اگر $(\sigma_y > Y)$ در تریب 2 یا 3
 اگر $(\sigma_{xy} > S)$ در تریب 4

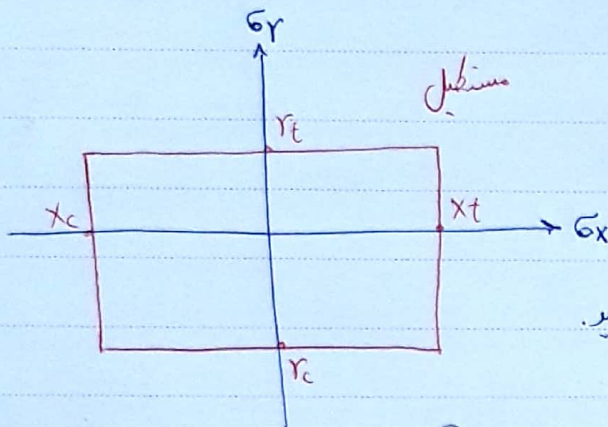
* عیب این تئوری: نسبتاً مشابه عیب معیار تریبکا در حواد آیزوتروپیک (به همین منظور از وزن مستر استناد می کردیم تا تأثیر دانه‌های دیگر تنش نیز لحاظ شود)

هیچ نقاط (interaction) بین مدولاسهای تنش وجود ندارد به همین دلیل پیش بینی تریب سازه بعضی وقت ها

over estimate و بعضی وقت ها underestimate می باشد.

من بعد

این تئوری ها چگونه در فزات گفته شد ، پوش منصف تحریک به صورت زیری باشد :



سؤال () در لایه منصف $[0, 90/0]_T$ بار (تائید) تحریک را به دست آورید.

ابتدا بار خارجی را از $\sigma = 0$ شروع کرده ، تکمیل تنش (تمام داده تنش در کلیه لایه ها را به دست می آوریم . سپس تنش در لایه را با «دران» به تنش های σ_{axis} تبدیل می کنیم . سپس با (استفاده از تئوری ماگنیم تنش مد فرانس را مشخص می کنیم . اگر فرانس اتفاق نیفتاده باشد دو راه حل وجود دارد :

راه حل اول (بار خارجی را به صورت پله ای زیاد کرده در مرحله تکمیل را گذار می کنیم تا نقطه تحریک پیدا شود .
راه حل دوم (پارامتری به نام نسبت تنش به صورت زیر تعریف کرده و از این پارامتر بدون تکرار تکمیل بار تحریک را به پیش بینی می کنیم .

(شروع ترک) $R=1 \rightarrow$ fail initiation

$R: \text{Stress Ratio} \quad \text{یا} \quad \text{Strength Ratio} \quad \text{یا} \quad \text{Load Ratio}$

$(R \rightarrow \infty) \rightarrow \sigma = 0$ (no loading) $\rightarrow$ بار به نسبت دارد که داریم

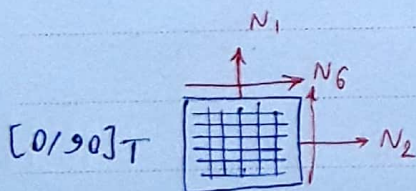
$R > 1 \rightarrow$ safe (before failure)

$R < 1 \rightarrow$ (after failure)

$$\frac{\sigma_m}{x} = \frac{1}{R_x} \quad \frac{\sigma_y}{y} = \frac{1}{R_y} \quad \frac{\sigma_s}{s} = \frac{1}{R_s}$$

* توجه شود که در صورتیکه رابطه تنش - کرنش تا رسیدن نقطه شکست خطی باشد از R استفاده می شود در غیر این صورت باید از همان روش اول به صورت incremental (پله ای) (استفاده شود) $\leftarrow$ بالایی ها قبل

سؤال () اگر تحت بارگذاری زیر تحریک اتفاق نیفتد ، آسانه تحریک کجاست ؟



	σ_m	σ_y	σ_{avg} [MPa]
0	200	10	150
90	-10	35	10

$$x_t = 400$$

$$x_c = 380$$

$$y_t = 40$$

$$y_c = 50$$

$$s = 180$$

* رفت شود که تفاوت در مقدار آنها با بزرگنمایی و بزرگتر کردن مقیاس کمدها قابل ردیت است. یعنی اگر مقیاس را دو برابر هر

در مقدار به همدرت یک خط داند با E یکسان (تشت یکسان) دیده می شوند و دیگر به همدرت به این مشاهده نمی شوند.

* علت تفاوت در مقدار (تشت) به دلیل نوع تست است. در حالت Load Control چون نیرو ثابت است (نیرو مانع یکسان)

دارد می شود در نتیجه تشت ثابت است (تشت مانع یکسانی افزایش می یابد) و به تبع آن طبق رابطه تشت-کشت $(\sigma = E \epsilon)$ $\epsilon \downarrow$ $\sigma \uparrow$

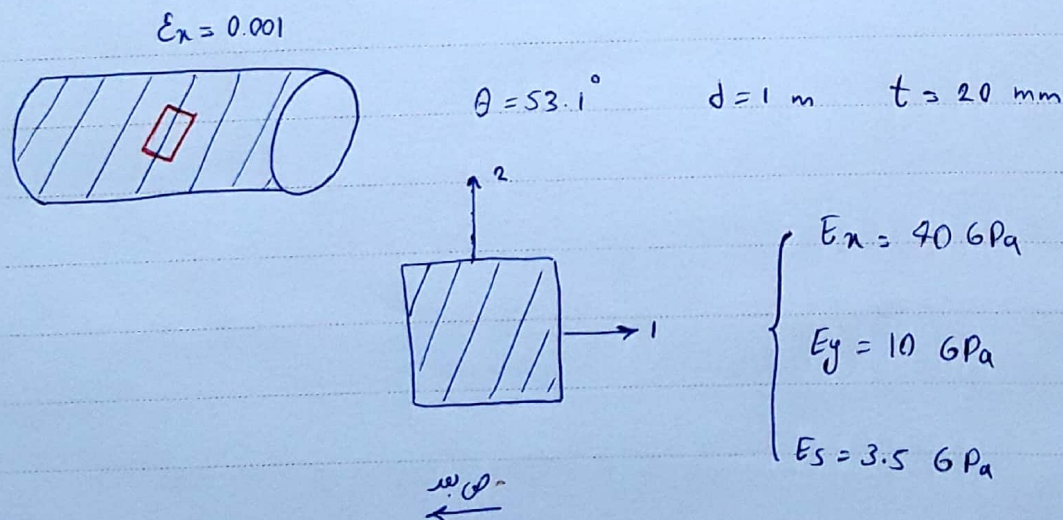
چون E نیز در حال کاهش است پس E باید افزایش یابد؛ همین دلیل نیز منجر در راستای افزایش E (خط افقی) اعتبار می یابد. در حالت

Displacement Control نیز چون نیغ خاکبایی (افزایش) یک دستگاه تست کشت ثابت است (مانع ثابتی ازم در می شوند) و چون E در

حال کاهش است در نتیجه طبق رابطه $(\sigma = E \epsilon)$ پس σ باید کاهش یابد؛ به همین دلیل نیز منجر در راستای کاهش σ (خط عمودی)

اعتبار می یابد. (ماها) نظریه که کنیم این خطوط افقی و عمودی که یک هستند و تنها در صورت بزرگنمایی قابل مشاهده می باشند.

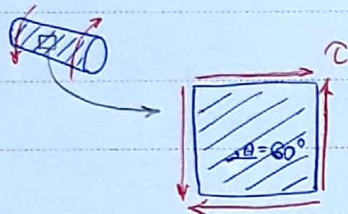
[TA] همان سئوال جلسات اول ← ص 46 جزوه



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{X_t} = \frac{1}{R_n} = \frac{1}{2} \rightarrow R_n = 2 \\ \frac{\sigma_y}{Y_t} = \frac{1}{R_y} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \rightarrow R_y = 4 \\ \frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{R_s} = \frac{150}{180} \rightarrow R_s = 1.2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{X_c} = \frac{1}{R_n} = \frac{10}{380} \rightarrow R_n = 38 \\ \frac{\sigma_y}{Y_t} = \frac{1}{R_y} = \frac{35}{40} \rightarrow R_y = 1.17 \\ \frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{R_s} = \frac{10}{180} \rightarrow R_s = 18 \end{array} \right.$$

الان منورده

* مثال) یک کامپوزیت یک لایه تک جهته carbon/epoxy با اینم تنش برش چهقدر است؟



$$E_x = 181 \quad E_y = 10.3 \quad \nu_{xy} = 0.28 \quad E_s = 7.17$$

$$X_{tc} = 1500 \text{ MPa}, Y_t = 40, Y_c = 264, S = 68$$

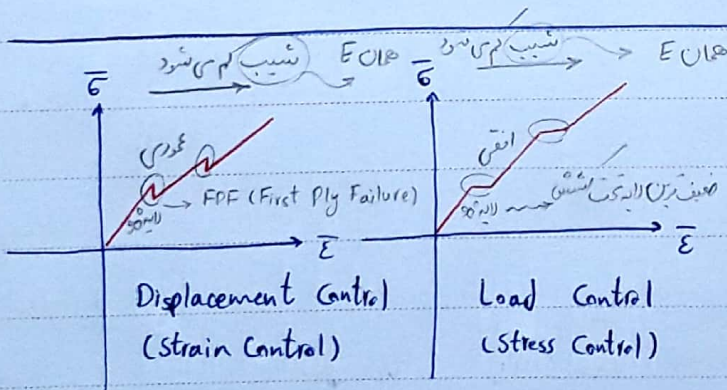
$$\tau = 136 \text{ MPa} \text{ شیب}$$

جواب:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \\ -0.433 & 0.433 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \tau \end{array} \right\}$$

نشان (هندسی) اهمیت علامت در کامپوزیت ها

$$\left\{ \begin{array}{l} X_c < \sigma_x < X_t \\ Y_c < \sigma_y < Y_t \\ -S < \sigma_{xy} < S \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1500 < 0.866\tau < 1500 \rightarrow -1732 \text{ MPa} < \tau < 1732 \\ -264 < -0.866\tau < 40 \rightarrow -46.19 < \tau < 304.85 \text{ MPa} \\ -68 < -0.5\tau < 68 \rightarrow -136 < \tau < 136 \text{ MPa} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau^+ = 136 \text{ MPa} \\ \tau^- = -46.19 \text{ MPa} \end{array} \right.$$



سوال: منحنی تنش کرنش کامپوزیت چند لایه چگونه است؟

تحت کرنش

جواب: بستگی دارد که تحت کرنش یا به صورت Load Control

است یا به صورت Displacement Control یعنی در حقیقت داریم تنش را کنترل می کنیم یا کرنش را.

* تمام منحنی های رسم شده در هر دو حالت از مبدأ می گذرند (چون وقتی نیروی وارد نشود جابجایی هم وجود ندارد درست)

در نقطه در هر دو حالت شیب نمودار در حال کاهش است یعنی با Fail کرن هر صفحه، منحنی کل در حال کاهش است بدین است!

$$X_T = 1062 \text{ MPa} \quad Y_T = 31 \text{ MPa} \quad Y_c = 118 \text{ MPa} \quad X_c = 670 \text{ MPa}$$

$$S = 72 \text{ MPa} \rightarrow (\text{استقامت برش دافض منتهای})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.64 & 0.96 \\ 0.64 & 0.36 & -0.96 \\ -0.48 & 0.48 & -0.28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{P_r}{2t} \\ \frac{P_r}{t} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x = 0.36 \frac{P_r}{2t} + 0.64 \frac{P_r}{t} \\ \sigma_y = 0.64 \frac{P_r}{2t} + 0.36 \frac{P_r}{t} \\ \sigma_s = -0.48 \frac{P_r}{2t} + 0.48 \frac{P_r}{t} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \quad \epsilon_x = S_{xx} \sigma_x + S_{xy} \sigma_y + S_{xs} \sigma_s$$

$$\Rightarrow 0.001 = \frac{1}{40} (0.82 P \times \frac{500}{20}) - \frac{0.25}{40} (0.68 \times \frac{500}{20}) \rightarrow 0.40625 P = 0.001 \Rightarrow P = 2.462 \text{ MPa}$$

* Maximum Stress Failure :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_x}{X_T} < 1 \xrightarrow{\text{سادگی تقسیم تا آنجا که نزدیک باشد}} 0.82 \frac{P_r}{t} = 1062 \rightarrow P_1 = 51.8 \text{ MPa} > 2.462 \\ \frac{\sigma_y}{Y_T} < 1 \rightarrow \sigma_y \rightarrow (*) \\ \frac{\sigma_s}{S} < 1 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \rightarrow 0.68 \frac{P_2 r}{t} = 31 \rightarrow P_2 = 1.82 \text{ MPa} \quad (**) \rightarrow 0.24 \frac{P_3 r}{t} = 72 \rightarrow P_3 = 12 \text{ MPa} > 2.462$$

$$P_a = \min\{P_1, P_2, P_3\} \Rightarrow P = 1.82 \text{ MPa} < 2.462 \text{ (Matrix Cracking in Tension)} \checkmark$$

تمرین: لایه های کربن/اپوکسی و گلاس/اپوکسی cross-ply را با توجه به خواص زیر در یک لایه مرکب قرار دهید.

۱۹ Tsai

[خواص مکانیکی از کتاب Tsai استفاده شود]

	E_x (GPa)	E_y (GPa)	ν_m	E_s (GPa)
I Carbon/Epoxy	181	10.3	0.28	7.17
II Glass/Epoxy	38.6	8.27	0.26	4.14

$$\frac{\nu_m}{E_m} = \frac{\nu_y}{E_y} \Rightarrow \nu_y = \frac{\nu_m E_m}{E_y}$$

$$\nu_y^I = \frac{0.28 \times 181}{10.3} = 0.015934$$

$$\nu_y^{II} = \frac{0.26 \times 38.6}{8.27} = 0.055705$$

$$Q_{xx} = \frac{E_x}{1 - \nu_m \nu_y}$$

$$Q_{xx}^I = 181.811 \text{ (GPa)}$$

$$Q_{xx}^{II} = 39.167 \text{ (GPa)}$$

$$Q_{xy} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_m \nu_y}$$

$$Q_{xy}^I = 2.897 \text{ (GPa)}$$

$$Q_{xy}^{II} = 2.182 \text{ (GPa)}$$

$$Q_{yy} = \frac{E_y}{1 - \nu_m \nu_y}$$

$$Q_{yy}^I = 10.346 \text{ (GPa)}$$

$$Q_{yy}^{II} = 8.392 \text{ (GPa)}$$

$$Q_{ss} = E_s$$

$$Q_{ss}^I = 7.17 \text{ (GPa)}$$

$$Q_{ss}^{II} = 4.14 \text{ (GPa)}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \end{Bmatrix}$$

Carbon/Epoxy	I	76.368	85.733	19.710	22.607	26.880
Glass/Epoxy	II	19.325	13.888	2.954	5.136	7.094

		U_2	U_3
A_{11}^*	U_1	0	1
A_{22}^*	U_1	0	1
A_{12}^*	U_4	0	-1
A_{66}^*	U_5	0	-1
A_{16}^*	0	0	0
A_{26}^*	0	0	0

$$[O_2/90_2]_T \rightarrow \nu_0 = \nu_{90} = \frac{1}{2}$$

$$[A]^*_{Carbon/Epoxy} = \begin{bmatrix} 96.078 & 2.897 & 0 \\ 2.897 & 96.078 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ (GPa)} \xrightarrow{\text{inverse}} [a_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 10.418 & -0.314 & 0 \\ -0.314 & 10.418 & 0 \\ 0 & 0 & 139.470 \end{bmatrix} \text{ (TPa)}^{-1}$$

$$[A]^*_{Glass/Epoxy} = \begin{bmatrix} 22.279 & 2.182 & 0 \\ 2.182 & 22.279 & 0 \\ 0 & 0 & 4.14 \end{bmatrix} \text{ (GPa)} \xrightarrow{\text{inverse}} [a_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 45.320 & -4.439 & 0 \\ -4.439 & 45.320 & 0 \\ 0 & 0 & 241.546 \end{bmatrix} \text{ (TPa)}^{-1}$$

	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\epsilon}_6$		$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_6$	
$\bar{\sigma}_1$	A_{11}^*	A_{12}^*	A_{16}^*	inverse $\rightarrow$	$\hat{\epsilon}_1$	a_{11}^*	a_{12}^*	a_{16}^*
$\bar{\sigma}_2$	A_{21}^*	A_{22}^*	A_{26}^*		$\hat{\epsilon}_2$	a_{21}^*	a_{22}^*	a_{26}^*
$\bar{\sigma}_6$	A_{61}^*	A_{62}^*	A_{66}^*		$\hat{\epsilon}_6$	a_{61}^*	a_{62}^*	a_{66}^*

Carbon/Epoxy: $a_{16}^* = a_{26}^* = a_{61}^* = a_{62}^* = 0$

Glass/Epoxy: $a_{16}^* = a_{26}^* = a_{61}^* = a_{62}^* = 0$

$$\hat{\nu}_{21} = \frac{-a_{12}^*}{a_{11}^*} = -0.0301 \quad \text{مقدار ضعیف}$$

$$\hat{\nu}_{21} = \frac{-a_{12}^*}{a_{11}^*} = -0.0979 \quad \text{مقدار ضعیف}$$

$$\hat{\nu}_{12} = \frac{-a_{21}^*}{a_{22}^*} = -0.0301 \quad \text{" "}$$

$$\hat{\nu}_{12} = \frac{-a_{21}^*}{a_{22}^*} = -0.0979 \quad \text{" "}$$

$$\hat{\nu}_{61} = \frac{a_{16}^*}{a_{11}^*} = 0$$

$$\hat{\nu}_{61} = \frac{a_{16}^*}{a_{11}^*} = 0$$

$$\hat{\nu}_{16} = \frac{a_{61}^*}{a_{66}^*} = 0$$

$$\hat{\nu}_{16} = \frac{a_{61}^*}{a_{66}^*} = 0$$

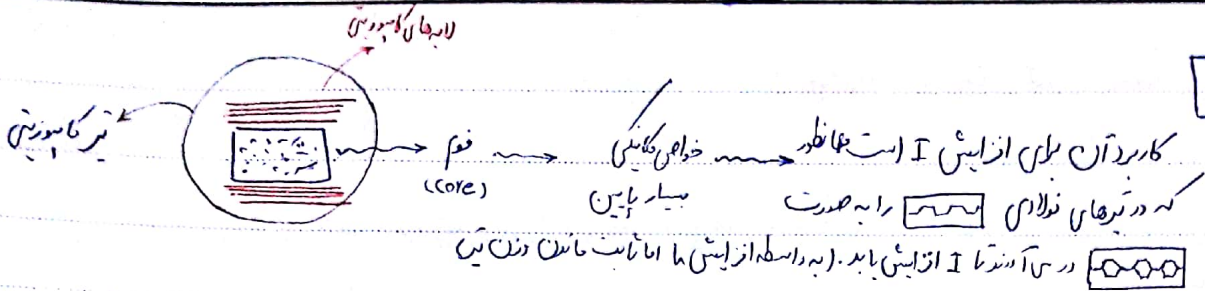
$$\hat{\nu}_{26} = \frac{a_{62}^*}{a_{66}^*} = 0$$

$$\hat{\nu}_{26} = \frac{a_{62}^*}{a_{66}^*} = 0$$

$$\hat{\nu}_{62} = \frac{a_{26}^*}{a_{22}^*} = 0$$

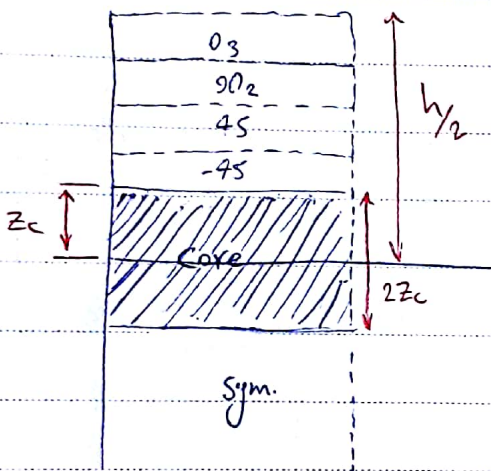
$$\hat{\nu}_{62} = \frac{a_{26}^*}{a_{22}^*} = 0$$

* نتیجه گیری که ضریب بواسون این نوع لایه چینی در حدود ضعیف باشد.



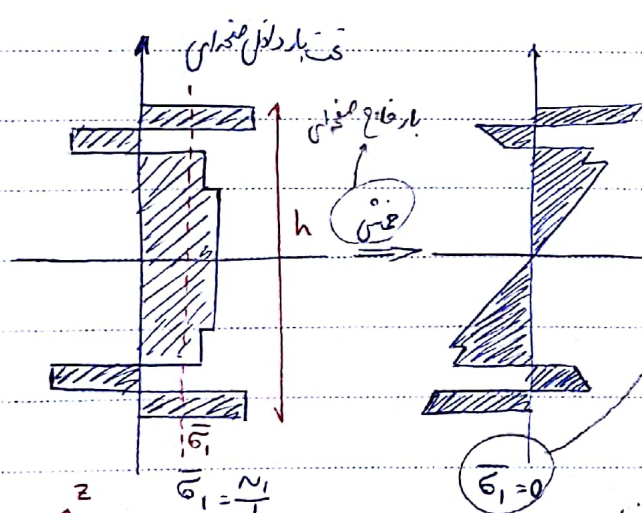
Chapter 5) Flexural Stiffness of Symmetric Sandwich Laminates

* با استفاده از فرم بدون افزایش وزن سیم I مقطع را افزایش داده و ظرفیت باربری خمشی چند لایه را (افزایش دهم). معمولاً در بدنه‌ی قاب‌ها



هوایی‌ها و دهانه‌هایی که خمشی لازم داریم، از فرم استفاده می‌شود.

مثلاً $[0_3 / 90_2 / 45 / -45 / Z_c]$ (core)
فردی یا تیر ۱۵
 $[0 / 90 / 11.10]_S$



* برای رفع مشکل در این حالت به طایقی تنش منتهی از همان نتیجه استفاده می‌شود.

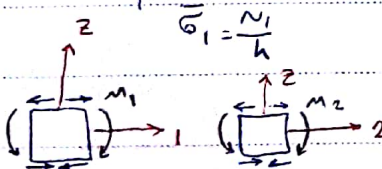
M_1, M_2, M_6 همان بار داخل عرض laminate هستند.

اگر تنش متوسط در نمایی بالایی مثبت باشد، همان مثبت است.

منفی ... منفی ...

* در صورتی که تنش برشی در نمایی بالایی مثبت باشد، همان بیضی مثبتی باشد.

همان برشی داخلی منتهی

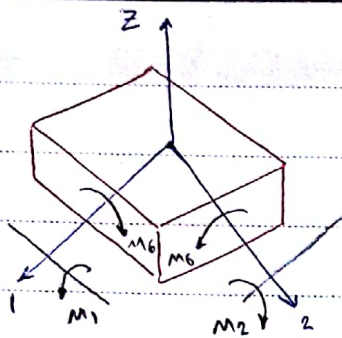


همان طایقی خمشی (bending moment)

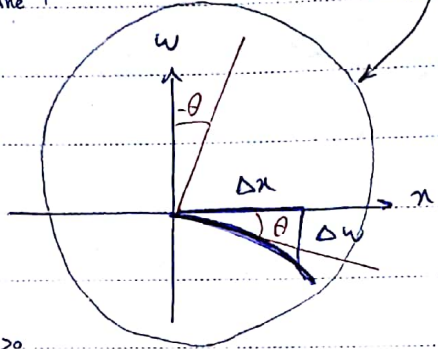
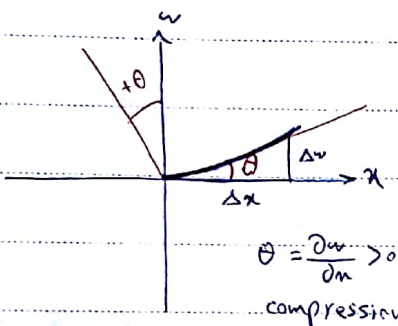
همان طایقی خمشی

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \cdot z \cdot dA \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \cdot z \cdot dA \\ M_6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 \cdot z \cdot dA \end{aligned}$$

همان بیضی (twisting moment)

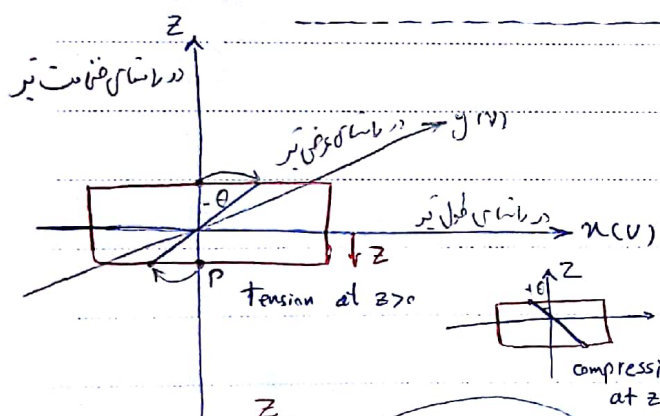


دقت شده در محاسبات را نسبت به صورتی مبانی تیر کامپوزیتی انجام می دهیم



$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} < 0$
tension at $z > 0$

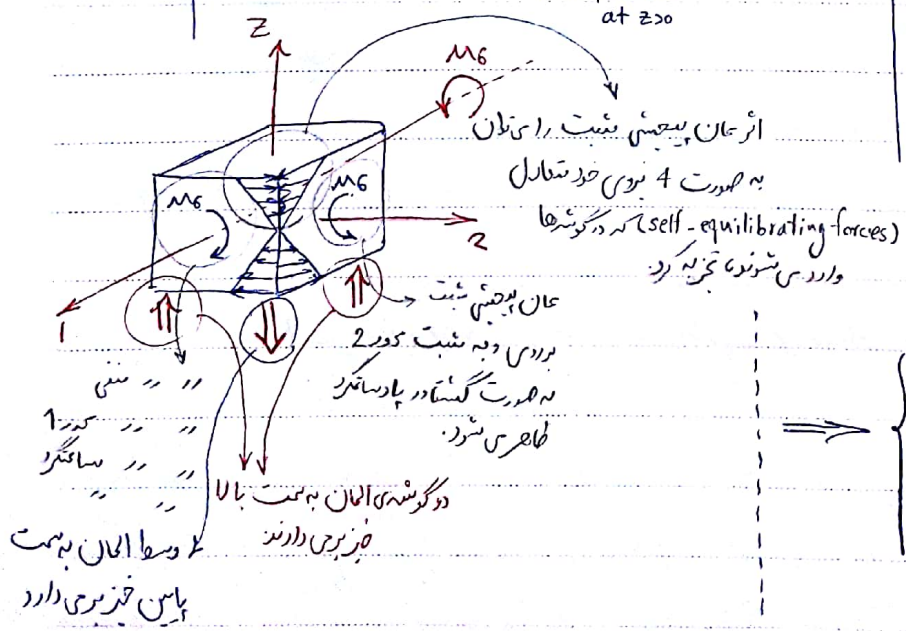
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}$$



تنش $P = U = -z \frac{\partial w}{\partial x}$
بهین ریب $v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$

نسبت به اینها در تعادلت مصالح

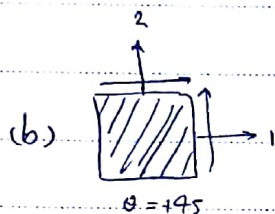
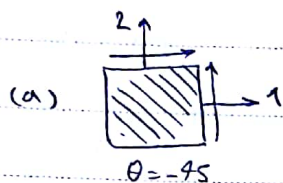
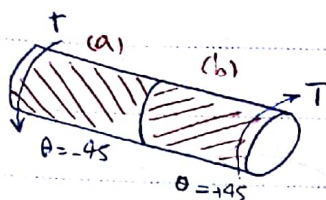
$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} k_1 \\ \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} k_2 \\ \epsilon_6 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} k_6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \epsilon_1(z) = z \cdot k_1 \\ \epsilon_2(z) = z \cdot k_2 \\ \epsilon_6(z) = z \cdot k_6 \end{cases}$$

تمرین (تغییر شکل استوانه در جهت شعاعی (قطر) ؟

TA



$$S_{26} = 2mn^3 S_{xx} - 2m^3n S_{yy} + 2(m^3n - mn^3) S_{xy} + (m^3n - mn^3) S_{ss}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = [S_{ij}] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} i, j = 1, 2, 6 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{16} \cdot \sigma_6 \\ S_{26} \cdot \sigma_6 \\ S_{66} \cdot \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

تغییر قطر

(a) $\theta = -45 \rightarrow S_{26} = -\left(\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2}\right) > 0$ و $E_x \gg E_y \Rightarrow S_{26} > 0$

$\sigma_6 > 0 \Rightarrow S_{26} \cdot \sigma_6 > 0 \Rightarrow \epsilon_2 > 0 \Rightarrow$ افزایش قطر

(b) $\theta = +45 \rightarrow S_{26} = \left(\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2}\right) < 0$, $\sigma_6 > 0 \Rightarrow \epsilon_2 = S_{26} \cdot \sigma_6 < 0 \Rightarrow$ کاهش قطر

* نکته: اگر در طرف عمود بر جهت تابش تنش داریم ، یعنی در ماتریس تنش باید حواسمان باشد که تنش $\sigma_t = \frac{Pr}{2t}$

نیایم دایره $\sigma_h = \frac{Pr}{t}$
hoop stress

Moment Curvature Relations: $N = A\epsilon \sim \epsilon$ (مکان و ن)

20 نمره

$$\{M\} = [D]\{k\} \quad M_1 = \int \sigma_1 \cdot z \cdot dz = \int (Q_{11}\epsilon_1 + Q_{12}\epsilon_2 + Q_{16}\epsilon_6) \cdot z \cdot dz$$

$$= \int (Q_{11}k_1 + Q_{12}k_2 + Q_{16}k_6) \cdot z^2 \cdot dz$$

$$\Rightarrow M_1 = \underbrace{\left[\int Q_{11} \cdot z^2 \cdot dz \right]}_{D_{11}} k_1 + \left[\int Q_{12} \cdot z^2 \cdot dz \right] k_2 + \left[\int Q_{16} \cdot z^2 \cdot dz \right] k_6$$

$$\Rightarrow M_1 = D_{11} \cdot k_1 + D_{12} \cdot k_2 + D_{16} \cdot k_6 \rightarrow \text{Similarity: } M_2 = \dots$$

$$D_{11} = \int Q_{11} \cdot z^2 \cdot dz$$

$$D_{12} = \int Q_{12} \cdot z^2 \cdot dz$$

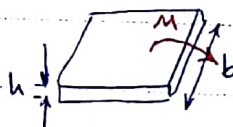
$$D_{16} = \int Q_{16} \cdot z^2 \cdot dz$$

$$\text{مکان و ن} = \frac{M}{b}$$

	k_1	k_2	k_6		M_1	M_2	M_6	
M_1	D_{11}	D_{12}	D_{16}	$\xrightarrow{\text{inverse}}$	k_1	d_{11}	d_{12}	d_{16}
M_2	D_{12}	D_{22}	D_{26}		k_2	d_{12}	d_{22}	d_{26}
M_6	D_{61}	D_{62}	D_{66}		k_6	d_{61}	d_{62}	d_{66}

* Effective flexural engineering constants.

$$M_1 \neq 0, M_2 = M_6 = 0 \rightarrow k_1 = d_{11} \cdot M_1 = d_{11} \cdot \frac{M}{b} \quad (1)$$



Rigidity: $EI = \frac{M}{k_1} \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow EI = \frac{b}{d_{11}} \quad E = E_f = \frac{b}{I \cdot d_{11}}, \quad I = \frac{bh^3}{12}$

$$E_1 = E_1^f = \frac{12}{h^3 \cdot d_{11}} \xrightarrow{\text{به ترتیب}} E_2 = E_2^f = \frac{12}{h^3 \cdot d_{22}}, \quad E_6^f = \frac{12}{h^3 \cdot d_{66}}$$

$$\nu_{21}^f = -\frac{d_{21}}{d_{11}}, \quad \nu_{61}^f = \frac{d_{61}}{d_{11}}, \quad \nu_{62}^f = \frac{d_{62}}{d_{22}}$$

مغنی نورد چون برش است

* Evaluation of flexural Modulus:

$$D_{11} = \int Q_{11} \cdot z^2 dz = \int [U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta] z^2 dz$$

$$= U_1 \int z^2 dz + U_2 \int \cos 2\theta \cdot z^2 dz + U_3 \int \cos 4\theta \cdot z^2 dz$$

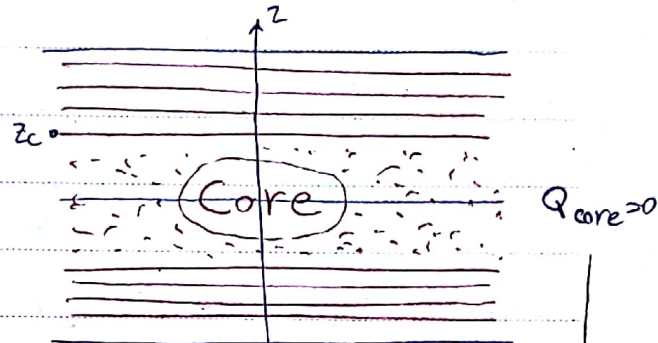
نظر از z، تابع z است (در محل دایره مرکزی)

$$= U_1 h^* + U_2 V_{12} + U_3 V_{22}$$

$$h^* = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = 2 \int_{z_c}^{h/2} z^2 dz$$

core

$$h^* = \frac{h^3}{12} \left[1 - \left(\frac{z_c}{h/2} \right)^3 \right] = \frac{h^3}{12} (1 - z_c^{*3})$$



پس در آن استرال را در نظر می گیریم

$$z_c^* = \frac{2z_c}{h} \quad , \quad V_{12} = 2 \int_{z_c}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z^2 dz \quad , \quad V_{22} = 2 \int_{z_c}^{h/2} \cos 4\theta \cdot z^2 dz$$

به همین ترتیب مقادیر Dها بدست می آید

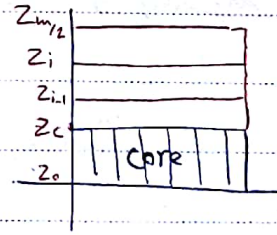
	h^*	U_2	U_3
D_{11}	U_1	V_{12}	V_{22}
D_{22}	U_1	$-V_{12}$	V_{22}
D_{12}	U_4	0	$-V_{22}$
D_{66}	U_5	0	$-V_{22}$
D_{16}	0	$\frac{1}{2} V_{32}$	V_{42}
D_{26}	0	$\frac{1}{2} V_{32}$	$-V_{42}$

$$V_{12} = 2 \int_{z_c}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z^2 dz = 2 \int_{z_c}^{h/2} [\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta] z^2 dz$$

(از اینجا Vها)

$$V_{12} = 2 \int_{z_c}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z^2 dz = \frac{2}{3} \sum_{i=c+1}^{n/2} \cos 2\theta_i (z_i^3 - z_{i-1}^3)$$

$$V_{12}^* = \frac{12}{h^3} V_{12}$$



* یادداشتی :

Ex: Flexural Modulus of cross-ply laminates:

θ_i	$\cos 2\theta_i$	$\cos 4\theta_i$	$\sin 2\theta_i$	$\sin 4\theta_i$
0	1	1	0	0
90	-1	1	0	0

۴. در بازدارنی داخل مغه لن که جلسات قبل توضیح داده شد طبق CLT ترتیب چین لایه ها هیچ تأثیری در ماتریس سفتی و نتایج مربوطه نداشت ولی توجه شود که در بخش ترتیب چین لایه ها تأثیر سبزی در مولفه های ماتریس [D] و نتایج مربوطه دارد.

برای نشان دادن این اثر از یک laminate با ۱۶ لایه با سرچیدن مختلف به شکل زیر استفاده خواهیم کرد:

④ cross-ply $\rightarrow [0/90]_s \& [0/90]_T$

هر یک یکی می توانند باشند

$$[0/90]_{2S} = [0/90/0/90]_S$$

⑥ angle-ply $\rightarrow [\pm \phi]$

④ quasi-isotropic $\rightarrow [0/60/-60]_s$

⊕ symmetric $\rightarrow [0, +30]_5 = [0/30/30/0]$

⊙ anti-symmetric $\rightarrow [0/\oplus 30/30/0]$

④ balance laminate $\rightarrow [0/ + 30/0/-30]$

اگر هر فردی را دوام باید قرن نسی آن ماهیان تعداد →
تزد دور باشد.

		0 2	0	90
$\frac{h}{2}$	04	90 2	0	90
			0	90
		0 2	0	90
	904	90 2	0	90

$T_{300/5208}$, 16 plies, $t_{ply} = 125 \times 10^{-6} \text{ m}$.

$$t_{\text{laminar}} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$m=4$ $m=8$ $m=16$
 $[04/904]_5$ $[(02/902)_2]_5$ $[0/90]_{45}$
 $= [0/90]_{25}$

$$(b) \text{ (ii) } m=4 : \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1z} = 5 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \\ \psi_{2z} = 6.7 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \\ \psi_{3z} = \psi_{4z} = 0 \end{array} \right. , \quad m=8 \left\{ \begin{array}{l} \sim \\ \sim \\ \sim \end{array} \right. , \quad m=16 \left\{ \begin{array}{l} \sim \\ \sim \\ \sim \end{array} \right.$$

$$V_{21} = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{3}{m}, \quad V_{22} = \frac{h^3}{12}, \quad V_{23} = V_{24} = 0$$

$$b. \begin{cases} \sqrt{z_1} = \frac{3}{m} \\ \sqrt{z_2} = 1 \\ \sqrt{z_3} = \sqrt{z_4} = 0 \end{cases}$$

$$z_c = 0$$

$$D_{ij}^* = \frac{D_{ij}}{L_i^*} \quad D_{16} = D_{26} = D_{16}^* = D_{26}^* = 0$$

	1	U_2	U_3
D_{11}^+	U_1	$\frac{3}{m}$	1
D_{22}^+	U_1	$-\frac{3}{m}$	1
D_{12}^+	U_2	0	-1
D_{16}^+	U_5	0	-1

متغیر در ۳ لایه چینی

ثابت در ۳ لایه چینی

$$m=4 \rightarrow D_{ij} = \begin{bmatrix} 106.9 & 1.93 & 0 \\ 1.93 & 21.18 & 0 \\ 0 & 0 & 4.78 \end{bmatrix} (N.m), \quad d_{ij} = \begin{bmatrix} 9.36 & -0.85 & 0 \\ -0.85 & 92.27 & 0 \\ 0 & 0 & 209.2 \end{bmatrix} (kN.m)^{-1}$$

$$m=8 \rightarrow D_{ij} = \begin{bmatrix} 85.48 & 1.93 & 0 \\ 1.93 & 42.61 & 0 \\ 0 & 0 & 4.78 \end{bmatrix} (N.m), \quad d_{ij} = \begin{bmatrix} 11.7 & -0.53 & 0 \\ -0.53 & 23.48 & 0 \\ 0 & 0 & 209.2 \end{bmatrix} (kN.m)^{-1}$$

$$m=16 \rightarrow D_{ij} = \begin{bmatrix} 67.05 & 1.93 & 0 \\ 1.93 & 64.05 & 0 \\ 0 & 0 & 4.78 \end{bmatrix} (N.m), \quad d_{ij} = \begin{bmatrix} 15.62 & -0.471 & 0 \\ -0.471 & 15.62 & 0 \\ 0 & 0 & 209.2 \end{bmatrix} (kN.m)^{-1}$$

نکات:

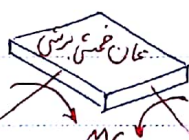
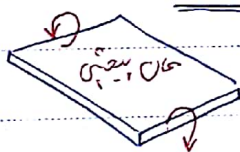
۱- مقدار D_{11} و D_{22} به ترتیب (لایه چینی) وابسته می باشد. هرچه ترتیب (لایه چینی) هگس تر باشد مقدار D_{11} و D_{22} با هم برابر می شود.

بیشتر m

۲- مؤلفه های پادسوز ماتریس سختی یعنی D_{12} و D_{21} بدون تغییر ثابت باقی ماند و به m وابسته نمی باشند. به عبارت دیگر اگر در راستای (۱) اتکا دارد شود (K_1) ، همان خمشی در راستای (۲) اتکا خواهد شد و می توان همان خمشی اتکا شده به m وابسته نمی باشد.

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_6 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{Bmatrix}$$

۳- مؤلفه های بیش ماتریس سختی با گروه (لایه ها) ثابت ماند و مستقل از ۴ مؤلفه های غیر از دیگر هستند. به عبارت دیگر اتکا در راستای (۱)



بابت اتکالی همان خمشی (m_6) در laminate نمی شود.

همان خمشی برشی
(با بقیه زوایای کند)

همچنین باید بدانیم که در وسط و بالا و پایین از سطح موجب پیچش می شود.

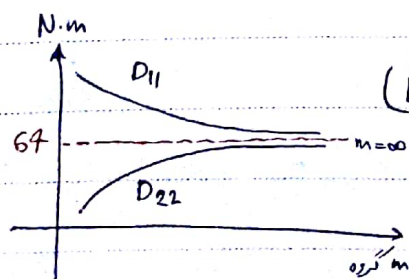
۴- در حالات D_{12} و D_{21} که مستقل از m بودند، D_{12} و D_{21} به m وابسته هستند. به عبارت دیگر همان خمشی در

راستای (۱) بابت اتکالی اتکا در راستای (۲) می باشد و این اتکا به ترتیب (لایه چینی) وابسته است.

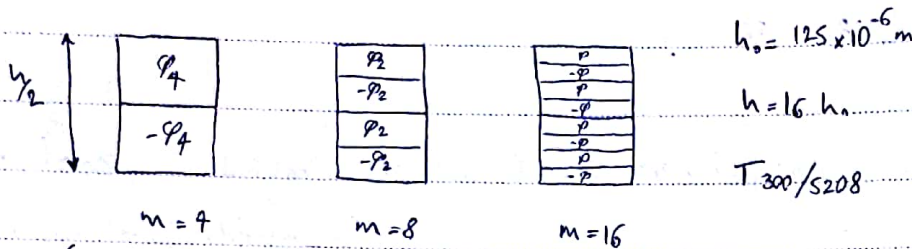
$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{Bmatrix} = [d] \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_6 \end{Bmatrix}$$

۵- مجموع مؤلفه های زوایای سختی ثابت هستند. $(D_{11} + D_{22} = \text{const})$

برای $T300/S208$



Flexural modulus of Angle ply laminates : $[\pm\phi]$ لایه های شیب



* در این نوع لایه چین ضرایب کوپلینگ بیش D_{61} و D_{62} برای $\pm\phi$ می باشد. هر چه زاویه کمتر باشد، این دو ضریب لایه ها به یکی (تساوی) شود که یعنی ضد قشبان باشد. بنابراین آنها در 3 حالت زیر ماتریس سفتی $[d]$ ارتعاشی خواهد شد:

$$\theta_i = +\phi \text{ و } -\phi \quad V_{z1} = 2 \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\phi \cdot z^2 \cdot dz = 2 \left[\int_{-h/4}^{h/4} \cos 2\phi \cdot z^2 \cdot dz + \int_{h/4}^{h/2} \cos(-2\phi) z^2 \cdot dz \right]$$

$$= \frac{h^3}{12} \cos 2\phi$$

(1) لایه تک جهت باشد
(2) " cross-ply "
(3) " قشبان "

$$V_{z1}^* = \frac{12}{h^3} V_{z1} \Rightarrow V_{z1}^* = \cos 2\phi$$

Similarly : $V_{z2}^* = \cos 2\phi$, $V_{z3}^* = \frac{3}{m} \sin 2\phi$, $V_{z4}^* = \frac{3}{m} \sin 4\phi$ ($m = 4, 8, 16$)

	1	U_2	U_3
D_{11}^*	U_1	$\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$
D_{22}^*	U_1	$-\cos 2\phi$	$\cos 4\phi$
D_{12}^*	U_4	0	$-\cos 4\phi$
D_{66}^*	U_5	0	$-\cos 4\phi$
D_{16}^*	0	$\frac{3}{m} \sin 2\phi$	$\frac{3}{m} \sin 4\phi$
D_{26}^*	0	$\frac{3}{m} \sin 2\phi$	$-\frac{3}{m} \sin 4\phi$

به دلیل عدم صفر شدن V_{z4} و V_{z3} ، چنانچه ارتعاشی نمی باشد
(D_{16} , $D_{26} \neq 0$)

$\Rightarrow$ if $m \rightarrow \infty$ then $D_{16} = D_{26} = 0$

$$D_{ij}^* = \frac{12}{h^3} D_{ij} \Rightarrow \text{if } z_c = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{ij}^* = \frac{12}{h^3} D_{ij} = \frac{1}{12} A_{ij} \\ D_{ij} = \frac{h^3}{12} A_{ij}, \quad d_{ij} = \frac{12}{h^3} a_{ij} \end{array} \right.$$

(نرم نرم)

if $\phi = 45^\circ$ $D_{16} = D_{26} = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{3}{2m} U_2 = \frac{1}{m} U_2 \times 10^{-9}$

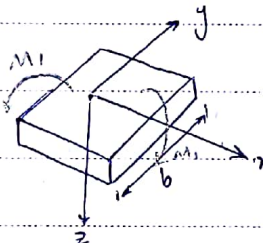
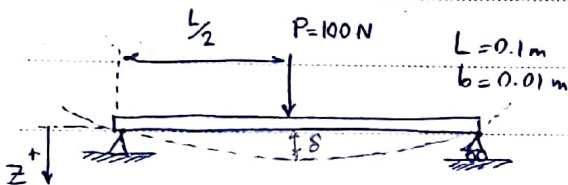
ص ص

$$\rightarrow D_{ij}^* = \begin{bmatrix} 56.65 & 42.31 & \frac{1}{m} 128.5 \\ 42.31 & 56.65 & \frac{1}{m} 128.5 \\ \frac{1}{m} 128.5 & \frac{1}{m} 128.5 & 46.59 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow D_{16}^* \\ \rightarrow D_{26}^* \\ \end{matrix}$$

* با جابجایی $m = 4, 8, 16$ در رابطه ماتریس D مشاهده می شود با افزایش گره لایه ها، کرنش برشی در D_{16} و D_{26} به سمت صفر میل نموده و رفتار خمینیّت به ارتوتروپیک نزدیک می شود.

* توجه شود در لمینیت های متعام D_{11} و D_{22} و D_{16} و D_{66} مستقل از گره لایه ها هستند. همچنین از ابتدا در $\varphi = 45^\circ$ ، $d_{11} = d_{22}$ می باشد.

مثال: تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت گرایش خمشی میده نظر می باشد.



$$[0.4 / 90.4]_s$$

$$T_{300/S208}$$

$$h_0 = 125 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$M = \frac{PL}{4} \text{ (مطابق)} \quad M_1 = \frac{PL}{4b} \text{ (در عرض b)} \quad M_2 = M_6 = 0$$

$$\{k\} = [d] \{m\} \rightarrow k_1 = d_{11} \frac{PL}{4b} \quad k_2 = d_{21} \frac{PL}{4b} \quad k_6 = 0$$

$$T_{300/S208} \xrightarrow{\text{Table}} \begin{cases} d_{11} = 9.36 \\ d_{21} = -0.85 \\ d_{61} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{11} = 2.34 \text{ m}^{-1} \\ k_{21} = -0.212 \text{ m}^{-1} \\ k_6 = 0 \end{cases}$$

$$(*) \text{ کرنش (رخنا) - کرنش} \quad \begin{cases} \epsilon_1 = z k_1 \\ \epsilon_2 = z k_2 \\ \epsilon_6 = 0 \end{cases} \quad \text{if } z = 8h_0 = 1 \times 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = 2.34 \times 10^{-3} \\ \epsilon_2 = -0.212 \times 10^{-3} \\ \epsilon_6 = 0 \end{cases}$$

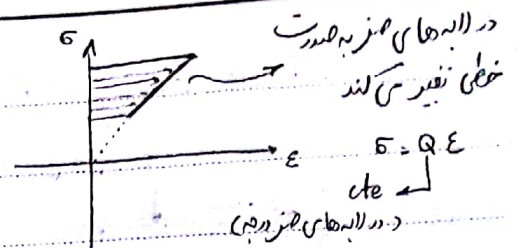
کرنش در بالاترین لایه (لایه صفر درجه)

پس کرنش های on-Axis هستند

صفر

از روابط تنش-کرنش در بالابرین لایه

$$\{\sigma\} = [Q]\{\epsilon\} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 424 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 7.57 \text{ MPa} \\ \sigma_6 = 0 \end{cases}$$

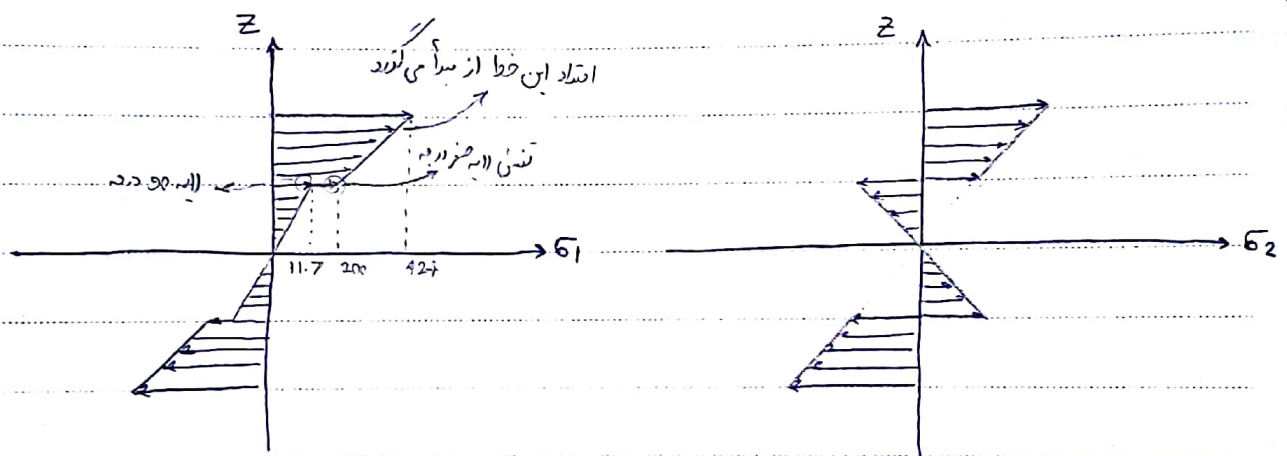
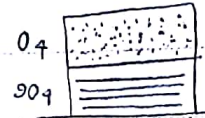


تنش ها در کمرش ها در بالابرین لایه گره ۳۰
 $\varphi = 90^\circ$

$$z = 4h_0 = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (*) \quad \begin{cases} \epsilon_1 = 1.17 \times 10^{-3} \\ \epsilon_2 = -0.106 \times 10^{-3} \\ \epsilon_6 = 0 \end{cases}$$

از روابط تنش-کرنش

$$\begin{cases} \sigma_1 = 11.7 \\ \sigma_2 = -15.88 \text{ (MPa)} \\ \sigma_6 = 0 \end{cases}$$



$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI}, \quad EI = \frac{M}{K_1} = \frac{b}{d_{11}} \rightarrow \delta = 1.95 \text{ mm}$$

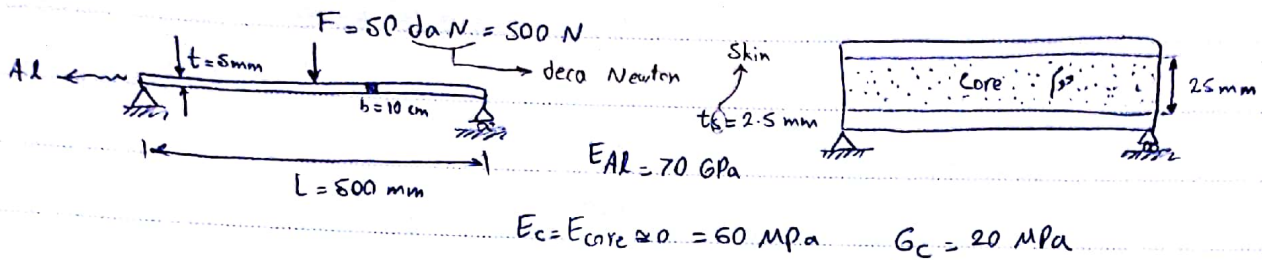
تقریباً، تنش، کرنش و مکان های چیدانه متناوب $[+30/0]$ را تحت امکان $K_1 = 2.22 \frac{1}{m}$ بدست آورید.

تقریباً $t_{ply} = 0.15 \text{ mm}$

Carbon/Epoxy

$$\begin{cases} E_x = 155 \text{ GPa} \\ E_y = 12.1 \text{ GPa} \\ \nu_{yx} = 0.248 \\ E_s = 4.4 \text{ GPa} \end{cases}$$

مثال (در دتر مطابق شکل زیر جاکاس عرض در تقاطع (بجای بار را درست آورید (کتاب Daniel Gay)



Solution: $w = \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx + \int \frac{1}{2} \frac{CV^2}{AG} dx$

$AG = (b_c G_c t_c + b_s G_s t_s) = b (t_c G_c + t_s G_s)$

$\Delta = \frac{\partial w}{\partial F} = \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dF} dx + \int \frac{1}{AG} V \frac{dV}{dF} dx$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \rightarrow M = \frac{Fx}{2}, V = -\frac{F}{2} \\ \frac{L}{2} \leq x \leq L \rightarrow M = \frac{F}{2} (L-x), V = \frac{F}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \frac{FL^3}{48EI} + \frac{FL}{4} \left(\frac{C}{GA} \right)$$

C = 1.2 (جدول طراحی اجزای)

* ملاحظه می شود در تیر آلومینوم جاکاس عرض ناشی از برش تیر قابل عرف نظر می باشد
 $\Delta = 16.7 \text{ mm} + 0.02 \text{ mm}$ برای تیر AL
 عرف نظر می شود

چون E هسته خیلی کم است

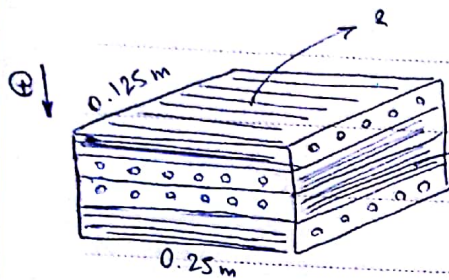
برای تیر ساندویچی: $I = 2Ad^2 = 2bt_s \left(\frac{t_c + t_s}{2} \right)^2 = \frac{bt_s}{2} (t_s + t_c)^2$

skin

$EI = E_s \frac{bt_s}{2} (t_c + t_s)^2 + E_c \frac{bc^3}{12} = 7090 + 7.8$

$\Delta' = \Delta'_{\text{bending}} + \Delta'_{\text{shear}} = 0.18 + 1.04 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{\Delta}{\Delta'} = 14$

← نه توان عرف نظر کرد



$[0/90]_5$
Graphite/Epoxy

$$E_x = 155 \text{ GPa}$$

$$E_y = 12.1 \text{ GPa}$$

$$E_z = 4.4 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.248$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_6 = k_2 = k_6 = 0$$

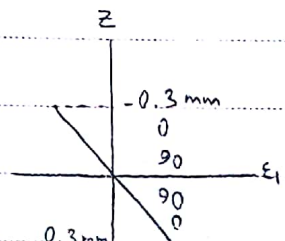
$$k_1 = 3.33 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{ضربت لایه} = 0.15 \text{ mm}$$

حرف: محاسبه ی مکان های ناشی از k_1

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_1 + z k_1 = 3.33 z \\ \epsilon_2 = \epsilon_2 + z k_2 = 0 \\ \epsilon_6 = \epsilon_6 + z k_6 = 0 \end{cases}$$

تغییرات کرنش به صورت خطی با ضخامت

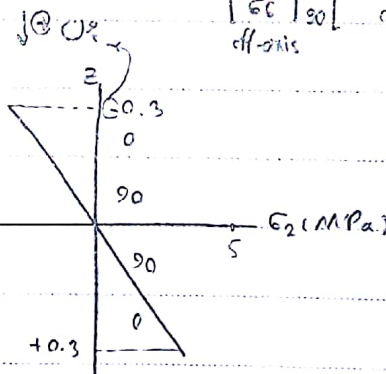
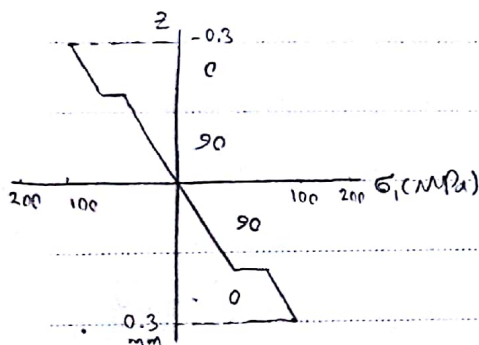


$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 155.7 & 3.02 & 0 \\ 3.02 & 12.16 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 519000 z \\ 10060 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

off-axis

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.16 & 3.02 & 0 \\ 3.02 & 155.7 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40500 z \\ 10060 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

off-axis



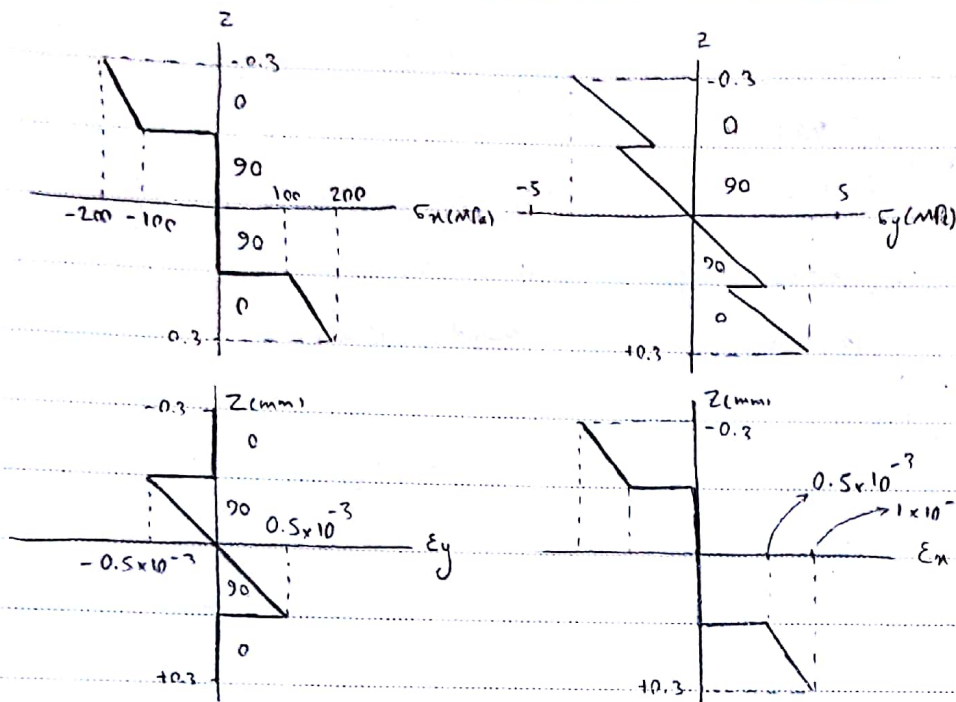
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.33 z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3.33 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = [T_{90}] \begin{Bmatrix} 40500 z \\ 10060 z \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10060 z \\ 40500 z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

بعد



$$M_1 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = \int_{-150 \times 10^{-6}}^{150 \times 10^{-6}} 519000 \cdot z^2 \cdot dz + \int_{-150 \times 10^{-6}}^0 40500 \cdot z^2 \cdot dz + \int_0^{150 \times 10^{-6}} 40500 \cdot z^2 \cdot dz + \int_{150 \times 10^{-6}}^{300 \times 10^{-6}} 519000 \cdot z^2 \cdot dz = 8.27 \left(\frac{N \cdot m}{m} \right)$$

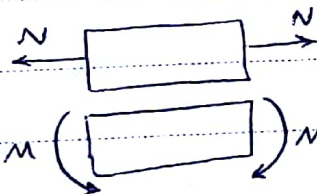
$$M_2 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz = \int_{-t/2}^{t/2} 10050 \cdot z^2 \cdot dz = 0.1809 \left(\frac{N \cdot m}{m} \right)$$

$$M_1 \cdot L_y = 8.27 \times 0.125 = 1.033 \text{ (N.m)}$$

$$M_2 \cdot L_x = 0.1809 \times 0.25 = 0.0452 \text{ (N.m)}$$

Symmetric Laminate

22 مله



$$N = [A] \epsilon^0$$

$$M = [D] \kappa$$

General or unsymmetric laminates ← (1) در حالت کلی

(2) تئوری تحریف ← در حالت خاص؟

2007-2013

آقای Soden ← 19 تئوری

Chapter 6: Properties of General Laminates

* در فصل های قبل در مورد تکه چند لایه متجانس با شد و تحت بار داخل منحنی با بخش خالی قرار گیرد، به ترتیب از طریق در رابطه $N = A\epsilon$ و $M = DK$ تحلیل تنش و کرنش در تکه لایه های چند لایه متجانس انجام می گیرد اما برای یک سری کاربردهای خاص می توان چند لایه های هوشمند طراحی کرد که مثلا در اثر اعمال بار داخل منحنی یا بار بخش به ترتیب بخش و تغییر طول داخل منحنی در آن ها اتفاق می افتد. برای مثال بار هواپیما می تواند با تغییر لایه چینی به کوس طراحی شود که در اثر نیروی لیفت علاوه بر بخش، پیچش در نوک پیرانه شده و باعث شود که سرعت و دلتا در آن کنترل شود. در حقیقت با انتخاب لایه چینی مناسب می توان سازه های کامپوزیتی را به هدرت هوشمند طراحی کرد.

توجه شود در مورد تکه چند لایه متجانس نباید در اثر کشش تکه تاب بر روی دارد و یعنی N_1 باعث اتفاق K_1 در داخل تکه می شود.

$$\bar{\epsilon}_1 = \frac{1}{h} \int \epsilon_1 dz \longrightarrow N_1 = \int \sigma_1 dz$$

$$\sigma_1 = Q_{11} \epsilon_1 + Q_{12} \epsilon_2 + Q_{16} \epsilon_6$$

$$N_1 = \int \sigma dz \longrightarrow N_1 = A_{11} \bar{\epsilon}_1 + A_{12} \bar{\epsilon}_2 + A_{16} \bar{\epsilon}_6$$

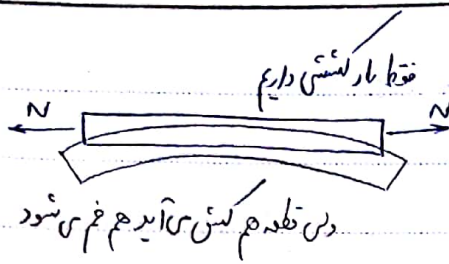
* از طرفی اگر همزمان کشش منحنی + بخش داشته باشیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1(z) = \bar{\epsilon}_1 + z K_1 \\ \epsilon_2(z) = \bar{\epsilon}_2 + z K_2 \\ \epsilon_6(z) = \bar{\epsilon}_6 + z K_6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ناشی از کشش} \\ \text{ناشی از بخش} \end{array}$$

$$N_1 = \int [Q_{11} (\bar{\epsilon}_1 + z K_1) + Q_{12} (\bar{\epsilon}_2 + z K_2) + Q_{16} (\bar{\epsilon}_6 + z K_6)] dz$$

* توجه مهم: در این رابطه بخش ناشی از متجانس بودن لیفت برده که در اثر کشش اتفاق افتاده است (نه ناشی از همان خارجی)

ص به



$$N_1 = \underbrace{\left(\int Q_{11} dz \right)}_{A_{11}} \dot{\epsilon}_1 + \underbrace{\left(\int Q_{12} dz \right)}_{A_{12}} \dot{\epsilon}_2 + \underbrace{\left(\int Q_{16} dz \right)}_{A_{16}} \dot{\epsilon}_6 + \underbrace{\left(\int Q_{11} z dz \right)}_{B_{11}} K_1 + \underbrace{\left(\int Q_{12} z dz \right)}_{B_{12}} K_2 + \underbrace{\left(\int Q_{16} z dz \right)}_{B_{16}} K_6$$

$$\Rightarrow N_1 = A_{11} \dot{\epsilon}_1 + A_{12} \dot{\epsilon}_2 + A_{16} \dot{\epsilon}_6 + B_{11} K_1 + B_{12} K_2 + B_{16} K_6$$

Similarly

$$N_2 = A_{21} \dot{\epsilon}_1 + A_{22} \dot{\epsilon}_2 + A_{26} \dot{\epsilon}_6 + B_{21} K_1 + B_{22} K_2 + B_{26} K_6$$

$$N_6 = A_{61} \dot{\epsilon}_1 + A_{62} \dot{\epsilon}_2 + A_{66} \dot{\epsilon}_6 + B_{61} K_1 + B_{62} K_2 + B_{66} K_6$$

$$\Rightarrow N_i = A_{ij} \dot{\epsilon}_j + B_{ij} K_j \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$\begin{cases} A_{ij} \rightarrow [MN/m] \\ B_{ij} \rightarrow [kN] \\ D_{ij} \rightarrow [Nm] \end{cases}$$

توجه شود که واحدها را متفاوت قریب کردن تا بتوانیم اعداد را با هم مقایسه کنیم

* ماتریس B، ماتریس کوپلینگ نامیده می شود که اکتفا را به تنش های منتجه وصل می کند

توجه شود برای کمیت های مقادیر، کلیه مؤلفه های ماتریس کوپلینگ B برابر صفر باشد.

به همین ترتیب می توانیم کوپلینگ بین کرنش های صفحه ای و همان های غشی را نیز بدست آوریم.

من بد

$$M_1 = \int Q_1 z dz = \int Q_{11} (\hat{\epsilon}_1 + z k_1) z dz + Q_{12} (\hat{\epsilon}_2 + z k_2) z dz + Q_{16} (\hat{\epsilon}_6 + z k_6) z dz$$

$$\Rightarrow M_1 = \underbrace{\int Q_{11} \hat{\epsilon}_1 z dz}_{B_{11} \hat{\epsilon}_1} + \underbrace{\int Q_{11} z^2 k_1 dz}_{D_{11} k_1} + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{M_i = B_{ij} \hat{\epsilon}_j + D_{ij} k_j}$$

$$\begin{cases} N_i = A_{ij} \hat{\epsilon}_j + B_{ij} k_j \\ M_i = B_{ij} \hat{\epsilon}_j + D_{ij} k_j \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ k \end{Bmatrix}$$

در اینجا از این بخش مسئله داده نمی شود
(شماره صاحب منبر)

	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\epsilon}_6$	k_1	k_2	k_6
N_1	A_{11}	A_{12}	A_{16}	B_{11}	B_{12}	B_{16}
N_2	A_{21}	A_{22}	A_{26}	B_{21}	B_{22}	B_{26}
N_6	A_{61}	A_{62}	A_{66}	B_{61}	B_{62}	B_{66}
M_1	B_{11}	B_{12}	B_{16}	D_{11}	D_{12}	D_{16}
M_2	B_{21}	B_{22}	B_{26}	D_{21}	D_{22}	D_{26}
M_6	B_{61}	B_{62}	B_{66}	D_{61}	D_{62}	D_{66}

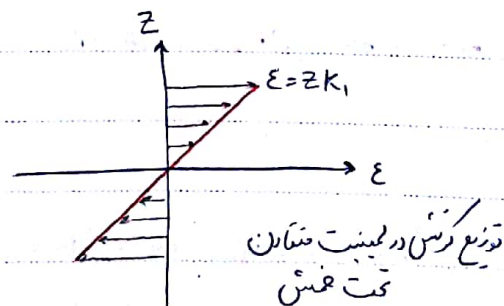
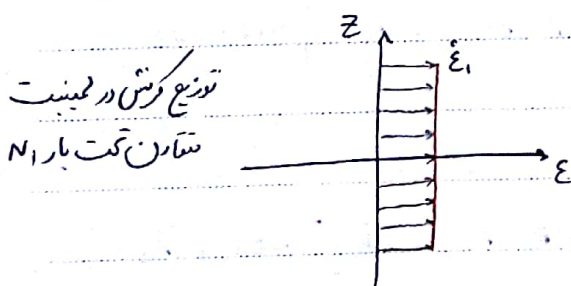
$$N = A \epsilon \rightarrow \epsilon = a N$$

$$M = D K \rightarrow K = d M$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

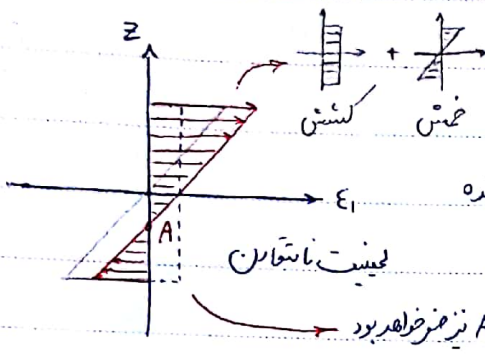
$$\alpha \neq A^{-1}, \beta \neq B^{-1}, \delta \neq D^{-1}$$

* Symmetric Laminates :



* همانطور که ملاحظه می شود در چیدانه متجانس N_1 مقدار کرنش همگامی ϵ_1 و M_1 مقدار کرنش zk_1 را در چیدانه (یکبار) می کند.

* در صورتیکه در یک چند لایه همبسی (ناشیان) توزیع کرنش در اثر بار N_1 به صورت زیر خواهد شد:



در این حالت چون نسبت ناشیان است، در اثر کشش N_1 و K_1 در نسبت ناشیان است. توجه شود ممکن است K_2 و K_6 م ناشیان باشند.

تاریخ جای شده و تنش در A نیز موزون خواهد بود

* Evaluation of Components of Modulus:

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz$$

$$\text{مثلا } [A_{11}, B_{11}, D_{11}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2) dz = \int_{-h/2}^{h/2} (U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta)(1, z, z^2) dz$$

$$= U_1 \int (1, z, z^2) dz + U_2 \int \cos 2\theta (1, z, z^2) dz + U_3 \int \cos 4\theta (1, z, z^2) dz$$

$$= U_1 (h, 0, \frac{h^3}{12}) + U_2 (V_{1A}, V_{1B}, V_{1D}) + U_3 (V_{2A}, V_{2B}, V_{2D})$$

مثلا ادامه شد :

$$V_{1A} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot dz, \quad V_{2A} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta \cdot dz$$

$$V_{1B} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z \cdot dz, \quad V_{2B} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta \cdot z \cdot dz, \quad V_{3B} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta \cdot z \cdot dz, \quad V_{4B} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta \cdot z \cdot dz$$

$$V_{1D} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \cdot z^2 \cdot dz, \quad V_{2D} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta \cdot z^2 \cdot dz, \quad V_{3D} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta \cdot z^2 \cdot dz, \quad V_{4D} = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta \cdot z^2 \cdot dz$$

① "مفتوحه سازش آفرینشگاهی بود (مرکز پیشرفته)" ← انتشارات علم و صنعت 1397

۲) میان مساحت مواد مرکب (کامپوزیت) ← انتسابات شتر دانگها ۱۳۹۸

* Failure theories of fiber-Reinforced Materials:

شکست Failure	واماندگی یک عضو سازش به معنای عدم توانایی قطعه برد زنی در تحمل بارهای (محالی) می باشد. مثلاً تغییر فرم
خراب Damage	
ترک Crack	زیاد از حد در در یک عضو که تحت بار کشش می باشد، واماندگی محسوب می شود و می رفت شود هدف

از دامانگی در این فصل بررسی ازین روش یک بارگی، پیوستگی ماه می باشد. در بررسی دامانگی قسم است که مولهای شکست مواد

مطالعه شده و بر مبنای مدل‌های شکست تئوریک‌های مربوطه ارائه شوند. آرد مراد هساگر مدل‌های در مر قالب شکست به صورت

شکست زود رخسخت نم وجود دارد.
 فلزات
 Ductile ← فولاد - Al
 Brittle ← سرامیک - چدن
 حرارت تنفس برشی (ترسکا)
 قلع بیسر

نقدی ماگزیم نقدی
نقدی
کدلب مدر

در موارد کامیوزیت مدلهای مختلف شدت ارضی :

- دلیل شکست های مامانگی زبانی در مدار کامپوزیت
- توسعه داده شده است که از جدولی مدون ترین آن می توان به ما گیریم

تشخیص روش، تفسیر، Tsi-Wu، Hashin، Puck (نشان بده)

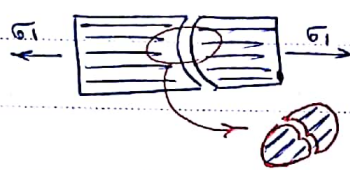
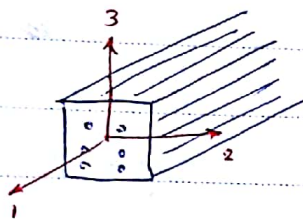
واضح است که در مدار کامپیوزیت تدریس تجربی باید تا حدی از جهت ایمن باشد. نکته در راستای ایمنی به بار خیلی بیشتری نسبت به جهت محدود بر ایمنی نیاز دارد.

صوبہ

مسئله: در یک ورقه کامپوزیت که الیاف در آن با زاویه θ قرار گرفته است تحت بارگذاری خارجی یک جهت ما تحلیل تنش در ورقه های کامل تنش در جهت های مادی بدین سی آید اما سوال این است که کدام یک از ورقه های تنش، تخریب در ورقه را کنترل می کنند.



مدهای داماندگی در مدار کامپوزیت:



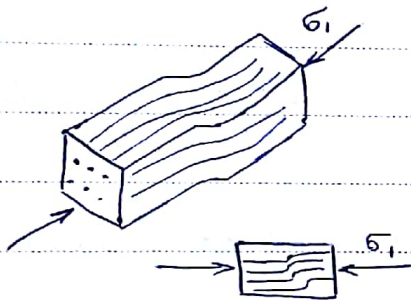
1) اعمال بار در راستای الیاف (کشش)

اشکاف در راستای الیاف X_t

ASTM D 3039

بدین آوردن E_m و ν_{ym}

2) (عقال بار در راستای ~~الیاف~~ فشار) X_c



مردمست تحت بار فشاری به دلیل جدجی شدن الیاف (Kinking) یا

کمانش موضعی (Local Buckling) اتفاق می افتد.

واضح است که اگر راستای الیاف حسن بسافت با راستای بارگذاری متفاوت باشد،

شدت تخریب خیلی سریع تر اتفاق خواهد افتاد.

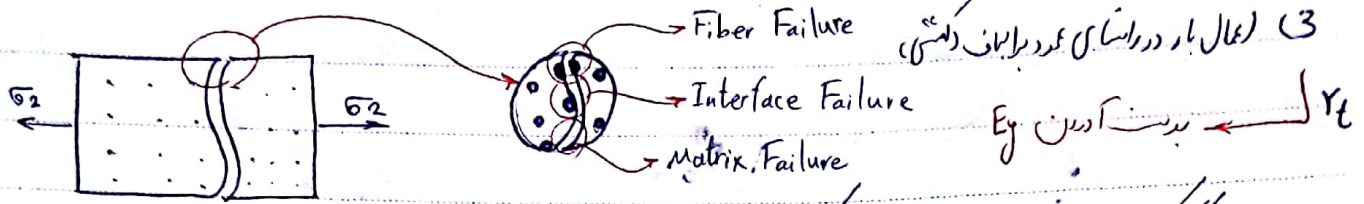
مثلاً $X_c = 800 \text{ MPa}$, $X_t = 2200 \text{ MPa}$

از لحاظ تدریس X_c و X_t یکسان است اما در عمل $X_c \leq X_t$ بدین می آید. مثلاً در کربن اپوکسی $X_c < \frac{1}{2} X_t$

و در گلس اپوکسی نزدیک هم هستند.

مثلاً $X_c = 800 \text{ MPa}$, $X_t = 1000 \text{ MPa}$

من بعد



معمولاً داماندگی کشش در انشای عمود بر ایلف بخاطر بیش از سه مد داماندگی به ترتیب زیر است:

- 1- داماندگی کشش ماتریس
- 2- داماندگی کشش ایلف در انشای طولی
- 3- داماندگی سطح غاس بین ایلف و رزین

(4) (حال بار در جهت عمود بر ایلف (مکش)) σ_c

معمولاً داماندگی فشار در انشای عمود بر ایلف در اثر خورد شدن ~~دارد~~ شامل ایلف، رزین و سطح غاس می باشد.

فشار بیشتر از کشش است (برگشت σ_c و σ_t) $\sigma_t \ll \sigma_c$ 200 MPa $70-80 \text{ MPa}$

بار در جهت فشار (مکش)

σ_c

σ_t

بار در جهت فشار (کشش)

شدت برش

④

③

②

①

⑤

⑥

⑦

⑧

⑨

⑩

⑪

⑫

⑬

⑭

⑮

⑯

⑰

⑱

⑲

⑳

㉑

㉒

㉓

㉔

㉕

㉖

㉗

㉘

㉙

㉚

㉛

㉜

㉝

㉞

㉟

㊱

㊲

㊳

㊴

㊵

㊶

㊷

㊸

㊹

㊺

㊻

㊼

㊽

㊾

㊿

⓪

⓫

⓬

⓭

⓮

⓯

⓰

⓱

⓲

⓳

⓴

⓵

⓶

⓷

⓸

⓹

⓺

⓻

⓼

⓽

⓾

⓿

Ⓚ

Ⓛ

Ⓜ

Ⓨ

Ⓩ

ⓐ

ⓑ

ⓒ

ⓓ

ⓔ

ⓕ

ⓖ

ⓗ

ⓘ

ⓙ

ⓚ

ⓛ

ⓜ

ⓞ

ⓟ

ⓠ

ⓡ

⓳

⓴

⓵

⓶

⓷

⓸

⓹

⓺

⓻

⓼

⓽

⓾

⓿

Ⓚ

Ⓛ

Ⓜ

Ⓨ

Ⓩ

ⓐ

ⓑ

ⓒ

ⓓ

ⓔ

ⓕ

ⓖ

ⓗ

ⓘ

ⓙ

ⓚ

ⓛ

ⓜ

ⓞ

ⓟ

ⓠ

ⓡ

⓳

⓴

⓵

⓶

⓷

⓸

⓹

⓺

⓻

⓼

⓽

⓾

⓿

Ⓚ

Ⓛ

Ⓜ

Ⓨ

Ⓩ

ⓐ

ⓑ

ⓒ

ⓓ

ⓔ

ⓕ

ⓖ

ⓗ

ⓘ

ⓙ

ⓚ

ⓛ

ⓜ

ⓞ

ⓟ

ⓠ

ⓡ

⓳

⓴

⓵

⓶

⓷

⓸

⓹

⓺

⓻

⓼

⓽

⓾

⓿

Ⓚ

Ⓛ

Ⓜ

Ⓨ

Ⓩ

ⓐ

ⓑ

ⓒ

ⓓ

ⓔ

ⓕ

ⓖ

ⓗ

ⓘ

ⓙ

ⓚ

ⓛ

ⓜ

ⓞ

ⓟ

ⓠ

ⓡ

⓳

⓴

⓵

⓶

⓷

⓸

⓹

⓺

⓻

⓼

⓽

⓾

⓿

Ⓚ

Ⓛ

Ⓜ

Ⓨ

Ⓩ

ⓐ

ⓑ

ⓒ

ⓓ

ⓔ

ⓕ

ⓖ

ⓗ

ⓘ

ⓙ

ⓚ

ⓛ

ⓜ

ⓞ

ⓟ

ⓠ

ⓡ

⓳

⓴

⓵

⓶

⓷

⓸

⓹

⓺

⓻

⓼

⓽

⓾

⓿

Ⓚ

Ⓛ

Ⓜ

Ⓨ

Ⓩ

ⓐ

ⓑ

ⓒ

ⓓ

ⓔ

ⓕ

ⓖ

ⓗ

ⓘ

ⓙ

ⓚ

ⓛ

ⓜ

ⓞ

ⓟ

ⓠ

ⓡ

⓳

⓴

⓵

⓶

⓷

⓸

⓹

⓺

⓻

⓼

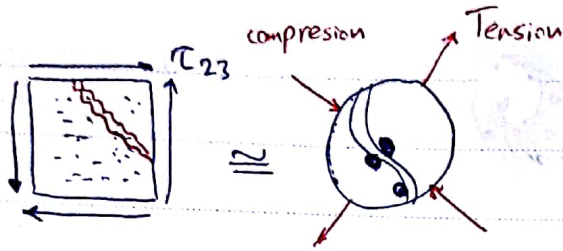
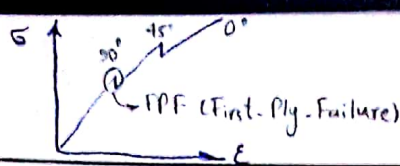
⓽

⓾

⓿

Ⓚ

Ⓛ



6) مقادیر کرنش در جهته‌های 2-3

σ_{yz}

حلله 24

* Maximum Stress & Strain Criteria:

یک کامپوزیت در وضعیت محوری تنش در صورتی دچار خرابی می‌شود که:

- 1- تنش حداکثر در جهت الیاف مساوی یا بزرگتر از استحکام در همان جهت (X_c یا X_t) تحت تنش تک جهته در جهت الیاف در آرایشگاه باشد.
- 2- تنش حداکثر در جهت عمود بر الیاف مساوی یا بزرگتر از استحکام در همان راستا (Y_c یا Y_t) شود.
- 3- تنش حداکثر برشی داخل محدوده (σ_{yz} یا σ_{xy}) بزرگتر یا مساوی استحکام برشی داخل محدوده σ_{yz} شود.

حدهای فعلی (عدم خرابی)

* فریت تئوری ماکزیمم تنش:

با استفاده از این تئوری مدولاس قطعه کاملاً شکنج می‌شود. مثلاً اگر $(\sigma_x > X)$ باشد در تخریب ۱ یا ۲
 اگر $(\sigma_y > Y)$ در تخریب ۲ یا ۳
 اگر $(\sigma_{yz} > S)$ در تخریب ۴

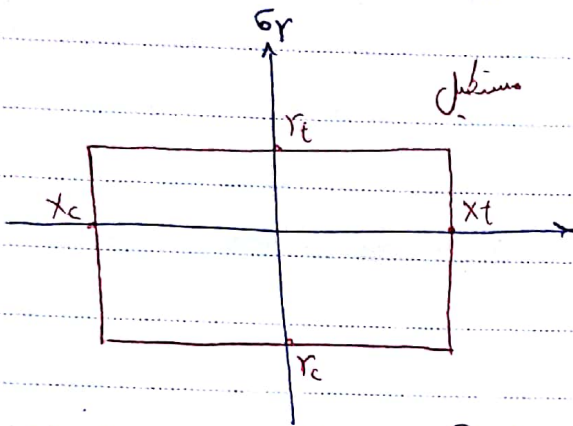
* عیب این تئوری:

هیچ تلاقی (interaction) بین مدولاسهای تنش وجود ندارد. به همین دلیل پیش‌بینی تخریب سازه بعضی وقت‌ها

over estimate و بعضی وقت‌ها underestimate می‌باشد.

من بعد

این تئوری همانگونه که در فزات گفته شد، پوش منفی تحریک به صورت زیر می باشد:



مثال: در لایه فیبری $[0/90]_T$ بار (تانسین تحریک) را به صورت آرید. FPF

ابتدا بار خارجی را از ضعیف کرده، کلیل تنش (فام داده) و تنش در کلبه لایه ها را به صورت می آریم. سپس تنش در هر لایه را با دوران به تنش های on-axis تبدیل می کنیم. سپس با استفاده از تئوری ماکزیمم تنش به فرایند رانش می کنیم. اگر فرایند اتفاق نیفتاده باشد در راه حل وجود دارد.

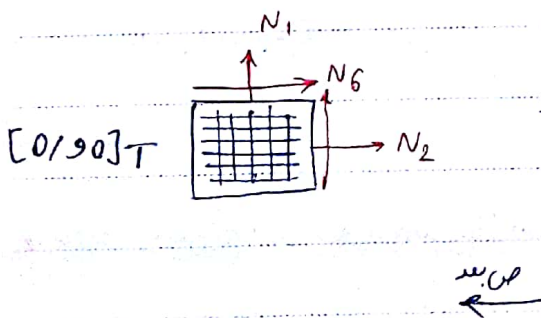
راه حل اول: بار خارجی را به صورت به این زیاد کرده و هر مرحله کلیل را اگر می کنیم تا نقطه تحریک پیدا شود.
راه حل دوم: پارامتری به نام نسبت تنش به صورت زیر تعریف کرده و از این پارامتر به نوبت کلیل ها بار تحریک را به این می کنیم.

R : Stress Ratio یا Strength Ratio یا Load Ratio

$$\frac{\sigma_x}{X} = \frac{1}{R_x} \quad \frac{\sigma_y}{Y} = \frac{1}{R_y} \quad \frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{R_s}$$

* توجه شود که در صورتیکه رابطه تنش کرنش تا اولین نقطه شکست محلی باشد از R استفاده می شود در غیر این صورت باید از همان روش اول به صورت incremental (پله ای) (استهلاک) شود.

مثال: اگر تحت بارگذاری زیر تحریک اتفاق نیفتد، آسانه تحریک کلبه است



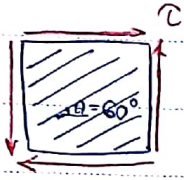
	σ_x	σ_y	σ_{xy} [MPa]
0	200	10	150
90	-10	35	10

$x_t = 400$
 $x_c = 380$
 $y_t = 40$
 $y_c = 50$
 $s = 180$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_n}{X_t} = \frac{1}{R_n} = \frac{1}{2} \rightarrow R_n = 2 \\ \frac{\sigma_y}{Y_t} = \frac{1}{R_y} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \rightarrow R_y = 4 \\ \frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{R_s} = \frac{150}{180} \rightarrow R_s = 1.2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_n}{X_c} = \frac{1}{R_n} = \frac{10}{380} \rightarrow R_n = 38 \\ \frac{\sigma_y}{Y_t} = \frac{1}{R_y} = \frac{35}{40} \rightarrow R_y = 1.14 \\ \frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{R_s} = \frac{10}{180} \rightarrow R_s = 18 \end{array} \right.$$



* مثال) یک کامپوزیت یک لایه تک جهته carbon/epoxy با نرم‌ترین تنش برش چه قدر است؟



$$E_n = 181 \quad E_y = 10.3 \quad \nu_{ny} = 0.28 \quad E_s = 7.17$$

$$X_{tc} = 1500 \text{ MPa}, Y_t = 40, Y_c = 264, S = 68$$

$$\tau = 136 \text{ MPa} \quad \text{شیت}$$

$$\tau = -48.19 \text{ MPa} \quad \text{منفی}$$

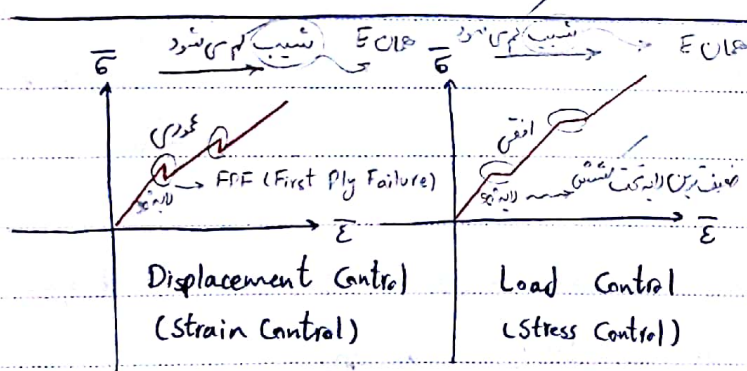
نشان هندسی اهمیت حالات در کامپوزیت ها

$$X_c < \sigma_n < X_t$$

$$Y_c < \sigma_y < Y_t$$

$$-S < \sigma_{xy} < S$$

در این حالت Y_c و Y_t با کشش منفی
فشار شده اند



سوال: منحنی تنش کرنش کامپوزیت چند لایه چگونه است؟

جواب: بستگی دارد که تست کشش ما به صورت Load Control است یا به صورت Displacement Control یعنی در حقیقت داریم تنش را کنترل می کنیم یا کرنش را.

* تمام منحنی های رسم شده در هر دو حالت از مبانی گذرند (چون وقتی نیروی وارد نشود جاگایی هم وجود ندارد درست)

در تئیه در هر دو حالت شیب نمودار در حال کاهش است یعنی با Fail کردن هر صفحه، تنش کل در حال کاهش است بدین است!

* دقت شود که تفاوت دو نمودار تنها با بزرگنمایی و بزرگتر کردن مقیاس مجزها قابل ردیت است. یعنی اگر مقیاس را «دو برابر» هر

دو نمودار به همدرت یک خط واحد با E یکسان (یعنی یکسان) دیده می شوند و دیگر به همدرت پله ای مشاهده نمی شوند.

* علت تفاوت دو نمودار (منحنی) به دلیل نوع تست است. در حالت $Load\ Control$ چون نیرو ثابت است (نیرو مانع یکسانی

وارد می شود) در نتیجه تنش ثابت است (تنش مانع یکسانی افزایش می یابد) و به تبع آن طبق رابطه تنش-کشش $(\sigma = E \epsilon)$ ϵ_{cte} $\downarrow$ $\uparrow$

چون E نیز در حال کاهش است پس E باید افزایش یابد؛ به همین دلیل نیز تنش در راستای افزایش E (خط افقی) اعتبار می یابد. در حالت

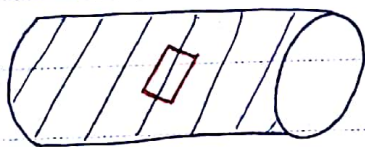
$Displacement\ Control$ نیز چون ϵ ثابت مانع (افزایش) نگه داشته شده است (مانع ثابتی از E در می شود) و چون E در

حال کاهش است در نتیجه طبق رابطه $(\sigma = E \epsilon)$ پس σ باید کاهش یابد؛ به همین دلیل نیز منحنی در راستای کاهش σ (خط عمودی) اعتبار می یابد.

اماها نظیر که گفتیم این خطوط افقی و عمودی کوچک هستند و تنها در صورت بزرگنمایی قابل مشاهده می باشند.

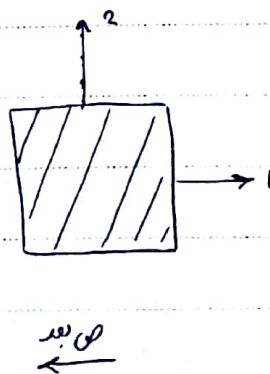
همان شکل جلسات اول ← ص 46 جزوه [TA]

$$\epsilon_x = 0.001$$



$$\theta = 53.1^\circ$$

$$d = 1\text{ m} \quad t = 20\text{ mm}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = 40\text{ GPa} \\ E_y = 10\text{ GPa} \\ E_s = 3.5\text{ GPa} \end{array} \right.$$

$$X_T = 1062 \text{ MPa} \quad Y_T = 31 \text{ MPa} \quad Y_C = 118 \text{ MPa} \quad X_C = 670 \text{ MPa}$$

$$S = 72 \text{ MPa} \rightarrow (\text{نسبت برش طولی})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.64 & 0.96 \\ 0.64 & 0.36 & -0.96 \\ -0.48 & 0.48 & -0.28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{P_r}{2t} \\ \frac{P_r}{t} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{cases} \sigma_x = 0.36 \frac{P_r}{2t} + 0.64 \frac{P_r}{t} \\ \sigma_y = 0.64 \frac{P_r}{2t} + 0.36 \frac{P_r}{t} \\ \sigma_s = -0.48 \frac{P_r}{2t} + 0.48 \frac{P_r}{t} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \quad \epsilon_x = S_{xx} \epsilon_x + S_{xy} \epsilon_y + S_{xs} \epsilon_s$$

$$\Rightarrow 0.001 = \frac{1}{40} (0.82 P \times \frac{500}{20}) - \frac{0.25}{40} (0.68 \times \frac{500}{20}) \Rightarrow 0.40625 P = 0.001 \Rightarrow P = 2.462 \text{ MPa}$$

* Maximum Stress Failure :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_x}{X_T} < 1 \quad \text{سادگی برش یا آسان تر برش باشد} \quad 0.82 \frac{P_r}{t} = 1062 \rightarrow P_1 = 51.8 \text{ MPa} \\ \frac{\sigma_y}{Y_T} < 1 \rightarrow \sigma_y \rightarrow (*) \quad \text{Tsaï-Wu} \\ \frac{\sigma_s}{S} < 1 \quad (**)$$

$$(*) \rightarrow 0.68 \frac{P_r}{t} = 31 \rightarrow P_2 = 1.82 \text{ MPa} \quad (**) \rightarrow 0.24 \frac{P_r}{t} = 72 \rightarrow P_3 = 12 \text{ MPa}$$

$$P = \min\{P_1, P_2, P_3\} \Rightarrow P = 1.82 \text{ MPa} \quad \checkmark \quad \text{Matrix Cracking in Tension} \checkmark$$

تمرین: فایبر پلاسین برای لایینت های cross-ply از جنس glass/epoxy و carbon/epoxy با لایینت $[0_2/90_2]_T$ را بدست آورید.

۱۹ Tsai

[خوش مکانیک] از کتاب Tsai استفاده شود

	E_x (GPa)	E_y (GPa)	ν_m	E_s (GPa)
I Carbon/Epoxy	181	10.3	0.28	7.17
II Glass/Epoxy	38.6	8.27	0.26	4.14

$$\frac{\nu_m}{E_m} = \frac{\nu_y}{E_y} \Rightarrow \nu_y = \frac{\nu_m E_m}{E_y}$$

Carbon/Epoxy (I): $\nu_y = \frac{0.28 \cdot 181}{10.3} = 0.015934$

Glass/Epoxy (II): $\nu_y = \frac{0.26 \cdot 38.6}{8.27} = 0.055705$

$$Q_{xx} = \frac{E_x}{1 - \nu_m \nu_y}$$

Carbon/Epoxy (I): $Q_{xx} = \frac{181}{1 - 0.28 \cdot 0.015934} = 181.811 \text{ (GPa)}$

Glass/Epoxy (II): $Q_{xx} = \frac{38.6}{1 - 0.26 \cdot 0.055705} = 39.167 \text{ (GPa)}$

$$Q_{xy} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_m \nu_y}$$

Carbon/Epoxy (I): $Q_{xy} = \frac{0.015934 \cdot 181}{1 - 0.28 \cdot 0.015934} = 2.897 \text{ (GPa)}$

Glass/Epoxy (II): $Q_{xy} = \frac{0.055705 \cdot 38.6}{1 - 0.26 \cdot 0.055705} = 2.182 \text{ (GPa)}$

$$Q_{yy} = \frac{E_y}{1 - \nu_m \nu_y}$$

Carbon/Epoxy (I): $Q_{yy} = \frac{10.3}{1 - 0.28 \cdot 0.015934} = 10.346 \text{ (GPa)}$

Glass/Epoxy (II): $Q_{yy} = \frac{8.27}{1 - 0.26 \cdot 0.055705} = 8.392 \text{ (GPa)}$

$$Q_{ss} = E_s$$

Carbon/Epoxy (I): $Q_{ss} = 7.17 \text{ (GPa)}$

Glass/Epoxy (II): $Q_{ss} = 4.14 \text{ (GPa)}$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \end{Bmatrix}$$

Carbon/Epoxy (I)	76.368	85.733	19.710	22.607	26.880
Glass/Epoxy (II)	19.325	13.888	2.954	5.136	7.094

	1	U_2	U_3
A_{11}^*	U_1	0	1
A_{22}^*	U_1	0	1
A_{12}^*	U_4	0	-1
A_{26}^*	U_5	0	-1
A_{16}^*	0	0	0
A_{26}^*	0	0	0

$$[0_2/90_2]_T \rightarrow \nu_0 = \nu_{90} = \frac{1}{2}$$

$$[A]^*_{\text{Carbon/Epoxy}} = \begin{bmatrix} 96.078 & 2.897 & 0 \\ 2.897 & 96.078 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ (GPa)} \xrightarrow{\text{inverse}} [a_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 10.418 & -0.314 & 0 \\ -0.314 & 10.418 & 0 \\ 0 & 0 & 139.470 \end{bmatrix} \text{ (TPa)}^{-1}$$

$$[A]^*_{\text{Glass/Epoxy}} = \begin{bmatrix} 22.279 & 2.182 & 0 \\ 2.182 & 22.279 & 0 \\ 0 & 0 & 4.14 \end{bmatrix} \text{ (GPa)} \xrightarrow{\text{inverse}} [a_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 45.320 & -4.439 & 0 \\ -4.439 & 45.320 & 0 \\ 0 & 0 & 241.546 \end{bmatrix} \text{ (TPa)}^{-1}$$

	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\epsilon}_6$		$\bar{\epsilon}_1$	$\bar{\epsilon}_2$	$\bar{\epsilon}_6$
$\bar{\sigma}_1$	A_{11}^*	A_{12}^*	A_{16}^*	inverse $\rightarrow$	a_{11}^*	a_{12}^*	a_{16}^*
$\bar{\sigma}_2$	A_{21}^*	A_{22}^*	A_{26}^*		a_{21}^*	a_{22}^*	a_{26}^*
$\bar{\sigma}_6$	A_{61}^*	A_{62}^*	A_{66}^*		a_{61}^*	a_{62}^*	a_{66}^*

Carbon/Epoxy: $a_{16}^* = a_{26}^* = a_{61}^* = a_{62}^* = 0$

Glass/Epoxy: $a_{16}^* = a_{26}^* = a_{61}^* = a_{62}^* = 0$

$$\nu_{21} = \frac{-a_{12}^*}{a_{11}^*} = -0.0301 \quad \text{نسبت انقباضی}$$

$$\nu_{21} = \frac{-a_{12}^*}{a_{11}^*} = -0.0979 \quad \text{نسبت انقباضی}$$

$$\nu_{12} = \frac{-a_{21}^*}{a_{22}^*} = -0.0301 \quad \text{'' ''}$$

$$\nu_{12} = \frac{-a_{21}^*}{a_{22}^*} = -0.0979 \quad \text{'' ''}$$

$$\nu_{61} = \frac{a_{16}^*}{a_{11}^*} = 0$$

$$\nu_{61} = \frac{a_{16}^*}{a_{11}^*} = 0$$

$$\nu_{16} = \frac{a_{61}^*}{a_{66}^*} = 0$$

$$\nu_{16} = \frac{a_{61}^*}{a_{66}^*} = 0$$

$$\nu_{26} = \frac{a_{62}^*}{a_{66}^*} = 0$$

$$\nu_{26} = \frac{a_{62}^*}{a_{66}^*} = 0$$

$$\nu_{62} = \frac{a_{26}^*}{a_{22}^*} = 0$$

$$\nu_{62} = \frac{a_{26}^*}{a_{22}^*} = 0$$

* نتیجه بگیریم که ضریب پواسون این نوع لایه چینی در حیدر ضریب پواسون.