



ساختمان گسسته

سرشناسه	: تقوی، مهناز، 1362 -، گردآورنده
عنوان و نام پدیدآور	: ساختمان گسسته / گردآورندگان مهناز تقوی، امیر دبیری.
مشخصات نشر	: تهران: سنجش و دانش، 1391.
مشخصات ظاهری	: 170 ص.: جدول؛ 22 × 29 س.م.
شابک	: 978-600-232-351-4
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
موضوع	: ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: ریاضیات -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	: کامپیوتر -- ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: کامپیوتر -- ریاضیات -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
شناسه افزوده	: دبیری، امیر، 1360 -، گردآورنده
رده بندی کنگره	: 21391 QA 2/37 ت/س68
رده بندی دیویی	: 76/510
شماره کتابشناسی ملی	: 2744364

ساختمان گسسته

گردآورندگان:	مهناز تقوی، امیر دبیری
ناشر:	انتشارات سنجش و دانش
صفحه آرای:	مهناز تقوی
نوبت چاپ:	دوم، ۱۳۹۳
تیراژ:	۲۰۰۰ نسخه
قیمت:	۳۴۰۰۰ تومان
شابک:	978-600-232-351-4
نشانی:	تهران، میدان انقلاب، خیابان دانشگاه، تقاطع روانمهر، پلاک ۱۲۶، ساختمان سنجش و دانش
تلفن:	۰۲۱- ۶۱۲۶

www.sanjesh.ir

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر محفوظ می باشد.

فهرست مطالب

۱۰.....	فصل اول: حساب گزاره‌ها
۱۴.....	مطالب تکمیلی فصل اول
14.....	منطق ریاضی
21.....	خواص مینترمها و ماکسترمها
۲۲.....	تست‌های فصل اول
۲۸.....	پاسخنامه تست‌های فصل اول
۳۳.....	فصل دوم: روابط توابع
37.....	بستار متعدی و الگوریتم وارشال
45.....	تست
51.....	پاسخنامه تست‌ها
۵۸.....	فصل سوم: مجموعه‌های مرتب
59.....	نمودار هاس:
62.....	جبر بول:
63.....	تئوری مجموعه‌ها
63.....	خواص مهم زیرمجموعه‌ها:
64.....	خواص مهم اشتراک:
64.....	خواص مهم اجتماع:
67.....	ساختمانهای جبری
69.....	منوید دوری
70.....	گروه آبدی
70.....	لاتیسه‌ها (مشبکه‌ها)
72.....	توابع بولی
۷۵.....	تست‌ها
80.....	پاسخنامه تست‌ها
۸۴.....	تست‌های فصل
88.....	پاسخنامه تست‌ها
90.....	مجموعه تست
92.....	پاسخنامه

۹۳	فصل چهارم: روابط بازگشتی
96	حل روابط بازگشتی با استفاده از معادله مشخصه
100	روابط بازگشتی
101	تابع مولد
۱۰۲	تست‌های فصل
104	پاسخنامه تست‌ها
۱۰۶	فصل پنجم: گرافها
106	مروری بر نظریه گرافها
109	دور هامیلتونی در یک گراف کامل
110	الگوریتم دیکسترا
112	تئوری گراف
112	انواع گراف و تعاریف مربوطه
114	مسیر و انواع آن
115	زیر گراف
116	گرافهای همبند (متصل)
117	مسیرها و مدارهای اولری
124	چند جمله‌ای کروماتیک
۱۲۵	تست‌های گراف
133	پاسخنامه تست‌های گراف
۱۴۰	فصل ششم: درخت‌ها
142	درخت‌های پوشا
143	الگوریتم کراسکال
143	الگوریتم پریم
144	درخت‌ها
144	زیر درخت
146	درخت پوشای مینیمال
150	تست‌های درخت
155	پاسخنامه تست‌های درخت
۱۵۹	تست‌های IT
161	پاسخنامه تست‌های IT

۱۶۳	 تست‌های مهندسی کامپیوتر
164	 پاسخنامه تست‌های مهندسی کامپیوتر
۱۶۵	 تست‌های علوم کامپیوتر
168	 پاسخنامه تست‌های علوم کامپیوتر

سخن سنجش و دانش

آغاز هر سخن، زینده ستایش خالق یکتاست. اوست که بر هر نقشی، نگاری می بندد و بر هر نگاری، زیبایی. بر هیچ عاقل و فرزانه ای پوشیده نیست که موتور پیشرفت و سربلندی هر کشوری بسته به علم و دانش است و طبق فرموده مقام معظم رهبری: اگر ملتی استقلال می خواهد، اگر عزت می خواهد، اگر پیشرفت می خواهد باید دانشگاه خود را تقویت کند. در این راستا، انتشارات سنجش و دانش (جامع ترین مرکز آموزش مکاتبه ای کشور) مفتخر است که سالهای متمادی در جهت خدمت به جامعه علمی کشور و بخصوص داوطلبان مقاطع کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و همچنین دکترا، فعالیت می کند.

در این مسیر پر پیچ و خم علم آموزی و پیشرفت، یکی از مشکلاتی که همواره دانشجویان با آن مواجه هستند، از یک طرف گستردگی و پراکندگی منابع مطالعاتی و از طرف دیگر کمبود زمان آزمون کنکور، جهت پاسخگویی به سوالات است. تا کنون جزوات و کتابهای گوناگونی در جهت رفع این مشکلات به بازار عرضه شده اما باز با این حال، پاسخ گوی نیاز خیلی از داوطلبان نیست، چرا که بعضاً یا خیلی خلاصه و گزیده است یا این که در تشریح مسائل و پاسخ گویی به سوالات از سیستمی استفاده شده که با وجود کامل و جامع بودن اکثراً با توجه به زمان محدود آزمون کنکور، عملاً سر جلسه امتحان قابل استفاده نمی باشد. به این معنا که داوطلب هر چند تسلط کامل به مطالب درسی دارد اما این مطالب در ذهن او از آنچنان انسجام و هماهنگی لازم برخوردار نیست که داوطلب بتواند در یک زمان کم به جواب سوال برسد لذا داوطلب در پاسخ گویی به سوالات دچار کمبود وقت گردیده و عملاً نمی تواند به تمام سوالات آنگونه که از خود انتظار دارد جواب دهد.

انتشارات سنجش و دانش با توجه به این دو مسئله مهم (یکی گستردگی منابع و دیگری زمان کم پاسخ گویی به سوالات کنکور) بر آن شد تا با استفاده از تجربه و علم اساتید مجرب و کارآزموده، به تولید و انتشار کتبی بپردازد که عین خلاصه و موجز بودن کامل و جامع نیز باشد، کما این که سعی گردیده در تشریح مسائل از یک سیستم جدید و راهکار میانبری استفاده شود که بدین وسیله مشکل کمبود زمان در جلسه کنکور نیز مرتفع گردد.

نیاز به استفاده از یک سیستم جدید به این دلیل است که توان پاسخ گویی به سوالات کنکور جدای از نیاز به بار علمی، نیازمند یک مهارت و شیوه خاص در تست زنی نیز می باشد. لذا در این خصوص سعی شده مطالب کتاب به گونه ای طرح ریزی و تألیف شود که، داوطلب خود به خود علاوه بر یاد گیری مطالب به مهارت تست زنی نیز دست پیدا کند.

در آخر از مخاطبین محترم این کتاب نهایت سپاسگزاری و قدر دانی را داریم و امید داریم توانسته باشیم آنچه را که شایسته و برآورنده یک دانشجوی ایرانی است ارائه کرده باشیم. از دانشجویان عزیز و اساتید محترم نیز تقاضا می کنیم ما را از نقطه نظرات و پیشنهادات خود بی بهره نگذارند چرا که تنها افتخار و دست آویز ما نگاه صمیمانه و رضایت بخش شماست.

به امید پیروزی و سربلندی در تمامی عرصه های زندگی

error.azmoon@gmail.com

تلفن 021-6126

فصل اول: حساب گزاره‌ها

تعریف: در یک استدلال هر یک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را فرض یا مقدم و عبارت آخر را نتیجه یا تالس می‌نامیم.

* یک استدلال زمانی معتبر است که اگر فرضهای آن درست باشد نتیجه درست است.

* جملات یا راست هستند یا دروغ ولی هرگز نمی‌توانند هم درست باشند هم دروغ. چنین جملاتی را گزاره می‌نامیم.

قاعده طرد شق ثالث گزاره‌ای که دروغ نیست، پس راست است و برعکس.

گزاره: یک جمله خبری است که یا راست است یا دروغ ولی نه هر دو.

قضیه: گزاره‌ای که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان ثابت کرد.

تشکیل گزاره‌های جدید از روی گزاره‌های قبلی (حروف پیوندی مبنا):

- حرف پیوندی «و»، «عطف»، « $\wedge$ »: زمانی راست است که هر دو راست باشد.

- حروف پیوندی «یا»، «فصل»، « $\vee$ »: زمانی راست است که یکی از گزاره‌ها راست باشد.

- نقیض «~»، یا نفی یک گزاره‌ها: ارزش گزاره اول را نفی می‌کند.

- **جدول درستی:** روشی برای تجزیه و تحلیل ارزشهای گزاره‌ها

نکته: در نوشتن جدول درستی اگر گزاره‌ای مبنا داشته باشیم 2^n ترکیب داریم.

مراحل ارزیابی:

1- داخلی‌ترین پرانتز

2- عمل

3- عمل $\wedge$ و $\vee$

گزاره راستگو: ارزش درستی گزاره‌های مبنای تشکیل دهنده آنها همواره راست باشد.

نکته: دو گزاره را به طور منطقی هم ارز گوئیم اگر به ازای هر ترکیب همسان از ارزش گزاره‌های مبنای تشکیل دهنده آنها مقادیر

درستی داشته باشد. (با گزاره‌های هم‌ارز می‌توان گزاره‌های پیچیده را با گزاره‌های ساده جایگزین کرد) $p = q$

گزاره‌های شرطی ($p \rightarrow q$): گزاره‌ی p را مقدم و q را تالی می‌نامیم و این گزاره زمانی نادرست است که مقدم درست ولی تالی

نادرست باشد.

قضیه: $p \rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q \rightarrow \sim p (p \wedge \sim q)$

تعاریف شرطی:

اگر p آنگاه q

q اگر p

p اگر q

p شرط کافی برای q است.

q شرط لازم برای p است.

تعریف: اگر $p \rightarrow q$ گزاره‌ی شرطی باشد، گزاره‌ی $\sim p \rightarrow \sim q$ را عکس نقیض، $q \rightarrow p$ را عکس و $\sim q \rightarrow \sim p$ را وارون آن گزاره می‌نامند.

خواص گزاره‌ها:

$$q \vee p \equiv p \vee q, \quad q \wedge p \equiv p \wedge q$$

$$\text{شرکت پذیری} \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r), (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$\text{قانون دمورگان: } (p \wedge q) : \sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \vee q), \dots; \sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$$

$$\text{خودتوانی: } p \equiv p \vee p; p \equiv p \wedge p$$

$$\text{پخش پذیری: } (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r); (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

$$\text{همانی: } T \equiv p \vee T, \quad p \equiv p \vee F, \quad P \equiv P \wedge T, \quad F \equiv P \wedge F$$

$$\text{متمم: } T \equiv P \vee \sim P, \quad F \equiv P \wedge \sim P$$

$$\text{نقیض دوگانه: } \sim \sim p \equiv p$$

$$\text{جذبی: } p \equiv p \vee (p \wedge q)$$

گزاره دوشروطی $(p \leftrightarrow q)$: اگر ارزش دو گزاره متشکل دهنده آن یکسان باشد آنگاه ارزش آن درست است و بدین صورت بیان می‌شود: p اگر و تنها اگر q

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$$

روشهای اثبات:

q از $p_1, \dots, p_2, \dots, p_n$ نتیجه می‌شود $\rightarrow$ یک راستگو باشد $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ نماد $\vdash$ (بنابراین):

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$$

* در گزاره فوق p_1 مقدم‌ها و مفروضات گزاره و q نتیجه می‌باشد.

* مجموعه‌ی فوق در کل یک استنتاج می‌باشد.

چند قاعده مهم استنتاج:

$$\text{قیاس فصلی: } p \vdash p \vee q$$

$$\text{قیاس تخصیصی: } p \wedge q \vdash p$$

$$\text{قیاس عطفی: } p, q \vdash p \wedge q$$

$$\text{قیاس استنتاجی: } p; p \rightarrow q \vdash q$$

$$\text{قیاس تعدی: } p \rightarrow q; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

$$\text{قیاس عکس: } p \rightarrow q; \sim q \vdash \sim p$$

استدلال غلط؛ استدلالی است که برای بعضی از حالات‌های مقدم‌های آن راست ولی تالی آن دروغ می‌باشد.

اثبات غیرمستقیم:

یک استلزام منطقی با عکس نقیض آن هم‌ارز است.

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

بنابراین گزاره‌ی فوق راستگو می‌باشد. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

به جای آن که ثابت کنیم $p \rightarrow q$ به طور مستقیم درست می‌باشد، فرض می‌کنیم که q دروغ است و نشان می‌دهیم که در صورت اخیر p نیز دروغ است.

اثبات به وسیله‌ی برهان خلف:

این روش بر پایه‌ی راستگوی و یا قیاس بنا شده است.

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

$$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$$

در نتیجه اگر گزاره‌ی p به گزاره‌ی دروغ q منجر شود آنگاه خود p باید دروغ باشد.

تناقض: گزاره‌ای که ارزش آن صرف‌نظر از مقادیر متغیرهای ظاهر شده در آن همواره دروغ است.

نکته: در نتیجه هر گزاره‌ای که به یک تناقض منجر شود دروغ می‌باشد.

نکته: اگر همه‌ی p_i ها راست و $\sim q$ دروغ باشد در نتیجه p راست است. (برهان خلف)

گزاره‌نما: عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهای به کار رفته در آن مشخص شود به گزاره تبدیل شود.

- گزاره‌نمایی که تنها شامل یک متغیر باشد، 1- مکانی، شامل دو متغیر باشد، 2- مکانی و اگر شامل n متغیر باشد مکانی نامیده می‌شود.

- مجموعه مقادیری که می‌تواند جایگزین یک متغیر موجود در گزاره‌نما شود جهان نامیده می‌شود.

- یک گزاره‌نمای n - مکانی را ارضا شدنی می‌گوییم هرگاه یک n تایی موجود باشد که آن را ارضا کند.

- اگر تمامی n تایی‌ها موجب ارضای آن شوند گزاره‌نمای مزبور را معتبر خواهیم گفت.

- دو گزاره‌نما را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه به ازای کلیه مقادیر ممکن از متغیرهایشان ارزش درستی یکسان داشته باشند.

$$X_{(x)} \longleftrightarrow Y_{(x)} \text{ هم‌ارز معتبر است.}$$

سورها

سور جهانی (عمومی): به مقادیر ویژه‌ای از a و b بستگی ندارد. بلکه وابسته به این است که عبارت مزبور به ازای همه‌ی مقادیر a و b راست است.

گزاره‌نما به ازای هر مقداری که به متغیر a منسوب شود راست است: $\forall_{(a)} R_{(a)}$

سور وجودی: متغیری در یک گزاره‌نما که می‌توان با انتخاب مقدار مناسبی برای متغیر یاد شده به یک گزاره‌ی راست تبدیل کرد.

$$\exists_{(a)} R_{(a)}$$

$\forall_x p(x)$ تمامی مقادیر از جهان متغیر x گزاره‌نمای p را ارضا می‌کند. (جهانی)

$\exists_x p(x)$ لاقط یک مقدار از جهان متغیر x وجود دارد که p را ارضا کند. (وجودی)

نقیض گزاره‌های سوردار:

- سورهای وجودی $\leftarrow$ ترکیب فصلی $\exists x \sim p(x) \equiv \sim [\forall x p(x)]$

- سورهای عمومی $\leftarrow$ ترکیب عطفی $\forall x \sim p(x) \equiv \sim [\exists x p(x)]$

- منطق گزاره‌ای: حالت خاصی از منطق گزاره‌نماهاست که در آن هیچ کدام از گزاره‌ها شامل سور و متغیر نیست.

چهار قاعده مهم استنتاج:

تعمیم وجودی $p(a) \vdash \exists x p(x)$

تعمیم جهانی $p(a) \vdash \forall x p(x)$

- a یک ویژه از یک جهان متغیر x به گونه‌ای که p را ارضا کند.

جهان لحظه‌ای $\forall x p(x) \vdash p(a)$

- a هر عضوی از جهان متغیر x می‌تواند باشد.

اعمال سورها بر روی ترکیب‌های عطفی و فصلی در گزاره نماها

$$\forall x p(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x [p(x) \wedge Q(x)]$$

$$\exists x p(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x [p(x) \wedge Q(x)]$$

$$\forall x p(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \exists x [p(x) \vee Q(x)]$$

$$\exists x [p(x) \wedge x Q(x)] \vdash \exists x p(x) \wedge \exists x p(x)$$

و اما گزاره‌ای که شامل متغیر نمی‌باشد.

$$\forall x [p(x) \vee Q] \equiv \forall x [p(x) \wedge Q]$$

استقرای ریاضی

اصل استقرای ریاضی قاعده‌ی استنتاجی را در اختیار ما قرار می‌دهد.

$$p(1), \forall x [p(k) \rightarrow p(k+1)] \vdash \forall n p(n)$$

1- $p(1)$ راست است.

2- $\forall k \geq 1$ و $p(k)$ و $p(k+1)$ را نتیجه می‌دهد.

3- $p(x)$ راست و $p(k)$ و $\forall k \geq n$ نتیجه می‌دهد $p(k+1)$ را.

مطالب تکمیلی فصل اول

منطق ریاضی

منطق: به مجموعه قواعدی که به کمک آنها بتوان اعتبار یک استدلال را مشخص نمود «منطق» گفته می‌شود. در منطق صحبت از مطالبی است که درست (True) و یا نادرست (False) می‌باشند. در جبر عادی، متغیرها روی دامنه‌ای از اعداد تعریف می‌شوند ولی در منطق، متغیرها دامنه‌شان مجموعه $\{F, T\}$ می‌باشد که مخفف کلمات True و False هستند.

گزاره: جمله‌ای خبری که بتوان به آن ارزش درست یا نادرست داد گزاره نامیده می‌شود. گزاره‌ها معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی بجز F, T نشان داده می‌شوند و به آنها «گزاره نما» (متغیر گزاره‌ای) گفته می‌شود.

جبر گزاره‌ها

گزاره ساده: گزاره‌ای که قابل تجزیه به گزاره‌های کوچکتر نبوده و خود مستقلاً دارای ارزش T یا F باشد.

گزاره مرکب: از دو یا چند گزاره ساده تشکیل می‌شود که با «رابطه‌های منطقی» با هم ترکیب شده‌اند.

رابط منطقی (لفظ پیوند دهنده): مجموعه‌ای از عملگرها می‌باشند که برخی بر روی یک گزاره عمل می‌کنند و بعضی بین دو یا چند گزاره واقع شده و بسته به T یا F بودن هر گزاره، حاصل T یا F را برای ترکیب بدست آمده، تعیین می‌نمایند.

عمده این روابط به شرح زیر می‌باشند:

- 1- **نقیض** ($\neg$ - NOT): این رابط بر روی یک گزاره عمل می‌کند و ارزش آن را معکوس می‌نماید.
- 2- **ترکیب عطفی** ($\wedge$ - AND): بر روی دو یا چند گزاره عمل می‌کند و تنها در صورتی حاصل ارزش T خواهد داشت که همه گزاره‌ها ارزش T داشته باشند.
- 3- **ترکیب فصلی** ($\vee$ - OR): به روی دو یا چند گزاره عمل می‌کند و تنها در صورتی حاصل F می‌باشد که گزاره سمت چپ (مقدم)، F و گزاره سمت راست (تالی)، F باشد.
- 5- **ترکیب دو شرطی** ($\Rightarrow$): بر روی دو گزاره عمل می‌کند و حاصل تنها در صورتی ارزش T دارد که دو گزاره ارزش یکسان (T یا F) داشته باشند.

جدول، ترکیب عطفی

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول، نقیض

P	$\neg P$
T	F
F	T

جدول، ترکیب شرطی

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول، ترکیب فصلی

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول، ترکیب دو شرطی

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جبر گزاره‌ها: عبارت است از مجموعه گزاره‌ها، رابطهای منطقی و قوانینی که در مورد آنها صدق می‌کند.

جدول درستی (صحت – Truth)

جدولی است که در آن براساس ترکیبهای مختلف و ممکن گزاره‌های ساده، ارزش گزاره‌ای مرکب از گزاره‌های ساده و رابطهای

منطقی تعیین می‌گردد. جدول زیر نمونه‌ای از جدول درستی یک گزاره مرکب می‌باشد.

 جدول، جدول درستی گزاره مرکب $(P \vee Q) \vee \neg P$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \vee \neg P$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

اولویت (تقدم) رابطها

اولویت رابطها در یک گزاره مرکب به ترتیب زیر است:

- 1- $\neg$ (نقیض)
- 2- $\wedge$ (ترکیب عطفی)
- 3- $\vee$ (ترکیب فصلی)
- 4- $\rightarrow$ (ترکیب شرطی)
- 5- $\leftrightarrow$ (ترکیب دوشروطی)

در صورت وجود پرانتز در گزاره مرکب، داخلی‌ترین پرانتز دارای بالاترین اولویت است و نیز بین رابطهای هم اولویت سمت چپ‌ترین رابط در گزاره مرکب دارای اولویت بالاتر است.

فرمول‌های خوش ساخت (Well – Formed)

یک فرمول خوش ساخت (wff) با استفاده از قوانین زیر تعیین می‌گردد:

(الف) یک گزاره نما (متغیر گزاره‌ای) به تنهایی یک wff می‌باشد.

(ب) اگر A یک wff باشد، $\neg A$ نیز یک wff خواهد بود.

(ج) اگر A, B هر دو wff باشند، آنگاه $(A \wedge B)$ و $(A \vee B)$ و $(A \rightarrow B)$ و نیز $(A \leftrightarrow B)$ نیز wff خواهند بود (گاهی پرانتزها برای سادگی حذف می‌شوند).

(د) هر رشته‌ای از گزاره‌ها و رابطهای منطقی که تنها با قانونهای (الف) و (ب) و (ج) ساخته شده باشد یک wff می‌باشد.

بعنوان مثال گزاره $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\wedge Q)$ یک wff نمی‌باشد ولی $(P \wedge (Q \rightarrow R))$ یک wff است.

گزاره همیشه درست (Tautology)

یک گزاره مرکب که ارزش آن مستقل از ارزش گزاره‌های ساده تشکیل دهنده، همواره درست باشد یک «گزاره همیشه درست» (تاتالوژی) گفته می‌شود. جدول نمونه‌ای از جدول درستی یک گزاره همیشه درست را نشان می‌دهد.

قضیه: اگر A و B دو گزاره همیشه درست باشند، $A \wedge B$ نیز یک گزاره همیشه درست است.

قضیه: در یک گزاره همیشه درست، اگر به جای یکی از گزاره‌های ساده یک گزاره دیگر (اعم از ساده یا مرکب) جایگزین شود گزاره بدست آمده کماکان یک گزاره همیشه درست خواهد بود.

بعنوان نمونه در گزاره مرکب همیشه درست $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$ اگر به جای گزاره ساده P، گزاره $R \rightarrow S$ جایگزین شود، گزاره حاصل یعنی $(R \rightarrow S) \vee Q \leftrightarrow Q \vee (R \rightarrow S)$

نیز یک گزاره همیشه درست است.

نکته: عمل جایگزینی را می‌توان برای بیش از یک متغیر نیز انجام داد مشروط به اینکه جایگزینی بصورت همزمان صورت گیرد.

در مقابل یک گزاره همیشه راست، گزاره همیشه نادرست (Contradiction) نیز وجود دارد.

هم ارزی

دو گزاره هم ارز: دو گزاره A و B هم ارز نامیده می‌شوند، اگر به ازای کلیه حالات ارزشی ممکن گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آنها، ارزش یکسان داشته باشند (ستون آخر جدول درستی آنها یکسان باشد). هم ارز بودن دو گزاره A و B بصورت $A \Leftrightarrow B$ نمایش داده می‌شود.

یکسان بودن ارزش A و B باعث می‌شود که ترکیب دو شرطی $A \leftrightarrow B$ همواره درست باشد، پس می‌توان گفت A و B زمانی هم ارز می‌باشند که $A \leftrightarrow B$ یک گزاره همیشه درست باشد.

قضیه: اگر $A \Leftrightarrow B$ و $B \Leftrightarrow C$ باشند آنگاه $A \Leftrightarrow C$ خواهد بود.

نکته: اگر گزاره‌های A و B هم ارز باشند، می‌توان در گزاره مرکبی مانند P ، بجای یک یا چند بار تکرار A و یا B ، معادل هر یک را قرار داد. جدول زیر گزاره‌های مرکب هم ارز مهم را نشان می‌دهد:

جدول. گزاره‌های هم ارز مهم

گروه دو	گروه یک	توضیح
$P \vee P \Leftrightarrow P$	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	شرکت پذیری جابجایی توزیع پذیری عضو خنثی عضو صفر عضو وارون
$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	
$P \vee F \Leftrightarrow P$	$P \wedge T \Leftrightarrow P$	
$P \vee T \Leftrightarrow T$	$P \wedge F \Leftrightarrow F$	دمورگان
$\neg P \vee P \Leftrightarrow T$	$\neg P \wedge P \Leftrightarrow F$	
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	
$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow Q \rightarrow \neg P$	

از آنجا که همواره رسم جدول درستی در حالت تعداد زیاد گزاره‌ها ممکن نیست، می‌توان با استفاده از روابط هم ارز و جایگزینی در فرمول‌های منطقی، هم ارز یک گزاره مرکب را بدست آورد. بعنوان مثال دو رابطه:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

$$\text{و } (P \wedge Q) \rightarrow R$$

هم ارزند زیرا:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$$

دوگانی (همزادی – Duality)

دو رابطه $\wedge$ و $\vee$ دوگان یکدیگرند و از آنجا که همه روابط از جمله $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ از سه رابطه $\wedge$ و $\vee$ و $\neg$ بدست می آیند، تعریف دوگانی را می توان براساس سه رابطه فوق بیان نمود.

دوگان: دو گزاره دوگان یکدیگر نامیده می شوند، اگر هر یک بتوانند از تبدیل رابطه های $\wedge$ به $\vee$ و برعکس و نیز ثابتهای T به F و برعکس بدست آیند. دوگان گزاره A با A^* نمایش داده می شود. بعنوان مثال دوگان گزاره:

$$\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg(Q \wedge \neg S)) \vee F$$

$$\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg(Q \vee \neg S)) \wedge T$$

برابر است با:

قضیه: اگر دو گزاره A و A^* همزاد یکدیگر باشند و $P_1, P_2, \dots, P_n$ گزاره های بکار رفته در A و A^* باشند آنگاه:

$$\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

قضیه: اگر $A \Leftrightarrow B$ باشد آنگاه روابط $A^* \Leftrightarrow B^*$ و $\neg A^* \Leftrightarrow \neg B^*$ نیز برقرار خواهند بود.

استلزام منطقی

استلزام منطقی: گزاره A، مستلزم گزاره B نامیده می شود اگر $A \rightarrow B$ و تنها اگر یک گزاره همیشه درست باشد بصورت $A \Rightarrow B$ نمایش داده می شود.

نکته: علائم $\Rightarrow$ و $\Rightarrow$ رابط منطقی نیستند و در نتیجه عبارات $A \Leftrightarrow B$ و $A \Rightarrow B$ گزاره مرکب نمی باشند.

برای اثبات اینکه $A \rightarrow B$ یک گزاره همیشه درست است ($A \Rightarrow B$) می توان به گزاره A (مقدم) ارزش T نسبت داد و اثبات نمود که این نسبت منجر به T شدن ارزش B (تالی) می گردد و یا به گزاره B (تالی) ارزش F را نسبت داد و اثبات نمود که منجر به F شدن ارزش A (مقدم) می گردد.

نکته: برای اثبات $A \Leftrightarrow B$ می توان $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow A$ را بررسی نمود و در صورت برقراری آنها دو گزاره A و B هم ارزند.

گزاره های همیشه درست شرطی مهم عبارتند از:

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

$$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$$

$$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$$

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

$$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$$

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$$

قضیه: اگر A یک گزاره همیشه درست باشد و $A \Rightarrow B$ برقرار باشد، آنگاه B نیز یک گزاره همیشه درست است.

قضیه: اگر $A \Rightarrow B$ و $A \Rightarrow C$ آنگاه $B \Rightarrow C$

قضیه: اگر $A \Rightarrow B$ و $A \Rightarrow C$ آنگاه $A \Rightarrow (B \wedge C)$

قضیه: اگر $H_1, H_2, \dots, H_n, P$ مستلزم Q باشند یعنی: $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge P) \Rightarrow Q$

آنگاه $H_1, H_2, \dots, H_n$ مستلزم $P \rightarrow Q$ خواهند بود یعنی:

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow P \rightarrow Q$$

مجموعه رابط‌های منطقی کامل

مجموعه‌ای از رابط‌های منطقی که تمام عبارات و گزاره‌های دلخواه را بتوان با استفاده از آنها بیان نمود، «مجموعه کامل» از رابط‌های منطقی» و یا «مجموعه رابط‌های منطقی کامل» نامیده می‌شوند به عبارت دیگر می‌توان هر فرمول دلخواهی را بصورت فرمولی هم ارز آن نوشت که در آن تنها رابط‌های منطقی مذکور بکار رفته باشد. بعنوان مثال گزاره $P \leftrightarrow Q$ را بصورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \{ \rightarrow, \leftarrow, \wedge \}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \{ \neg, \vee, \wedge \}$$

$$\Leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg(Q \wedge \neg P)) \{ \neg, \wedge \}$$

مجموعه‌های $\{ \neg, \wedge \}$ و $\{ \neg, \vee \}$ مجموعه‌های کامل از رابط‌های منطقی هستند ولی مجموعه‌های $\{ \vee, \wedge \}$ ، $\{ \wedge, \neg \}$ ، $\{ \vee, \neg \}$ ، $\{ \neg \}$ مجموعه‌های کامل نیستند.

رابط منطقی $\uparrow$ (NAND): این رابط، ترکیبی از دو رابط AND و NOT است:

$$P \uparrow Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

رابط منطقی $\downarrow$ (NOR): این رابط، ترکیبی از دو رابط OR و NOT است:

$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$

نکته: مجموعه‌های $\{ \uparrow \}$ و $\{ \downarrow \}$ نیز مجموعه‌های کامل هستند.

برای اثبات کامل بودن مجموعه‌ای از رابط‌های منطقی کافی است با استفاده از آنها بتوان رابط‌های منطقی یک مجموعه کامل را ساخت. با استفاده از رابط $\uparrow$ ، $\neg$ و $\vee$ که رابط‌های یک مجموعه کامل هستند ایجاد می‌شوند.

$$P \uparrow P \Leftrightarrow \neg P$$

$$\neg P \uparrow \neg Q \Leftrightarrow P \vee Q$$

$$\neg P \uparrow \neg \phi \Leftrightarrow P \vee \phi$$

فرمول‌های نرمال

DNF (Disjunctive Normal Form): هم ارز یک فرمول که بصورت مجموع حاصل ضرب‌ها بیان شده باشد که با استفاده از Σ نیز نمایش داده می‌شود.

CNF (Conjunctive Normal Form): هم ارز یک فرمول که بصورت ضرب مجموع‌ها بیان شده باشد که با استفاده از Π نیز نمایش داده می‌شود.

مینترم (Minterm): ترکیب عطفی متغیرهای دلخواه (گزاره‌نماها) که در آن متغیر تنها یک بار یا به صورت اصلی و یا به صورت نفی ظاهر شده باشد مینترم نامیده می‌شود (مینترمها با m نمایش داده می‌شوند).

ماکسترم (Maxterm): ترکیب فصلی متغیرهای دلخواه (گزاره‌نماها) که در آن هر متغیر تنها یک بار یا به صورت اصلی و یا بصورت نفی ظاهر شده باشد ماکسترم نامیده می‌شود (ماکسترمها با M نمایش داده می‌شوند).

جدول زیر کلیه مینترمها و ماکسترمهای ممکن توسط سه متغیر P و Q و R را نشان می‌دهد.

جدول، مینترمها و ماکسترمهای قابل تولید با سه متغیر P ، Q و R .

m_0	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	M_0	$P \vee Q \vee R$
m_1	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	M_1	$P \vee Q \vee \neg R$
m_2	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	M_2	$P \vee \neg Q \vee R$
m_3	$\neg P \wedge Q \wedge R$	M_3	$P \vee \neg Q \vee \neg R$
m_4	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	M_4	$\neg P \vee Q \vee R$
m_5	$P \wedge \neg Q \wedge R$	M_5	$\neg P \vee Q \vee \neg R$
m_6	$P \wedge Q \wedge \neg R$	M_6	$\neg P \vee \neg Q \vee R$
m_7	$P \wedge Q \wedge R$	M_7	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

PDNF: هم ارز یک فرمول که بصورت مجموع مینترمها بیان شده باشد.

PCNF: هم ارز یک فرمول که بصورت حاصل ضرب ماکسترمها بیان شده باشد.

روش بدست آوردن DNF و CNF

در مراحل زیر DNF و CNF یک گزاره (فرمول) بدست می آید:

الف) همه الفاظ بجز $\neg, \vee, \wedge$ حذف می شوند (به ترکیبی از $\neg, \vee, \wedge$ تبدیل می شوند).

ب) اگر بخشی از فرمول بصورت نفی $\neg$ ظاهر شده باشد با استفاده از قوانین دمورگان، $\neg$ فقط به متغیرها منتسب می شود.

ج) اگر بخشی از فرمول بصورت حاصل ضرب مجموعه ها بیان شده باشد با استفاده از توزیع پذیری $\wedge$ و $\vee$ آنرا به مجموع حاصل ضربها تبدیل می کنیم (DNF) و اگر بصورت مجموع حاصل ضربها بود به حاصل ضرب مجموعه ها تبدیل می شود (CNF).

بعنوان مثال فرمول $P \wedge (P \rightarrow Q)$ بصورت زیر به DNF تبدیل می گردد:

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

و یا فرمول $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ بصورت زیر به CNF تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)) \\ &\Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q \vee P) \wedge (P \vee Q \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \end{aligned}$$

خواص مینترمها و ماکسترمها

مینترمها و ماکسترمها دارای خواص زیر می باشند:

1- متمایز از یکدیگرند.

2- هر مینترم تنها به ازای یک ترکیب دارای ارزش T و ماکسترم فقط به ازای یک ترکیب دارای ارزش F می باشد.

3- اگر n تعداد متغیرها، باشد 2^n مینترم و یا ماکسترم موجود است.

$$M_0, M_1, \dots, M_{2^n} = 1 \text{ یا } m_0, m_1, \dots, m_{2^n} = 1$$

4- درایه T در جدول درستی نشان دهنده مینترمها و درایه F نشان دهنده ماکسترمها می باشد.

5- مینترمها و ماکسترمها دوگان یکدیگرند.

نکته: اندیسهایی از m که در PCNF موجود نیست، قطعاً بعنوان اندیسهای M در PDNF وجود دارند بعنوان نمونه اگر یک فرمول با سه متغیر را بتوان بصورت:

$$\sum(1,6,7) \Leftrightarrow m_1 \vee m_6 \vee m_7$$

بیان کرد، همین فرمول قابل ارائه بصورت:

$$\prod(0,2,3,4,5) = M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5$$

می باشد که همان صورت PDNF است.

تست‌های فصل اول

۱- برای فرمول گزاره‌ای $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$ مجموع مینترم‌ها (PDNF) و حاصل ضرب ماکسترم‌ها (PCNF) چیست؟

$$(1) \quad \prod(0,1,2,3) \text{ و PDNF وجود ندارد.} \quad (2) \quad \sum(0,1,2,3) \text{ و PCNF وجود ندارد.}$$

$$(3) \quad \sum(0,2) = \prod(1,3) \quad (4) \quad \sum(0,2) \text{ و } \prod(1,3)$$

۲- در منطق گزاره‌ها

(1) هر گزاره راستگو (tautology) یک قضیه نیست.

(2) هر قضیه یک گزاره راستگو (tautology) است و بالعکس.

(3) هر قضیه یک گزاره راستگو (tautology) نیست.

(4) در مورد راستگویی یک قضیه چیزی نمی‌توان گفت.

۳- فرض کنید $h: p \rightarrow \{0,1\}$ یک تابع ارزش باشد. و A گزاره‌ای باشد که $h(A) = 1$. در این صورت:

(1) A همیشه صادق است. (2) $A \sim$ همیشه صادق نیست.

(3) $\sim A$ همیشه صادق است. (4) نمی‌توان چیزی درباره $\sim A$ گفت.

۴- گزاره $\sim(p \rightarrow \sim p)$

(1) همیشه صادق است. (2) با p معادل است. (3) همیشه کاذب است. (4) با $\sim p$ معادل است.

۵- صورت نرمال عطفی (CNF) فرمول $\sim(p \leftrightarrow q)$ عبارتست از:

$$(1) \quad \sim((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \quad (2) \quad \sim p \wedge q$$

$$(3) \quad (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) \quad (4) \quad (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

۶- مجموعه گزاره‌های $\{p0 \rightarrow p1, p1 \rightarrow p2, p2 \rightarrow p3, p3 \rightarrow p0\}$

(1) سازگار نیست.

(2) بستگی به صدق یا کذب اتم‌های $p1$ و $p2$ و $p3$ دارد.

(3) سازگار است.

(4) بستگی به صدق یا کذب اتم $p0$ دارد.

۷- علامت $p[x/t]$ یعنی در فرمول p، در صورت امکان، ترم t را به جای متغیر x جانشین کنید. در این صورت

$(\exists x(y < x))[y/x]$ عبارتست از:

$$(1) \quad \exists x(y < x) \quad (2) \quad \exists x(x < x) \quad (3) \quad \forall y(x < y) \quad (4) \quad \forall y(y < x)$$

۸- گزاره‌های

$$a: \forall x(p(x) \vee q(x)) \leftrightarrow \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$$

$$b: \exists x(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow \exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$$

را در نظر بگیرید. در این صورت:

(1) a و b همیشه صادقند. (2) هیچکدام از a و b همیشه صادق نیستند.

(3) a همیشه صادق است. (4) b همیشه صادق است.

۹- کدام یک از گزاره‌های زیر یک همانگویی (tautology) است؟

$$(1) A \vee B \rightarrow A \quad (2) (A \vee B) \vee (A \wedge B) \quad (3) (A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A \quad (4) (A \rightarrow B) \vee B$$

۱۰- فرض کنید $V: p \rightarrow \{0,1\}$ یک تابع ارزش و p مجموعه گزاره‌های اتمی باشد. در این صورت $V(A \vee B)$ عبارتست از

$$(1) \min\{V(A), V(B)\} \quad (2) V(A) + V(B) \quad (3) V(A).V(B) \quad (4) \max\{V(A), V(B)\}$$

۱۱- $A \wedge B \leftrightarrow A$ یک همانگویی (tautology) باشد، آنگاه

(1) $B \rightarrow A$ نیز یک همانگویی است. (2) $A \rightarrow B$ نیز یک همانگویی است.

(3) $A \vee B$ نیز یک همانگویی است. (4) $A \wedge B$ نیز یک همانگویی است.

۱۲- صورت نرمال فصلی (DNF) گزاره $(p \wedge \sim q) \sim$ عبارتست از (p و q گزاره‌های اتمی هستند)

$$(1) \sim p \vee q \quad (2) p \wedge \sim q \quad (3) \sim (q \rightarrow p) \quad (4) \sim p \wedge q$$

۱۳- فرض کنید $P = \{p_0, p_1, \dots\}$ مجموعه همه گزاره‌های اتمی باشد. آنگاه

(1) p کامل است. (2) p سازگار نیست. (3) p سازگار و کامل است. (4) p سازگار است.

۱۴- علامت $A[t/x]$ یعنی در فرمول A به جای متغیر x ترم t را جانشین کنید (اگر جانشینی مجاز است). در این

صورت $\forall x(x+z=0[z/x])$ برابر است با

$$(1) \forall x(z+z=0) \quad (2) \forall z(z+z=0) \quad (3) \forall x(x+z=0) \quad (4) \forall x(x+z=x)$$

۱۵- کدامیک از گزاره‌های زیر یک همانگویی (tautology) نیست؟

$$(1) (\sim A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (2) A \vee B \rightarrow A$$

$$(3) (A \rightarrow \sim B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B) \quad (4) (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$$

۱۶- صورت نرمال فصلی (CNF) گزاره $P \vee q$ عبارتست از (p و q گزاره‌های اتمی هستند)

$$(1) P \wedge q \quad (2) \sim p \vee \sim q \quad (3) P \vee q \quad (4) P \rightarrow q$$

۱۷- کدامیک از مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها سازگار است؟

$$(1) \{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2\} \quad (2) \{p_0, p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow \sim p_0\}$$

$$(3) \{p_0, p_1, p_1 \wedge p_2, \sim p_1\} \quad (4) \{p_0 \wedge p_1, p_1 \wedge p_2, \sim p_2\}$$

۱۸- جمله $\exists x \exists y (x \neq y)$

(1) در هر مدل فقط با دو عضو راست است. (2) در هر مدل یک عضوی راست است.

(3) در هر مدل با حداقل دو عضو راست است. (4) در هیچ مدلی راست نیست.

۱۹- فرض کنید $\{A, B\}$ سازگار باشد. آنگاه

(1) $A \wedge B$ (2) $A \wedge B$ (3) $\sim (A \wedge B)$ (4) $\vdash A \vee B$

۲۰- فرض کنید V یک تابع ارزش برای منطق گزاره‌ها باشد. آنگاه $V(A \rightarrow B) = 1$ اگر و فقط اگر

(1) $V(A) = V(B)$ (2) $V(A) \leq V(B)$ (3) $V(B) \leq V(A)$ (4) $V(A) + V(B)$

۲۱- کدام یک از DNF های زیر معادل با عبارت $(\overline{x+y} + \overline{x+y})(z+y)$ است؟

(1) $\overline{x}\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz$ (2) $\overline{x}\overline{y}\overline{z} + xyz + \overline{x}\overline{y}z$ (3) $\overline{x}\overline{y}z + xyz + xyz$ (4) $\overline{x}\overline{y}z + \overline{x}yz + x\overline{y}\overline{z}$

۲۲- کدام استنتاج معتبر است؟

(1) $\{\exists x p(x), \forall x \forall y (p(x) \rightarrow Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$ (2) $\{\exists x p(x), \exists x \forall y (p(x) \rightarrow Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$

(3) $\{\exists x p(x), \exists x \exists y (p(x) \rightarrow Q(y))\} \vdash \exists y Q(y)$ (4) $\{\exists x p(x), \forall x \exists y (p(x) \rightarrow Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$

۲۳- کدام فرمول هم‌ارز منطقی صورت گزاره‌ای $((\sim P_1 \vee P_2) \rightarrow P_3)$ می‌باشد؟

(1) $(\sim P_1 \vee \sim P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee \sim P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$

(2) $(P_1 \vee \sim P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee \sim P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$

(3) $(\sim P_1 \vee \sim P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee \sim P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$

(4) $(P_1 \vee P_2 \vee \sim P_3) \wedge (P_1 \vee \sim P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$

۲۴- تعداد صورت‌های گزاره‌ای که می‌توان با n متغیر گزاره‌ای (نماد جمله‌ای) ساخت. برابر است با:

(1) n (2) 2^n (3) 2^{2^n} (4) نامتناهی

۲۵- کدام یک از گزاره‌های زیر با گزاره $((\sim q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \sim p$ هم‌ارزند؟

(1) $((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$ (2) $((p \vee q) \wedge p) \rightarrow \sim q$

(3) $((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$ (4) $((p \vee \sim q) \wedge p) \rightarrow q$

۲۶- اگر دامنه متغیرهای x و y اعداد صحیح غیرمنفی باشد مقادیر درستی عبارات a و b را تعیین کنید.

$a = \forall x \exists y x > y$

$b = \exists x \forall y x > y$

(1) $a = T$ و $b = T$ (2) $a = F$ و $b = F$ (3) $a = T$ و $b = F$ (4) $a = F$ و $b = T$

۲۷- گزاره $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ را در نظر بگیرید برای تمام حالت‌های A و B و C (True, False) درباره گزاره فوق اظهار نظر کنید.

- (1) عبارت فوق همواره غلط است.
 (2) عبارت فوق همواره درست است.
 (3) عبارت فوق در بیشتر موارد صحیح است.
 (4) عبارت فوق در بیشتر موارد غلط است.

۲۸- تعداد زیر فرمول‌های درست ساخت $((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (\neg A_3))$ برابر است با:

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 6

۲۹- کدام یک از گزاره‌های زیر توتولوژی است؟

$$(1) \neg[(P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R \rightarrow S)] \vee [(P \wedge Q \rightarrow Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \rightarrow S]$$

$$(2) (P \rightarrow (Q \wedge R \rightarrow S \vee T)) \rightarrow (P \vee (Q \wedge R \rightarrow S))$$

$$(3) A \vee B \rightarrow A$$

$$(4) A \vee \sim B \rightarrow B \vee C$$

۳۰- تعداد کل گزاره‌های نا هم‌ارزی که تنها شامل گزاره‌های اتمی P_1 و P_2 بوده و در آنها تنها از نمادهای $\vee$ و $\wedge$ استفاده شده است چیست؟

- (1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 16

۳۱- روابط محمولی زیر را در نظر بگیرید:

$$x \text{ دانش آموز است. } S(x) \equiv$$

$$x, y \text{ را دوست دارد. } P(x, y) \equiv$$

$$y \text{ استاد است. } Q(y) \equiv$$

در آن صورت کدام گزینه ترجمه صوری گزاره زیر می‌باشد. اگر هر دانش آموزی تمام استادها را دوست داشته باشد آنگاه خود را نیز دوست دارد.

$$(1) \forall x [[S(x) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow P(x, y))] \rightarrow P(x, y)]$$

$$(2) \forall x [S(x) \rightarrow (\forall y (Q(y) \rightarrow P(x, y)) \rightarrow P(x, y))]$$

$$(3) \forall x \forall y [[S(x) \wedge (Q(y) \rightarrow P(x, y))] \rightarrow P(x, y)]$$

$$(4) \forall x \exists y [(S(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow P(x, y))) \rightarrow P(x, y)]$$

۳۲- کدام استنتاج معتبر نیست؟

$$(1) \{A \rightarrow (B \vee C), (\neg B \wedge A), (A \rightarrow \neg C)\} \vdash \neg D$$

$$(2) A \rightarrow B \vdash (C \vee A) \rightarrow (C \vee B)$$

$$(3) A \rightarrow B \vdash (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$$

$$(4) \{R, R \rightarrow A, (A \vee B) \rightarrow C\} \vdash \neg C$$

۳۳- عبارت $(\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}, xy < 4 \wedge x + y < 5) \sim$ معادل است با:

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy \geq 4 \wedge x + y \geq 5 \quad (1) \quad \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy \geq 4 \vee x + y \geq 5$$

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy \geq 4 \wedge x - y \geq 5 \quad (4) \quad \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy \geq 4 \vee x - y \geq 5 \quad (3)$$

۳۴- شکل اصل عطفی عادی (PCNF) یک عبارت منطقی با سه متغیر P, Q, R و برابر است با M_0 و M_3 و M_6

Π شکل اصلی فصلی عادی (PDNF) آن کدام از پاسخ‌های زیر است؟

$$\sum m_0, m_2, m_4, m_6 \quad (2) \quad \sum m_0, m_3, m_6 \quad (1)$$

$$\sum m_1, m_2, m_4, m_5, m_7 \quad (4) \quad \sum m_1, m_3, m_5, m_7 \quad (3)$$

۳۵- کدام استدلال زیر نامعتبر است؟

$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow s \\ p \rightarrow (q \vee \neg r) \quad (4) \\ \hline \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore s \end{array}$	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \rightarrow (s \vee t) \quad (3) \\ \hline \neg s \\ \hline \therefore t \end{array}$	$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \neg p \rightarrow \neg p \quad (2) \\ \hline p \\ \hline \therefore r \end{array}$	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \quad (1) \\ \hline \neg r \\ \hline \therefore q \end{array}$
--	---	--	--

۳۶- گزاره $p \vee q \Rightarrow p \vee \bar{q} \vee r$ با کدام یک از گزاره‌های زیر معادل است؟

$$\bar{p} \vee q \vee r \quad (4) \quad (p \vee \bar{q}) \wedge \bar{r} \quad (3) \quad (\bar{p} \vee q) \wedge \bar{r} \quad (2) \quad p \vee \bar{q} \vee r \quad (1)$$

۳۷- برای دنباله حقیقی $\{a_n\}_n^\infty = 0$ اگر گزاره $(\exists N > 0 \forall n > N : |a_n - a_{n-1}| < 7)$ نادرست باشد، کدام گزاره لزوماً

صحيح است؟

$$\forall N > 0, \exists n > N : a_n - a_{n-1} \geq 7 \quad (1)$$

$$\forall N \geq 0, \forall n > N : a_n - a_{n-1} \geq 7 \quad \text{یا} \quad a_n - a_{n-1} \leq 7 \quad (2)$$

$$\forall N \geq 0, \exists n > N : a_n - a_{n-1} \geq 7 \quad \text{یا} \quad a_{n-1} - a_n \leq -7 \quad (3)$$

$$\forall N \geq 0 \quad \exists n > N : (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_n) \geq 49 \quad (4)$$

۳۸- در منطق ۳ مقداری به جای دو مقداری، درست و نادرست و نمی‌دانم وجود دارد یعنی $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ اگر برای $A=1$ و

$B=\frac{1}{2}$ مقادیر $A \vee B=1$ و $A \wedge B=\frac{1}{2}$ گردد نتیجه گزاره‌های منطقی زیر در منطق سه مقداری $A=1$ و $B=\frac{1}{2}$ و

$C=0$ و $D=\frac{1}{2}$ به ترتیب چیست؟

$$\left\{ \begin{array}{l} ((A \rightarrow B) \vee C) \rightarrow D \\ [(\neg A \wedge B) \rightarrow C] \vee \neg D \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

۳۹- اگر گزاره P فقط تابع x و گزاره Q فقط تابع y باشند، عبارت زیر با کدام عبارت داده شده معادل است؟

$$(\forall_x : (P \Rightarrow \exists_y : Q)) \Rightarrow ((\forall_x : P) \Rightarrow (\exists_y : Q))$$

$$\forall x \exists y p \wedge Q \quad (4) \quad \exists y \forall x p \quad (3) \quad \forall x \exists y Q \quad (2) \quad \text{True} \quad (1)$$

۴۰- اگر برای متغیرهای منطقی $x_1, \dots, x_n$ بدانیم $\bar{x}_1 \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \vee \bar{x}_n) \equiv \text{True}$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \equiv \text{True} \quad (1)$$

$$(\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee \dots \vee (\bar{x}_{n-1} \wedge \bar{x}_n) \equiv \text{True} \quad (2)$$

$$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \equiv \text{True} \quad (3)$$

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \vee x_n) \equiv \text{True} \quad (4)$$

۴۱- جمله $\forall x \forall y \forall z ((x = y) \wedge (y = z)) \dots$

(1) در هر مدل سه عضوی صادق است.

(2) در هر مدل یک عضوی صادق است.

(3) در هر مدل با حداقل سه عضوی صادق است.

(4) در هر مدل یک عضوی کاذب است.

۴۲- از راست بودن گزاره‌های $p \wedge q$, $p \rightarrow r \wedge q$, $r \rightarrow s \vee t$ و $s \sim$ کدام گزاره نتیجه می‌دهد؟

$$T \quad (1) \quad F \quad (2) \quad q \wedge t \quad (3) \quad q \wedge \sim t \quad (4)$$

۴۳- فرض کنیم:

X عدد اول است. $p(x) \equiv$

x و $x + 2$ عدد اول هستند. یا x و $x - 2$ عدد اول هستند. $Q(x) \equiv$

$Q(x)$ را به این شکل بیان می‌کنند که x متعلق به یک جفت دوقلوی اول است. گزاره «هیچ عدد اول بزرگتر از 10^{60} ،

عضو یک جفت دوقلوی اول نیست» به کدام شکل قابل نمایش است؟

$$\forall x (p(x) \wedge x > 10^{60} \rightarrow \sim Q(x)) \quad (1) \quad \exists x (p(x) \rightarrow x < 10^{60} \wedge Q(x)) \quad (2)$$

$$\exists x (x > 10^{60} \vee \sim Q(x)) \rightarrow p(x) \quad (3) \quad \forall x ((p(x) \wedge Q(x)) \rightarrow x > 10^{60}) \quad (4)$$

۴۴- فرض کنید در بررسی مفهوم علیت نماد a q به معنای آن است که p تنها علت q است. همچنین v تابع

ارزش‌گذاری بوده و به هر جمله ارزش 0 یا 1 را نسبت می‌دهد. در این صورت $v((p \wedge q) \wedge a)$ کدام است؟

$$v(q)(1 - v(p)) \quad (2) \quad 0 \quad (1)$$

$$1 - v(q)(1 - v(p)) \quad (3) \quad 1 - v(p) - v(q) + 2v(p)v(q) \quad (4)$$

۴۵- فرض کنید $f(P, Q, R) : (P \vee Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$ کدام یک از گفته‌های زیر صحیح است؟

$$\sum m_0, m_1, m_2, m_3 \quad (4) \quad \prod M_4, M_5, M_6, M_7 \quad (3) \quad \sum m_2, m_3 \quad (2) \quad \prod M_0, M_1 \quad (1)$$

پاسخنامه تست‌های فصل اول

1- گزینه (3) صحیح است.

ابتدا فرمول موردنظر را ساده کرده و به کمک جدول درستی، صورت PDNF آن را مشخص می‌کنیم:

$$S: (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \equiv (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P \wedge (Q \vee \sim Q)$$

$$\equiv (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P \wedge T$$

p	φ	p ↔ φ	(p ↔ φ) ↔ p
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	F

$$\equiv (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P$$

$$S: (p \wedge Q) \vee (\sim p \wedge Q) \equiv \sum(0,2) = \prod(1,3)$$

2- گزینه (2) صحیح است.

3- گزینه (1) صحیح است.

تابع h هر گزاره را به ارزش آن تصویر می‌کند. اگر $h(A) = 0$ در این صورت A یک گزاره با ارزش نادرست و اگر $h(A) = 1$ ، آنگاه A گزاره‌ای با ارزش درست است.

4- گزینه (2) صحیح است.

به کمک ساده سازی با استفاده از روابط منطق ریاضی داریم:

$$\sim(p \rightarrow \sim p) \equiv \sim(\sim p \vee \sim p) \equiv \sim(\sim p) \equiv p$$

5- گزینه (4) صحیح است.

به کمک جدول صحت ارزش‌ها داریم:

p	q	p ↔ q	~(p ↔ q)
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

$$\equiv \sum(1,2)$$

$$\equiv \prod(0,3)$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

6- گزینه (2) صحیح است.

$$(p_0 \rightarrow p_1) \wedge (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow \sim p_0) \equiv p_0 \rightarrow \sim p_0$$

$$\equiv \sim p_0 \vee \sim p_0$$

$$\equiv \sim p_0$$

چون حاصل همیشه F نیست، پس گزاره‌ها با هم سازگار هستند.

7- گزینه (2) صحیح است.

منظور از نماد $[y/x]$ جایگزینی x یا y است، یعنی هر جا y داریم به جای آن x قرار می‌دهیم.

8- گزینه (2) صحیح است.

به متن درست رجوع کنید.

9- گزینه (3) صحیح است.

$$\begin{aligned}(A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A &\equiv (\sim A \vee \sim A) \rightarrow \sim A \\ &\equiv \sim A \rightarrow \sim A \\ &\equiv A \vee \sim A \\ &\equiv T\end{aligned}$$

زیرا

10- گزینه (4) صحیح است.

ارزش هر فرمول درست یا نادرست است. ارزش درستی با 1 و ارزش نادرستی با 0 مشخص می‌شود. با توجه به مفهوم ترکیب فصلی دو گزاره، ارزش این دو گزاره با ماکزیمم ارزش این دو گزاره هم ارز است در نتیجه:

$$V(A \vee B) = \max\{V(A), V(B)\}$$

11- گزینه (2) صحیح است.

با استفاده از روابط گزاره‌ها داریم:

$$\begin{aligned}A \wedge B \leftrightarrow A &\equiv [A \wedge B \rightarrow A] \wedge [A \rightarrow A \wedge B] \\ &\equiv [\sim(A \wedge B) \vee A] \wedge [\sim A \vee (A \wedge B)] \\ &\equiv [\sim A \vee \sim B \vee A] \wedge [(\sim A \vee A) \wedge (\sim A \vee B)] \\ &\equiv [(\sim A \vee A) \vee B] \wedge [T \wedge (\sim A \vee B)] \\ &\equiv T \wedge (\sim A \vee B) \\ &\equiv \sim A \vee B \\ &\equiv A \rightarrow B\end{aligned}$$

در نتیجه اگر فرمول $A \wedge B \leftrightarrow A$ یک راستگو باشد، فرمول هم‌ارز آن یعنی $A \rightarrow B$ نیز یک راستگو است.

12- گزینه (1) صحیح است.

با استفاده از قضیه دمورگان داریم: $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

13- گزینه (4) صحیح است.

هر گزاره اتمی دارای دو ارزش درستی و نادرستی است. با در نظر گرفتن ارزش درستی تمامی گزاره‌های اتمی یک مجموعه سازگار خواهیم داشت.

14- گزینه (2) صحیح است.

15- گزینه (2) صحیح است.

زیرا بنابر قانون ادخال فاصل از $A \vee B$ می توان $A \vee B$ را نتیجه گرفت و نه از $A \vee B$ گزاره A را.

16- گزینه (3) صحیح است.

چون p و q گزاره های اتمی هستند، $p \vee q$ خود در فرم نرمال عطفی یا CNF است.

17- گزینه (1) صحیح است.

اگر در گزینه (1) P_0, P_1, P_2 هر سه T باشند آنگاه ترکیب عطفی $(P_0 \rightarrow P_1) \wedge (P_1 \rightarrow P_2)$ برابر T خواهد بود. ولی در سایر گزینه ها، ترکیب عطفی گزاره ها F است.

18- گزینه (3) صحیح است.

در هر مدل با حداقل 2 عضو، می توان دو عضو یافت به گونه ای که با هم برابر نباشند.

19- گزینه (3) صحیح است.

چون $\{A, B\}$ سازگار است پس $A \wedge B \neq F$ پس $(A \wedge B) \neq T$ یعنی نمی توان $(A \wedge B) \sim$ را نتیجه گرفت.

20- گزینه (2) صحیح است.

21- گزینه (3) صحیح است.

$$\begin{aligned} \overline{(x+y+\bar{x}+\bar{y})}(z+y) &= \\ \overline{(xyz+\bar{x}+\bar{y})}(z+y) &= (\bar{x}.\bar{y}+x.y)(z+y) \\ &= \bar{x}.\bar{y}.z+x.y.z+x.y \\ &= \bar{x}.\bar{y}.z+x.y.z+x.y.\bar{z} \end{aligned}$$

22- گزینه (1) صحیح است.

$$\{\exists x p(x), \forall x \forall y (p(x) \rightarrow \sim \phi(y))\} \Rightarrow \{\exists x p(x), \forall x \sim p(x) \vee \forall y Q(y)\}$$

از آنجایی که $\exists x p(x)$ صحیح است پس $\forall x \sim p(x)$ نادرست است یعنی $\forall y Q(y)$ باید صحیح باشد.

23- گزینه (3) صحیح است.

$$\begin{aligned} (\sim p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3 &= \overline{(\bar{p}_1 + p_2)} + p_3 = p_1 \bar{p}_2 + p_3 = (p_1 + p_2)(\bar{p}_2 + p_3) \\ &= (p_1 + p_2 + p_3)(p_1 + \bar{p}_2 + p_3)(p_1 + \bar{p}_2 + p_3) \end{aligned}$$

24- گزینه (4) صحیح است.

تعداد صورت ها، نامتناهی است. اگر سوال تعداد توابع را می خواست گزینه (3) جواب می بود.

25- گزینه (1) صحیح است.

$$(\sim q \wedge \sim p) \rightarrow \sim p \equiv (q \vee p) \vee \sim p \equiv T$$

26- گزینه (2) صحیح است.

اگر $x = 0$ باشد، هیچ y که $0 > y$ در مجموعه اعداد مثبت وجود ندارد پس $a = F$. اگر $x = 2$ باشد آنگاه به ازای هر y

نامساوی $2 > y$ صحیح نیست پس $b = F$.

27- گزینه (2) صحیح است.

$$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$$

$$= (\overline{A + B + C}) + ((\overline{A + B}) + (\overline{A + C}))$$

$$= ABC + AB + \overline{A}C = B + AB + \overline{A}C = B + A\overline{A} + C = T$$

شبه جذب

شبه جذب

28- گزینه (4) صحیح است.

$$A_1, A_2, A_3, \sim A_3, A_1 \rightarrow A_3, (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \sim A_3$$

29- گزینه (1) صحیح است.

 بجای $P \wedge Q$ ، W و بجای $Q \vee R$ ، Y قرار می‌دهیم:

$$\sim [W \rightarrow (Y \rightarrow S)] \vee [(W \rightarrow Y) \rightarrow (W \rightarrow S)]$$

$$= [W \rightarrow (Y \rightarrow S)] \rightarrow [(W \rightarrow Y) \rightarrow (W \rightarrow S)]$$

می‌توان نشان داد که رابطه فوق یک استلزام منطقی است. برای این منظور فرض کنید $(W \rightarrow Y) \rightarrow (W \rightarrow S)$ نادرست باشد بنابراین $(W \rightarrow Y) = T$ و $(W \rightarrow S) = F$ پس $W = T$ و $S = F$ و $Y = T$ بنابراین $[W \rightarrow (Y \rightarrow S)] = F$ پس استلزام برقرار است.

30- گزینه (2) صحیح است.

$$P_1, P_2, P_1 \vee P_2, P_1 \wedge P_2$$

31- گزینه (1) صحیح است.

32- گزینه (4) صحیح است.

 در گزینه 4، نتیجه استنتاج C می‌شود: $(R, R \rightarrow A) \Rightarrow A$

$$A \Rightarrow A \vee B$$

$$(A \vee B, A \vee B \rightarrow C) \Rightarrow C$$

33- گزینه (1) صحیح است.

34- گزینه (4) صحیح است.

کفایست شماره‌ها را عوض کنید.

35- گزینه (4) صحیح است.

از $p \rightarrow r$ و $p \rightarrow (q \vee \sim r)$ درستی r و از p و $q \vee \sim r$ درستی q و از p و $\sim q \vee \sim s$ درستی $\sim s$ نتیجه می‌شود پس s درست نیست.

36- گزینه (1) صحیح است.

$$p \vee q \rightarrow p \vee \overline{q} \vee r = (\overline{p \vee q}) \vee p \vee \overline{q} \vee r = (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee p \vee \overline{q} \vee r = p \vee \overline{q} \vee r$$

جذب

37- گزینه (3) صحیح است.



38- گزینه (3) صحیح است.

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \frac{1}{2}$$

$$\neg 1 = 0$$

$$\neg 0 = 1$$

$$\neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \vee C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow D \equiv \neg \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2}$$

$$[(\neg A \wedge B) \rightarrow C] \vee \neg D \equiv [\neg 0 \vee C] \vee \frac{1}{2} \equiv (1 \vee 0) \vee \frac{1}{2} \equiv 1$$

39- گزینه (1) صحیح است.

40- گزینه (3) صحیح است.

$$\bar{a}_1.(a_1 + \bar{a}_2).(a_2 + \bar{a}_3) \dots (a_{n-1} + \bar{a}_n) = 1$$

$$\Rightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n = 1 \Rightarrow 3 \text{ گزینه}$$

41- گزینه (2) صحیح است.

فقط با یک عضو $x = y$ و $y = z$ همیشه صحیح است.

42- گزینه (3) صحیح است.

$$[p \wedge q] \Rightarrow p$$

$$[p, p \rightarrow (r \wedge q)] \Rightarrow (r \wedge q) \Rightarrow r$$

$$[r, r \rightarrow s \vee t] \Rightarrow s \vee t$$

$$[\sim s, s \vee t] \Rightarrow t$$

$$[p \wedge q] \Rightarrow q$$

$$[q, t] \Rightarrow q \wedge t$$

43- گزینه (1) صحیح است.

44- گزینه (3) صحیح است.

45- گزینه صحیح وجود ندارد.

$$(p \vee Q) \wedge (p \wedge \bar{Q})$$

$$= (p + q).(p.\bar{q}) = p.\bar{q} = p\bar{q}\bar{r} + p\bar{q}r = m_4 + m_5$$

$$= \sum m(4,5) = \Pi m(0,1,2,3,6,7)$$

فصل دوم: روابط توابع

فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشند. یک رابط دودویی R از A به B زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است.

$$R \subseteq A \times B, (a, b) \in R \Rightarrow aRb$$

اگر $A = B \Rightarrow R$ یک رابطه از A به B است $\Rightarrow R$ یک رابط در A است.

ماتریس و روابط

اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه می‌توان ماتریس $n \times m$ مثل $M_r = [M_{ij}]$ را نمایش داد.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

نکته: ماتریسی که فقط دارای مؤلفه‌های صفر و یک باشد ماتریس بولی نامیده می‌شود.

نکته: اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه مجموعه نسبی x نسبت به R وجود دارد که با $R(x)$ نمایش داده می‌شود.

$$R(x) = \{y \mid y \in B, xRy\}$$

قضیه: اگر R یک رابطه از A به B و A_1 و A_2 دو زیرمجموعه از A باشد آنگاه داریم:

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow R(A_1) \subseteq R(A_2)$$

$$R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$$

$$R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$$

قضیه: اگر R و S دو رابطه از A به B باشند، اگر به ازای هر $a \in A$ ، $R(a) = S(a)$ باشد آنگاه $S = R$ است.

تعریف: اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ در ماتریس بولی $n \times m$ باشند آنگاه $A \vee B$ و $A \wedge B$ به صورت زیر است:

$$A \wedge B = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_{ij} = 1 \text{ and } b_{ij} = 1) \\ 0 & \text{if .not} \end{cases}$$

$$A \vee B = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_{ij} = 1 \text{ or } b_{ij} = 1) \\ 0 & \text{if .not} \end{cases}$$

تعریف: حاصلضرب بولی $A.B$ برای دو ماتریس A و B به اندازه $n \times p$ و $m \times p$ به صورت زیر است:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_{ik} = 1, b_{kj} = 1, 1 \leq k \leq p) \\ 0 & \text{if .not} \end{cases}$$

گراف‌های سوردار، اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه در A باشد رابطه R را به صورت نموداری نمایش داد. یک دایره کوچک برای هر کدام از عناصر رسم کرده و این دایره‌ها را به عنوان رئوس یاد خواهیم کرد و خطوط سورداری به نام پال که از

راس a_1 به راس a_k رسم می‌کنیم $a_i R a_j \Leftrightarrow$

نکته: مسیری که از راسی شروع شده و به خودش خاتمه پیدا کند مدار نامیده می‌شود.

مدار به طول یک را حلقه می‌نامیم.

هر یال در گراف سوردار یک مسیر به طول یک تلقی می‌شود.

تعریف: $xR^\infty y$ ، هرگاه مسیری از x به y در A موجود باشد. در بعضی اوقات R^∞ را رابطه (مسیر) ارتباطی برای A می‌گویند.

نکته: یک مسیر به طول n باید دارای $n+1$ عنصر از A باشد. (عناصر الزاماً متمایز نیستند).

قضیه: اگر R یک رابطه در $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ باشد آنگاه $MIR = M_R \cdot M_R$

نکته: مکان $a(i, j)$ از ماتریس $M_R \cdot M_R$ دارای مقدار است اگر و تنها اگر n_{ij} باشد.

قضیه: فرض $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ باشد آنگاه $MIR = M_R \cdot M_R$

نکته: مکان $a(i, j)$ از ماتریس $M_R \cdot M_R$ دارای مقدار است اگر و تنها اگر n_{ij} باشد.

قضیه: فرض $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و B یک رابطه در A باشد آنگاه:

$$M_R = M_R \cdot M_R \cdot \dots \cdot M_R \quad (n)$$

رابطه‌ی دسترسی، اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابط در A باشد. R^* یک رابطه‌ی دسترسی‌پذیر است.

In ماتریس واحد $n \times n$ است و n تعداد عناصر مجموعه A است)

$$xR^*y \Leftrightarrow xR^\infty y \quad x^x = y$$

$$M_{R^*} = M_{R^\infty} \vee In$$

خواص روابط

روابط بازتابی، رابطه‌ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ باشد آنگاه aRa .

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in R(a)$$

- در ماتریس یک رابطه بازتابی همه عناصر آن قطر اصلی ماتریس یک می‌باشند.

- گراف سوردار یک رابطه بازتابی دارای حلقه برای تک تک رئوس است.

روابط ضد بازتابی، رابطه‌ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ آنگاه $a \not R a$.

- در ماتریس یک رابطه ضدبازتابی قطر اصلی آن همگی صفر می‌باشند.

- گراف سوردار یک رابطه ضد بازتابی فاقد حلقه می‌باشد.

روابط متقارن و ضدمتقارن، رابطه R در مجموعه A متقارن است اگر دو عنصر متمایز a و b موجود باشد بطوریکه aRb و bRa و

$a \neq b$ در غیراینصورت نامتقارن است.

$$a \in R(b) \Leftrightarrow b \in R(a)$$

نکته: نتیجه می‌گیریم که زمانی که رابطه نامتقارن است و اگر aRb و bRa آنگاه $a \pm b$.

- یک ماتریس زمانی متقارن است که $M_R = M_R^T$ ، (یعنی ماتریس با ترانپاده‌ی خود برابر باشد)

- یک ماتریس زمانی ضدمتقارن است که اگر $i \neq j$ بود یکی از عناصر M_{ij} یا M_{ji} باید مساوی صفر باشد.

- یک ماتریس می‌تواند نه متقارن باشد نه ضدمتقارن.

- در گرافهای سوردار یک رابطه اگر یالی از رأس i به j موجود باشد آنگاه یالی نیز از j به i موجود می‌باشد و هیچ شرطی برای

$i = j$ وجود ندارد.

- اگر شرط فوق در گراف وجود نداشت آن گراف مربوط به یک رابطه‌ی ضد متقارن است.

روابط متعددی، رابطه R در A متعدی است هرگاه برای $a, b, c \in A$ آنگاه:

$$\text{متعدی } aRb, bRa \Rightarrow aRc$$

$$\text{نامتعدی } aRb, bRa \not\Rightarrow aRc$$

نکته: یک رابطه متعدی را می‌توان از روی ماتریس رابطه‌ی آن $M_R = [M_{ij}]$ تشخیص داد اگر $M_{ik} = 1, M_{kj} = 1 \Rightarrow M_{ij} = 1$

همچنین با توجه به گراف سوردار داریم که اگر از a به c مسیری به طول 2 در R داشته باشیم آنگاه یک پال زیر از a به c داریم. به عبارتی:

$$aRb, bRc \equiv aR^2c$$

$$\rightarrow aR^2c \Rightarrow aRc \Rightarrow R^2 \subseteq R$$

قضیه: مفهوم هندسی متعدی بودن رابطه R در مجموعه A چنین است که اگر مسیری به طول بیشتر از یک از رأس a به رأس b باشد آنگاه پالی از a به b موجود باشد.

$$\forall n \geq 1, R^n \subseteq R \Leftrightarrow \text{متعدی بودن}$$

نکته: در ضمن متعدی بودن رابطه‌ی R را می‌توان به این صورت توضیح داد.

$$b \in R(a), c \in R(b) \Rightarrow c \equiv R(a)$$

روابط هم ارزی، رابطه‌ی R در A را هم ارزی می‌گوییم هرگاه بازتابی، متقارن و متعدی باشد.

- اگر p یک افراز از مجموعه A باشد بنابراین P را می‌توان برای تشکیل یک رابطه‌ی هم ارزی در A به کار برد.

- مجموعه‌های موجود در افراز P را بلوک‌های P گویند.

- اگر a و b و c در بلوک P از مجموعه A باشند و 3 خاصیت بازتابی و تقارن و تعدی را دارا باشند آنگاه R یک رابطه‌ی هم ارزی تعیین شده توسط افراز P می‌باشد.

- هر عضو از یک بلوک فقط و فقط با اعضای همان بلوک در رابطه است.

قضیه: فرض کنید R یک رابطه هم ارزی در A و $a \in A$ و $b \in B$ باشد در این صورت aRb اگر و تنها اگر $R(a) = R(b)$ باشد.

قضیه: اگر R یک رابطه هم ارزی در A و P مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های نسبی و مجزای $R(a)$ برای $a \in A$ باشد در این صورت P یک افراز برای A و R یک رابطه هم ارزی تعیین شده توسط P است.

تعریف: اگر P یک رابطه هم ارزی در A باشد آنگاه $R(a)$ ها را کلاسهای هم ارزی R می‌گوییم.

$$R(a) = [a] \quad (A, R \text{ شامل همه کلاسهای هم ارزی})$$

عملیات بر روابط

اگر S و R دو رابطه از A به B باشد این روابط مجموعه‌ای از زوجهای مرتب هستند که تمامی اعمال مانند اجتماع و اشتراک و تفاضل و ... اعمال کرد.

$$\bar{R} : \overline{aRb} \Leftrightarrow aRb$$

متمم

$$a(R \cup S)b \Leftrightarrow aRb \text{ or } aSb$$

اجتماع

$$a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb \text{ and } aSb$$

اشتراک

$$R^{-1} : aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a \text{ معکوس}$$

نکته: R^{-1} شامل همه زوجهای مرتب R است که به صورت معکوس نوشته شده‌اند.

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

نکته: در ماتریس معکوس جای سطر و ستون عوض می‌شود.

$$(M_R)^{-1} = (M_R)^T$$

تعریف: برای ماتریس بولی $M = [m_{ij}]$ متمم آن یعنی $\bar{M} = [\bar{m}_{ij}]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{M}_{ij} = \begin{cases} 0 & M_{ij} = 1 \\ 1 & M_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1} \quad (1)$$

$$R \subseteq S \Rightarrow \bar{R} \subseteq \bar{S} \quad (2)$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \quad (3)$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad (4)$$

$$\overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S} \quad (5)$$

$$\overline{(R \cap S)} = \bar{R} \cup \bar{S} \quad (6)$$

(7) اگر R بازتابی باشد آنگاه R^{-1} نیز بازتابی است.

(8) اگر R بازتابی باشد آنگاه $\bar{R}$ ضد بازتابی است.

(9) اگر R و S بازتابی باشند آنگاه $R \cup S$ و $R \cap S$ نیز بازتابی هستند.

نکته: رابطه R در A متقارن است.

$$M_R = (M_R)^T = (M_R)^{-1} = M_R \Rightarrow R = R^{-1} \Leftrightarrow$$

قضیه: اگر R متقارن باشد آنگاه $\bar{R}$ و R^{-1} نیز متقارن هستند.

همچنین اگر S و R متقارن باشند $R \cup S$ و $R \cap S$ نیز متقارن هستند.

$$(R \cap S)^2 \subseteq R^2 \cap S^2 \quad (1)$$

(2) اگر R و S متعدی باشند آنگاه $R \cap S$ متعدی است.

(3) اگر R و S رابطه هم ارزی باشد آنگاه $R \cap S$ نیز رابطه هم ارز است.

بستارها

اگر R یک رابطه در A باشد ممکن است بعضی از خصوصیات هم ارزی را نداشته باشد. می‌خواهیم با افزودن زوجهایی به آن رابطه‌ای بدست آوریم که ویژگی‌های موردنظر را داشته باشد.

بستار بازتابی، اگر R یک رابطه در A باشد که بازتابی نباشد بعضی از زوجهای رابطه Δ در R را اضافه می‌کنیم تا کوچکترین رابطه بازتابی شامل R تشکیل شود.

$$R_1 = R \cup \Delta$$

بستار متقارن: به طور فرض داریم رابطه R رابطه‌ای در A باشد که متقارن نباشد. اگر زوجی مثل $(x, y) \in R$ باشد ولی

$(y, x) \in R$ باشد، بدیهی است $(y, x) \in R^{-1}$.

بنابراین برای تبدیل به رابطه متقارن باید زوجهای رابطه R^{-1} را به آن اضافه کنیم.

$R \cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه‌ی متقارن است.

$$R \cup R^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1}$$

نکته: بستر متقارن R را می‌توان به روش هندسی رسم کرد به این صورت که همه یالها در گراف سوردار R به یالهای دو طرفه در

$R \cup R^{-1}$ تبدیل شود.

بستار متعدی و الگوریتم وارشال

قضیه: اگر R یک رابطه در A باشد آنگاه بستار متعدی R رابطه R^∞ است.

قضیه: اگر $|A| = n$ (تعداد اعضا) و R یک رابطه در A باشد. $R^\infty = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$.

الگوریتم وارشال، فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و R یک رابطه در A باشد. اگر $x_m, \dots, x_2, x_1$ را رأس داخلی خواهیم گفت.

الگوریتم وارشال در دو مرحله خلاصه می‌شود:

1- ابتدا همه مقادیر w_{k-1} به w_k منتقل می‌کنیم.

2- فرض کنید که در مکانهای $p_1 p_2, \dots$ در ستون k ام ماتریس w_{k-1} و همچنین در مکانهای $q_1, q_2, \dots$ در سطر k ام همان

ماتریس مقدار 1 داشته باشیم، در این صورت در مکانهای (p_i, q_j) در ماتریس w_k مقدار 1 قرار دهیم، این الگوریتم را با

$w_0 = M_R$ آغاز کرد و w_k های بعدی را تا رسیدن به $w_u = M_R$ و $(n = |A|)$ ادامه می‌دهیم.

کاربرد جالب بستار متعدی در روابط هم ارزی است. اگر R و S هر رابطه هم ارزی باشند در این صورت $R \cap S$ نیز یک رابطه هم

ارزی است. $R \cap S$ بزرگترین زیرمجموعه مشمول در R و S است.

قضیه: اگر R و S دو رابطه هم ارزی در مجموعه A باشند در نتیجه کوچکترین رابطه هم ارزی شامل R و S ، رابطه $(R \cup S)^\infty$ است.

ترکیب روابط، اگر A و B و C سه مجموعه و R رابطه‌ای از A به B و S رابطه‌ای از B به C باشد رابطه جدید از A به C را ترکیب

R, S می‌نامیم و به $S \circ R$ می‌خوانیم.

$$\left. \begin{matrix} a \in A \\ c \in C \end{matrix} \right\} a(S \circ R)c \Leftrightarrow b \in B, \left\{ \begin{matrix} aRb \\ bSc \end{matrix} \right. \Rightarrow a(S \circ R)c$$

$$a \xrightarrow{R} b \xrightarrow{S} c \Rightarrow S \circ R(A_1) = S(R(A_1)), A_1 \subseteq A$$

قضیه: اگر A و B و C و D چهار مجموعه و R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C و T یک رابطه از C به D باشد داریم:

$$TO(S \circ R) = (T \circ S) \circ R \quad \left\{ \begin{matrix} aRb \\ bSc \\ cTd \end{matrix} \right.$$

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

توابع

تعریف: اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع f از A به B به صورت $f: A \rightarrow B$ نمایش داده می‌شود.

اگر $a \in \text{DOM}(f)$ باشد $f(a)$ فقط شامل یک عضو از B است و اگر $a \in \text{DOM}(f)$ باشد $f(a) = \emptyset$ می‌باشد.

نکته: رابطه f به صورت زوجهای مرتب تعریف می‌شود: $\{(a, f(a)) \mid a \in \text{DOM}(f)\}$ $f(a) = b$

تابع نگاشت یا تبدیل: a برابر است با آرگومان تابع f و $b = f(a)$ برابر است با مقدار تابع برای آرگومان.

نکته: $f(a)$ را تصویر a تحت تبدیل f می‌گویند.

ترکیب مواع: اگر f و g دو تابع باشند به صورت $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ g: B \rightarrow C \end{cases}$ و چون f و g دو رابطه هستند پس ترکیب آنها $(g \circ f)$ نیز یک رابطه است.

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) \quad a \in \text{Dom}(g \circ f)$$

جواب منحصر به فرد $g \circ f(a) = c$

توابع ویژه (پوشا و یک به یک): اگر f تابعی از A به B باشد گوییم f همه جا تعریف شده است اگر $\text{DOM}(f) = A$ و f

پوشاست اگر $\text{Ran}(f) = B$

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \\ \text{or} \\ f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b \end{cases} \quad \text{و } f \text{ یک به یک است هرگاه}$$

همچنین $f: A \rightarrow B$ را وارون پذیر گویند هرگاه رابطه f^{-1} نیز یک تابع باشد.

نکته: یک تابع الزاماً وارون پذیر نیست.

چند قضیه: هرگاه $f: A \rightarrow b$ آنگاه:

$$(1) \quad f^{-1} \text{ یک تابع از } B \text{ به } A \text{ است} \Leftrightarrow f \text{ یک به یک است.}$$

$$(2) \quad \text{اگر } f^{-1} \text{ یک تابع باشد} \Leftarrow f^{-1} \text{ یک به یک است.}$$

$$(3) \quad f^{-1} \text{ همه جا تعریف شده باشد} \Leftrightarrow f \text{ پوشا است.}$$

$$(4) \quad f^{-1} \text{ پوشا است. همه جا تعریف شده باشد.}$$

$$(5) \quad I_B \circ f = f$$

$$(6) \quad f \circ I_A = f$$

$$(7) \quad f^{-1} \circ f = I_A \text{ اگر } f \text{ تناظر یک به یک باشد.}$$

$$(8) \quad f \circ f^{-1} = I_B \text{ اگر } f \text{ تناظر یک به یک باشد.}$$

(9) اگر $f: A \rightarrow B$ و توابعی باشند به گونه‌ای که $g \circ f = I_A$ و $f \circ g = I_B$ در این صورت f یک تناظر یک به یک بین A و B و

g یک تناظر یک به یک بین A و B بوده و هر دو وارون همدیگر می‌باشند.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

10- اگر A و B دو مجموعه متناهی با تعداد عناصر یکسان و $f: A \rightarrow B$ یک تابع همه جا تعریف شده باشد آنگاه:

الف) اگر f پوشا باشد $f \leftarrow$ یک به یک است.

ب) اگر f یک به یک باشد $f \leftarrow$ پوشاست.

اصل لانه کبوتر

$f: A \rightarrow B$ تابعی با دامنه و برد متناهی می‌باشد.

f یک به یک باشد آنگاه $m = n$ تعداد عناصر (کبوتران) $|\text{DOM}(f)| = n$

f یک به یک نباشد آنگاه $m < n$ تعداد عناصر (لانه‌ها) $|\text{Ran}(f)| = m$

تعریف: اگر n کبوتر به m لانه منسوب شود و $m < n$; آنگاه دست کم یک لانه شامل دو کبوتر یا بیشتر است.

تعمیم اصل لانه کبوتر: اگر m لانه موجود باشد ولی تعداد کبوترها بیشتر از $n = 2m$ باشد، بدیهی است که سه کبوتر و یا بیشتر باید به یکی از لانه‌ها منسوب شوند.

نکته: به عبارتی اگر n کبوتر m لانه منسوب شود یکی از لانه‌ها دست کم $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ (کران بالای تقسیم) و یا $\left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + 1$ کبوتر باشد.

رابطه دوتایی

هر مجموعه‌ای از زوجهای مرتب یک رابطه دوتایی (Binary Relation) را معرفی می‌نماید.

به عنوان مثال $F = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ پدر } y \text{ است} \}$ یک رابطه دوتایی است.

اگر X و Y دو مجموعه دلخواه باشند، $X \times Y$ مجموعه‌ای از زوجهای مرتب می‌باشد که هر زیرمجموعه‌ای مانند S از آن یک «رابطه دوتایی از X به Y » تعریف می‌شود و اگر $X = Y$ در آن صورت S یک «رابطه دوتایی روی X » و یا یک «رابطه دوتایی در X » تعریف می‌شود. اگر X مجموعه‌ای n عضوی و Y مجموعه‌ای m عضوی باشند، تعداد رابطه‌های دوتایی ممکن از X به Y ، $2^{n \times m}$ می‌باشد.

نکته: $\langle x, y \rangle \in S$ گاهی به صورت xSy و $\langle x, y \rangle \notin S$ نیز به صورت $x \not\sim y$ نمایش داده می‌شود.

دامنه رابطه

اگر S یک رابطه از X به Y باشد، مجموعه همه x ها که به ازای هر کدام حداقل یک y وجود داشته باشد که $\langle x, y \rangle \in S$ باشد، «دامنه S » نامیده می‌شود. عبارت دیگر به مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوجهای مرتب یک رابطه، دامنه آن رابطه گفته می‌شود.

$$D(S) = \{x \mid \exists y, \langle x, y \rangle \in S\}; S \subseteq X \times Y; D(S) \subseteq X$$

برد رابطه

اگر S یک رابطه از X به Y باشد، مجموعه همه y ها که به ازای هر کدام حداقل یک x وجود داشته باشد که $\langle x, y \rangle \in S$ باشد «برد یا تصویر S » نامیده می‌شود، عبارت دیگر مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتب یک رابطه «برد آن رابطه» نامیده می‌شود.

$$R(S) = \{y \mid \exists x, \langle x, y \rangle \in S\}; S \subseteq X \times Y; R(S) \subseteq Y$$

ترکیب روابط

قوانین زیر در مورد ترکیب رابطه‌ها وجود دارند:

$$x(R \cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$$

$$x(R \cup S)y \Leftrightarrow xRy \vee xSy$$

$$x(R - S)y \Leftrightarrow xRy \wedge x \notin S$$

$$x(\sim R)y \Leftrightarrow x \notin Ry$$

خواص روابط

رابطهٔ پوچ (Void): تهی یک زیرمجموعه از مجموعه $X \times X$ می‌باشد و در نتیجه یک رابطه در X است. این رابطه (رابطه پوچ) نامیده می‌شود.

رابطهٔ جهانی: مجموعه $X \times X$ که خود از زیرمجموعهٔ خودش می‌باشد یک رابطه در X است که «رابطه جهانی» نامیده می‌شود.

رابطه انعکاسی (بازتابی): رابطهٔ دوتایی R در مجموعه X یک رابطه انعکاسی است اگر برای هر $x \in X$ بتوان نوشت:

$$xRx \text{ یا } \langle x, x \rangle \in R$$

$$\text{و یا } \forall x \in X \Rightarrow xRx$$

رابطهٔ متقارن: رابطه دوتایی R در مجموعه X یک رابطهٔ متقارن است هرگاه برای هر x و y در X ، اگر xRy آنگاه yRx یا به عبارت دیگر:

$$\forall x, y \in X ; xRy \Rightarrow yRx$$

رابطه انتقالی (متعدی): رابطهٔ دوتایی R در مجموعه X انتقالی است اگر برای هر x و y و z در مجموعه X اگر xRy و yRz آنگاه xRz یا به عبارت دیگر:

$$\forall x, y, z \in X ; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

رابطهٔ غیرانعکاسی: رابطه دوتایی R در مجموعه X غیرانعکاسی است اگر برای هر x در مجموعه X ، $\langle x, x \rangle \notin R$.

نکته: اگر رابطه‌ای هم غیرانعکاسی و هم متقارن باشد هرگز انتقالی نیست.

نکته: اگر رابطه‌ای انعکاسی نباشد لزومی ندارد غیرانعکاسی باشد.

رابطه نامتقارن (پاد تقارنی - ضد تقارنی): رابطهٔ دوتایی R در مجموعه X نامتقارن است اگر برای هر x و y در مجموعه X ، اگر xRy و yRx آنگاه $x = y$ یا به عبارت دیگر:

$$\forall x, y \in X ; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

نکته: رابطه‌ای که در آن عضوی از مجموعه‌ای مانند X با خودش در رابطه باشد و با هیچ عضو دیگری در رابطه نباشد هم متقارن و هم نامتقارن می‌باشد.

رابطهٔ پاره ترتیبی (ترتیب جزئی): اگر R که رابطه‌ای روی مجموعه‌ای مانند X است، خواص انعکاسی، ضد تقارنی و انتقالی داشته باشد، یک رابطهٔ ترتیب جزئی نامیده می‌شود.

رابطه ترتیب کامل: اگر R که رابطه‌ای روی مجموعه‌ای مانند X است، علاوه بر سه خاصیت ترتیب جزئی دارای این خاصیت باشد که باری هر دو مجموعه X حداقل یکی از دو عبارت xRy و yRx درست باشد. در این صورت گفته می‌شود، R یک رابطه ترتیب کامل است. بعنوان مثال مجموعه همه زیرمجموعه‌های مجموعه A که در زیر مشخص شده است با رابطه‌ای مانند $\subseteq$ یک ترتیب جزئی است و ترتیب کامل نیست ولی مجموعه زیر مجموعه‌های مجموعه B علاوه بر ترتیب جزئی دارای ترتیب کامل می‌باشد.

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{b\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{b\}\}$$

$$\emptyset \subseteq \{b\} \quad \text{ترتیب کامل است} \quad \text{ترتیب جزئی} \quad \emptyset \subseteq P(A)$$

$$\{a\} \not\subseteq \{b\}, \{b\} \not\subseteq \{a\} \quad \text{ترتیب کامل نیست}$$

زنجیر: اگر رابطه R بصورت رابطه $\leq$ (کوچتر یا مساوی) فرض شود که بر روی مجموعه P تعریف شده است، از آنجا که $\leq$ یک ترتیب جزئی است مجموعه P به همراه رابطه $\leq$ که بصورت $\langle P, \leq \rangle$ نمایش داده می‌شود یک «مجموعه با ترتیب جزئی» گفته می‌شود و در صورتی که برای هر $x, y \in P$ داشته باشیم $x \leq y$ و $y \leq x$ در این حالت $\leq$ یک ترتیب کامل و $\langle P, \leq \rangle$ یک مجموعه با ترتیب کامل و یا یک «زنجیر» نامیده می‌شود (رابطه $\leq$ حالت خاص رابطه p است که به مفهوم «قبل از» می‌باشد).
نکته: اگر R یک ترتیب جزئی روی P باشد، $R \sim$ نیز یک ترتیب جزئی روی P خواهد بود و در این صورت $\langle P, p \rangle$ و $\langle P, f \rangle$ همزاد یکدیگر می‌باشند.

رابطه هم ارزی

اگر R که رابطه‌ای روی مجموعه‌ای مانند X است، دارای خواص انعکاسی، متقارن و انتقالی باشد، یک «رابطه هم‌ارزی» نامیده می‌شود.

کلاسهای هم ارزی: اگر R رابطه هم ارزی روی مجموعه X باشد در این صورت مجموعه $[x]_R$ «کلاس هم ارزی تولید شده توسط x تحت رابطه R » گفته می‌شود بطوری که:

$$[x]_R = \{y \mid y \in X, xRy\}$$

این کلاسهای هم ارزی دارای خواص زیر می‌باشند:

- (1) هیچکدام تهی نیستند.
 - (2) از هم مجزا هستند (اشتراکشان تهی است).
 - (3) اجتماعشان مجموعه X را که رابطه هم ارزی روی آن تعریف شده، تولید می‌نماید.
- با توجه به 3 خاصیت فوق مجموعه همه $[x]_R$ ها یک «پارتیشن» برای مجموعه X با رابطه R نامیده شده و با X/R نشان داده می‌شود.

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$$

ماتریس روابط

رابطه R از X به Y مفروض است. اگر مجموعه X دارای n عضو و مجموعه Y دارای m عضو باشند و:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}$$

آنگاه ماتریس $n \times m$ نمایش دهنده رابطه R از X به Y ، با قانون زیر تعریف می‌شود:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & x_i R y_j \\ 0 & x_i \not R y_j \end{cases}$$

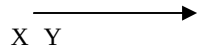
نکته: اگر R یک رابطه روی مجموعه X باشد:

1- اگر قطر اصلی ماتریس همه یک 1 باشند رابطه «انعکاسی» است و اگر همه صفر باشند رابطه «غیرانعکاسی» است و اگر بعضی صفر و بعضی یک باشند رابطه نه غیرانعکاسی و نه انعکاسی است.

2- اگر ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن باشد، رابطه متقارن است و اگر ماتریس نسبت به قطر اصلی نامتقارن باشد، رابطه نامتقارن یا ضدتقارنی است.

گراف رابط

اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد، برای ایجاد گراف روابط می‌توان به ازای هر یک از اعضای X و یا Y یک گره (node) در نظر گرفت و وجود رابطه را با خطوط جهت‌دار نمایش داد.



گراف مربوط به عبارت xRy

نکته: اگر R یک رابطه روی مجموعه X باشد:

1- اگر در هر گره یک حلقه موجود باشد رابطه «انعکاسی» است و اگر هیچ حلقه‌ای در گره‌ها نباشد، رابطه «غیرانعکاسی» است و اگر بعضی از گره‌ها دارای حلقه باشند، رابطه نه انعکاسی است و نه غیرانعکاسی.

2- اگر خطوط جهت‌دار بصورت رفت و برگشت باشند رابطه متقارن است و اگر خطوط رفت و برگشت بین هیچ دو گره‌ای وجود نداشته باشد، رابطه نامتقارن است.

تابع

اگر f رابطه‌ای از X به Y باشد، بطوری که هر عضو مجموعه X حداکثر با یک عضو از مجموعه Y در رابطه باشد، در این صورت f یک «تابع» نامیده می‌شود.

$$\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \Rightarrow y = z$$

برای نمایش تابع از عبارت زیر استفاده می‌شود.

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{یا}$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

و به جای عبارت $\langle x, y \rangle \in f$ از عبارت $y = f(x)$ استفاده می‌گردد.

دامنه و برد تابع: در تابع $f: X \rightarrow Y$ ، مجموعه X ، همان دامنه تابع است و برد تابع مجموعه مقادیری از Y می باشد که برای هر یک حداقل یک x وجود داشته باشد که $y = f(x)$.

$$D_f = XR_f = \{y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$$

هم دامنه: اگر تابع، تابعی از X به Y باشد، مجموعه Y «هم دامنه» تابع f نامیده می شود و $R_f \subseteq Y$ (برد تابع)

نکته: تعداد رابطه دوتایی ممکن بین دو مجموعه n عضوی X و m عضوی Y برابر $2^{n \times m}$ و تعداد تابع های ممکن از X به Y برابر m^n می باشد، مجموعه توابع قابل تعریف از X به Y با Y^X نمایش داده می شود.

تابع یک به یک (انژکتیو): تابع $f: X \rightarrow Y$ یک تابع یک به یک گفته می شود هرگاه اعضای متمایز مجموعه X ، به اعضای متمایز مجموعه Y متناظر شوند.

$$\forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{و یا: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع پوشا (سورژکتیو): تابع $f: X \rightarrow Y$ یک تابع پوشا نامیده می شود هرگاه $R_f = Y$ و یا:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X; f(x) = y$$

تابع پوشا و یک به یک (بیژکتیو): تابعی که هم یک به یک و هم پوشا باشد.

تحدید و توسیع تابع

تابع f از X به Y مفروض است و $A \subseteq X$ ، در این صورت تابع $f|_A (A \times Y)$ که تابعی از A به Y می باشد، «تحدید تابع f نسبت به A » گفته شده و بصورت $f|_A$ نمایش داده می شود. اگر با g نمایش داده شود، g «تحدید» f و f «توسیع» و یا گسترش یافته g نامیده می شود.

$$\text{در این حالت: } \forall a \in A, g(a) = f(a); D_g = A; D_f = X; D_g \subseteq D_f$$

ترکیب توابع

اگر تابع f یک تابع از X به Y و تابع g تابعی از Y به Z باشد آنگاه gof در صورت وجود تابعی از X به Z خواهد بود و ترکیب g و f نامیده می شود.

$$\text{gof} = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists y \in Y; f(x) = y, g(y) = z) \}$$

$$\text{در این حالت روابط زیر برقرارند: } D_f = X \quad R_f \subseteq D_g \quad D_{\text{gof}} = X$$

دو شرط وجود ترکیب gof بصورت زیر بیان می شوند:

$$1- D_{\text{gof}} = X$$

$$2- \langle x, z_1 \rangle \in \text{gof}, \langle x, z_2 \rangle \in \text{gof} \Rightarrow z_1 = z_2$$

دو خاصیت مهم ترکیب دو تابع عبارتند از:

1- در ترکیب توابع خاصیت جابجایی وجود ندارد یعنی نمی‌توان همواره گفت: $\text{gof} = \text{fog}$

$$2 - \text{ho}(\text{gof}) = (\text{hog})\text{of}$$

وارون تابع و تابع وارون

وارون یک رابطه (یا تابع) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$$

رابطه‌ای از X به Y

اگر f تابعی از X به Y باشد آنگاه $D_f = R_f$ ولی ممکن است تابعی از Y به X نباشد. اگر $f : X \rightarrow Y$ یک تابع یک به یک

باشد آنگاه f^{-1} یک تابع خواهد بود ولی این شرط ضمانت نمی‌کند که f^{-1} تابعی از Y به X باشد ولی اگر $f : X \rightarrow Y$ یک به یک

و پوشا (بی‌ژکتیو) باشد، آنگاه f^{-1} تابعی از Y به X می‌باشد. در این حالت f^{-1} با f^{-1} نمایش داده می‌شود و به آن «تابع وارون f »

گفته می‌شود. اگر تابع وارون f وجود داشته باشد، f تابع «وارون پذیر» نامیده می‌شود و f^{-1} نیز یک به یک و پوشا خواهد بود.

برای تابع وارون می‌توان رابطه زیر را بیان کرد:

$$(\text{gof})^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

تابع همانی: تابع همانی یا نگاشت همانی، تابعی است در یک مجموعه مانند X ، متشکل از زوجهای مرتبی که مولفه‌های اول و

دوم آن یکسان باشند، تابع همانی بصورت $I_X : X \rightarrow X$ نمایش داده می‌شود.

نکته: برای دو تابع مفروض $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow X$ ؛ تابع g برابر f^{-1} خواهد بود اگر و تنها اگر: $\text{fog} = I_Y$ و $\text{gof} = I_X$ و

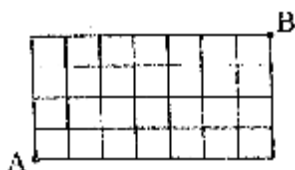
نیز:

$$\text{fo}I_X = f$$

و اگر f تابعی از X به X باشد: $\text{fo}I_X = I_X \circ f = f$

تست

۱- تعداد مسیرهای متفاوت از A به B با طول حداقل چقدر است؟



(1) 28

(2) $\binom{7}{4}$

(3) $\frac{11!}{4!4!3!}$

(4) $\frac{11!}{4!7!}$

۲- انواع ترتیب‌های مختلفی که با حروف موجود در TALLAHASEE می‌توان نوشت برابر $\frac{10!}{3!2!2!1!1!1!}$ یعنی ۱۵۱۲۰۰

است. چند مورد از این ترتیب‌ها، Aهای کنار هم ندارند؟

(4) 211680

(3) 70560

(2) 141120

(1) 35280

۳- فرض کنید می‌خواهیم در فضای xyz از نقطه (0,0,0) به نقطه (3,4,5) برسیم، مشروط بر این که در هر مرحله یک واحد در جهت مثبت یکی از محورها حرکت کنیم، تعداد راه‌های متمایز برابر است با:

(4) $\frac{11!}{3!4!5!}$

(3) $\frac{12!}{3!4!5!}$

(2) $\frac{12!}{2!3!4!}$

(1) $\frac{11!}{2!3!4!}$

۴- به چند طریق ۶ پسر و ۶ دختر می‌توانند و در یک میز دایره شکل با ۱۲ صندلی بنشینند، به طوری که یک در میان پسر و دختر نشسته باشند؟ (فرض بر این است که صندلی‌ها یکسانند و فقط موقعیت افراد نسبت به هم اهمیت دارد؟)

(4) $\frac{12!}{6!}$

(3) $\frac{12!}{(6!)^2}$

(2) 6!5!

(1) $(6!)^2$

۵- تعداد اعدادی از مجموعه $\{1,2,3,\dots,100000\}$ را به دست آورید که مجموع ارقام آنها برابر ۷ باشد.

(4) 300

(3) 400

(2) 330

(1) 462

۶- تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی ۲۰۰۰ که بر ۹ یا بر ۱۱ بخش پذیرند، برابر است با

(4) 400

(3) 380

(2) 403

(1) 383

۷- فرض کنید ۱۰ نفر در مسابقه دو شرکت می‌کنند و به ۳ نفر جایزه داده می‌شود. به چند طریق می‌توان جوایز را اعطا کرد؟

(4) 720

(3) 360

(2) 240

(1) 120

۸- فرض کنید ۱۰ نفر در مسابقه دو شرکت می‌کنند و به ۳ نفر جایزه داده می‌شود. دو شرکت کننده در این مسابقه را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان جوایز را اعطا کرد، مشروط بر این که این دو دهنده جزو سه نفر نخست باشند؟

(4) 30

(3) 24

(2) 48

(1) 60

۹- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مفروض است.

(a) به چند طریق مختلف می توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب نمود؛ به طوری که مجموع آنها عددی زوج باشد؟

(b) به چند طریق مختلف می توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب نمود؛ به طوری که مجموع آنها عددی فرد باشد؟

(1) 2500 (a ، 2500 (b (2) 2450 (a ، 2500 (b (3) 2450 (a ، 2450 (b (4) 2500 (a ، 2450 (b

۱۰- در ۱۰ مسابقه فوتبال تعداد حالاتی که ۶ برد، ۲ تساوی و ۲ باخت اتفاق بیافتد برابر است با:

(1) 630 (2) 2520 (3) 100 (4) 1260

۱۱- بین ۱۰ تیم می خواهیم مسابقه ای ترتیب دهیم به طوری که هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی کنند. اگر در هر

روز هر تیم حداکثر یک بار بازی کند حداقل چند روز برای برگزاری تمام بازی ها لازم است؟

(1) 8 (2) 9 (3) 10 (4) 11

۱۲- به چند طریق می توان ۱۲ کتاب را در یک قفسه چید به طوری که ۵ جلد کتاب مشخص هیچ کدام مجاور یکدیگر

قرار نگیرند؟

(1) 42 (2) 21 (3) 35 (4) 56

۱۳- چند عدد صحیح و مثبت کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ وجود دارد که نه توان دوم کامل، نه توان سوم کامل و نه توان

چهارم کامل باشد؟

(1) 954 (2) 959 (3) 960 (4) 962

۱۴- چند عدد چهار رقمی می توان به وسیله ارقام ۰ تا ۹ ایجاد نمود، به شرط این که آخرین رقم (کوچکترین رقم)

صفر باشد و تکرار رقم مجاز نباشد؟

(1) 560 (2) 1008 (3) 504 (4) 729

۱۵- چهار کتاب مختلف ریاضیات، شش کتاب مختلف فیزیک و دو کتاب مختلف شیمی قرار است که در کتابخانه ای

گذاشته شوند، اگر کتاب های ریاضی باید در کنار یکدیگر گذاشته شوند، چند راه مختلف برای چیدن کتاب ها وجود

دارد؟

(1) $9! \times 4!$ (2) $4! \times 6! \times 2! \times 3!$ (3) $\frac{(9!)^2}{4! \times 3!}$ (4) $9! \times 4! \times 2! \times 6!$

۱۶- تعداد اعداد طبیعی n که $n \leq 1000$ و n بر ۷ یا بر ۱۱ بخش پذیر است برابر است با:

(1) 200 (2) 205 (3) 220 (4) 210

۱۷- در کدام یک از n ضلعی های منتظم، تعداد قطرها ۳ برابر تعداد اضلاع است؟

(1) شش ضلعی (2) هفت ضلعی (3) هشت ضلعی (4) نه ضلعی

۱۸- ضریب x^n در معادله $(1+x)^{2n}$ برابر است با:

$$(1) \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \quad (2) 2 \binom{2n-1}{n-1} \quad (3) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \quad (4) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} \binom{n}{n-k}$$

۱۹- ضریب x^{18} در بسط $(x^2 + x^3 + x^4)^7$ برابر است با:

$$(1) 224 \quad (2) 200 \quad (3) 161 \quad (4) 105$$

۲۰- در مجموعه الفبای انگلیسی (۲۶ حرف) تعداد کلمات ۶ حرفی که ۴ حرف آنها بی صدا و ۲ حرف صدادار است

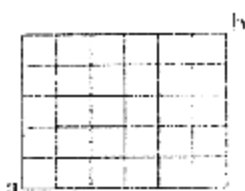
(تعداد حروف صدادار ۵ تا می باشد) برابر است با: (حروف نمی توانند تکراری باشند).

$$(1) 2^4 \times 5^2 \times 6! \quad (2) 6! \binom{21}{4} \binom{5}{2} \quad (3) \frac{6!}{4!2!} \binom{21}{4} \binom{5}{2} \quad (4) \frac{6!}{4!2!} \binom{21}{2} \binom{5}{4}$$

۲۱- چند زیرمجموعه از اعداد $\{1, 2, \dots, 20\}$ شامل حداقل یک عدد فرد است؟

$$(1) 2^{19} \quad (2) \binom{20}{10} \quad (3) \binom{10}{2} 2^{10} \quad (4) 2^{10} (2^{10} - 1)$$

۲۲- از چند مسیر ممکن می توان کوتاهترین مسیر بین a و b را طی کرد؟



$$(1) 6! \quad (2) 11!$$

$$(3) 6!5! \quad (4) \binom{11}{5}$$

۲۳- به چند طریق می توان جفت های (A, B) از زیرمجموعه های $\{1, 2, \dots, n\}$ را انتخاب

نمود به طوری که $A \subseteq B$ ؟

$$(1) 3^n \quad (2) 3(2^n - 1) \quad (3) 4^n - 3^n + 2^n \quad (4) 5^n - 4^n + 3^n - 2^n + 1$$

۲۴- اعضای یک خانواده ۶ نفره، متشکل از پدر و مادر، دو پسر و دو دختر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد

بنشینند به طوری که دو پسر در دو طرف مادرشان قرا بگیرند؟

$$(1) 4 \quad (2) 12 \quad (3) 48 \quad (4) 125$$

۲۵- در صفحه XY برای رفتن از نقطه $(1, 2)$ به نقطه $(10, 15)$ چند مسیر وجود دارد به شرطی که در هر قدم مسیر یا

فقط بتوان یک واحد به طول نقطه اضافه شود (یک قدم به سمت راست) یا یک واحد به عرض نقطه اضافه شود (یک

قدم به سمت بالا)؟

$$(1) \frac{(11+17)!}{11!17!} \quad (2) \frac{(9+13)!}{13!9!} \quad (3) \frac{(10+2)!}{10!2!} \quad (4) \frac{(15+1)!}{15!1!}$$

۲۶- تعداد جواب های طبیعی نامعادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 < 15$ کدام است؟

$$(1) \binom{14}{7} \quad (2) \binom{20}{5} \quad (3) \binom{14}{6} \quad (4) \binom{20}{6}$$



۲۷- به ازای عدد صحیح و مثبت n ، تعداد چهار تایی‌های (a, b, c, d) از اعداد صحیح را بیابید به طوری که $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$.

$$\binom{n}{4} (1) \quad 4 \binom{n}{4} (2) \quad \binom{n+4}{4} (3) \quad 2 \binom{n+1}{4} (4)$$

۲۸- مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ داده شده است. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های $A_1, \dots, A_5$ را انتخاب کرد به طوری که $\bigcup_{i=1}^5 A_i = A$ باشد (لزوماً متمایز نیستند).

$$8^5 (1) \quad 5^8 (2) \quad 8^{32} (3) \quad 31^8 (4)$$

۲۹- ضریب a^3bc در عبارت $(2a + b + 5c)^5$ برابر است با:

$$40 (1) \quad 80 (2) \quad 400 (3) \quad 800 (4)$$

۳۰- به چند طریق می‌توان سه تایی مرتب (a_1, a_2, a_3) را انتخاب کرد به طوری که اعداد a_1, a_2, a_3 صحیح باشند و $1 < a_1 < a_2 < a_3 < 8$

$$20 (1) \quad 35 (2) \quad 56 (3) \quad 120 (4)$$

۳۱- فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. مقدار عبارت $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \binom{n}{i}$ برابر است با:

$$2^{n+1} - 1 (1) \quad 3^n (2) \quad 2^{n+1} + 1 (3) \quad 4^n - 3^n + 2 (4)$$

۳۲- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 37\}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟

- (1) دقیقاً 18 عضو مجموعه A ، مضرب 3 یا مضرب 5 هستند.
- (2) دقیقاً 23 عضو مجموعه A ، مضرب 2 یا مضرب 7 هستند.
- (3) اگر یک زیرمجموعه 17 عضوی از A انتخاب شود، حداقل یکی از عضوهای این زیرمجموعه مضرب 2 یا مضرب 7 خواهد بود.
- (4) اگر یک زیرمجموعه 20 عضوی از A انتخاب شود، حداقل یکی از عضوهای این زیرمجموعه مضرب 3 یا مضرب 5 خواهد بود.

۳۳- در یک صفحه شطرنج 20×20 چند مربع دیده می‌شود؟

$$2240 (1) \quad 2870 (2) \quad 2980 (3) \quad 2360 (4)$$

۳۴- چند رشته ۸ بیتی با ۱۰۰ شروع می‌شوند یا بیت چهارم ۱ دارند؟

$$2^5 + 2^7 (1) \quad 2^5 + 2^4 - 2^7 (2) \quad 2^5 + 2^7 - 2^4 (3) \quad 2^5 + 2^4 (4)$$

۳۵- چند زیرمجموعه اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ و دارای این خاصیت است که جمع کوچکترین و بزرگترین عضو آن برابر ۱۳ است؟

$$\frac{1}{3}(4^6 - 1) (1) \quad \frac{3}{2}(4^6 - 1) (2) \quad 3(4^4 - 1) (3) \quad 5(4^4 - 1) (4)$$

۳۶- چند عدد ۴ رقمی وجود دارد به طوری که مجموع ارقام آن برابر ۹ شود؟

$$(1) \binom{12}{3} \quad (2) \binom{11}{3} \quad (3) \binom{13}{4} \quad (4) \binom{12}{4}$$

۳۷- تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ که حاصلضرب عضوهای آن زیرمجموعه، مضرب چهار نیست،

چند تا است؟

$$(1) 96 \quad (2) 95 \quad (3) 319 \quad (4) 320$$

۳۸- تعداد ماتریس‌های 5×6 با درایه‌های صفر و یک که هر سطر آن شامل تعداد زوج درایه یک است، چقدر است؟

$$(1) 2^{29} \quad (2) 2^{28} \quad (3) 2^{25} \quad (4) 2^{24}$$

۳۹- فرض کنید $f(n, k) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$ باشد. کدام گزاره نادرست است؟

$$(1) f(4, 4) = 24 \quad (2) f(3, 3) = 6 \quad (3) f(4, 5) = 0 \quad (4) f(5, 4) = 0$$

۴۰- به چند طریق می‌توان ۲۱ مهره غیرهمانند را در سه جعبه غیرهمانند توزیع کرد به طوری که در جعبه اول تعداد

زوجی از مهره‌ها و در جعبه دوم تعداد فردی از مهره‌ها قرار گیرند؟

$$(1) \frac{1}{4}(3^{21}+1) \quad (2) \frac{1}{2}(3^{21}+1) \quad (3) \frac{1}{4}(3^{21}-1) \quad (4) \frac{1}{2}(3^{21}-1)$$

۴۱- اگر هفت رنگ برای رنگ کردن ۵۰ دوچرخه به کار رود، در این صورت حداقل چند تا از آنها هم رنگ خواهد بود؟

$$(1) 8 \quad (2) 6 \quad (3) 9 \quad (4) 5$$

۴۲- اگر ۸ عدد صحیح مثبت انتخاب کنیم حداقل باقیمانده چند عدد از آنها بر عدد هفت با یکدیگر مساوی خواهد

بود؟

$$(1) 1 \quad (2) 3 \quad (3) 4 \quad (4) 2$$

۴۳- حداقل چند عدد از هر M عدد صحیح متوالی بر M بخش پذیر است؟

$$(1) 2 \quad (2) 1 \quad (3) 4 \quad (4) 0$$

۴۴- اگر شخصی n نقطه به دلخواه از یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ انتخاب کند، آنگاه n حداقل باید چه مقدار

باشد تا مطمئن باشیم دو نقطه وجود دارند که فاصله آنها کوچکتر یا مساوی یک است؟

$$(1) 4 \quad (2) 5 \quad (3) 6 \quad (4) 7$$

۴۵- حداقل چند عدد باید از تصاعد حسابی $1, 4, 7, \dots, 100$ انتخاب شود به طوری که مطمئن باشیم دو عدد متمایز با

مجموع ۱۰۴ در بین اعداد انتخابی وجود دارد؟

$$(1) 18 \quad (2) 19 \quad (3) 20 \quad (4) 21$$

۴۶- عبارت $a - b^*c + d - e/g/h$ با فرض اعمال اولویت عملگرها را به چند طریق می توان به درستی «پرانتز گذاری» کرد به طوری که مقدار عبارت حاصل به ازای همه مقادیر a تا h با مقدار اصلی برابر شود؟ فرض بر آن است که دور یکم متغیر تنها در عبارت پرانتز گذاشته نمی شود. یک عبارت پرانتز گذاری شده باید صفر یا تعداد زوجی پرانتز داشته باشد. مثلاً $((a+b)+c)$ و $a+(b+c)$ و $a+b+c$ سه عبارت پرانتز گذاری شده درست برای $a+b+c$ است ولی $(a)+b+c$ درست نیست.

1 (1) 32 (2) 64 (3) 128 (4)

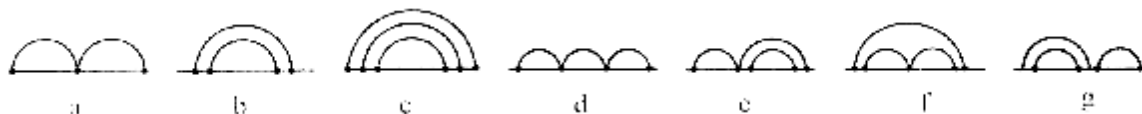
۴۷- ۱۰ کارت و جعبه با شماره ۵ تا ۹ موجود است. به چند طریق می توان کارت ها را در جعبه ها قرار داد به طوری که در هر جعبه دقیقاً یک کارت و هیچ کارت با شماره زوج در جعبه با شماره یکسان با خودش قرار نگیرد؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{10}{i} (5-i)! \\ (2) \quad & 5! \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{5}{i} (5-i)! \\ (3) \quad & \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} (10-i)! \\ (4) \quad & \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{5}{i} (10-i)! \end{aligned}$$

۴۸- می خواهیم جدولی 5×5 از حروف انگلیسی به جز حرف A به صورت زیر ایجاد کنیم. ابتدا یک کلمه معنادار یا بی معنا را که حروف تکراری آن وجود ندارد از چپ به راست با شروع از ردیف اول این جدول می نویسیم (در صورتی که کلمه طولانی باشد ممکن است در چند ردیف جدول نوشته شود). سپس، حروف باقیمانده را به ترتیب الفبای انگلیسی در خانه های جدول قرار می دهیم. تعداد جدول های ممکن را بیابید.

$$\begin{aligned} (1) \quad & 25! \\ (2) \quad & \sum_{i=1}^{25} \binom{25}{i} \\ (3) \quad & 24 \times 25! \\ (4) \quad & \sum_{i=1}^{26} \binom{26}{i} \end{aligned}$$

۴۹- فرض کنید n نیم دایره را بر روی یک خط افقی رسم کنیم به طوری که هیچ دو نیم دایره ای متقاطع نباشند. در شکل های (a) و (b) زیر دو روش ممکن برای انجام این کار به ازای $n=2$ رسم شده است. نتایج برای $n=3$ در شکل های (c) تا (g) رسم شده است.



تعداد روش های ممکن برای انجام این کار را به ازای $n=5$ بیابید.

1 (1) 110 (2) 64 (3) 56 (4) 42

۵۰- حداقل چند نقطه با مختصات صحیح در فضای ۳ بعدی انتخاب کنیم، تا مطمئن شویم که مختصات وسط دو نقطه از آنها نیز عدد صحیح است؟

1 (1) 4 (2) 5 (3) 8 (4) 9

۵۱- از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 29\}$ به چند طریق می توان ۳ عدد انتخاب نمود که مجموعشان بر ۳ تقسیم پذیر باشد؟

1 (1) 1221 (2) 1222 (3) 1223 (4) 1224

پاسخنامه تست‌ها

1- گزینه (4) صحیح است.

$$\frac{(4+7)!}{4!7!}$$

2- گزینه (3) صحیح است.

$$\frac{7!}{2!2!}$$

ابتدا A ها را در نظر نمی‌گیریم، تعداد جایگشت‌های سایر حروف برابر است با:

 بین این حروف 8 فضا وجود دارد که 3 عدد A باید در این فضاها قرار گیرند که تعداد حالات برابر است با $\binom{8}{3}$ ، با ضرب این دو،

گزینه «3» حاصل می‌شود.

3- گزینه (3) صحیح است.

$$\frac{(3+4+5)!}{3!4!5!}$$

4- گزینه (2) صحیح است.

 در جایگشت دایره‌ای، یک شیء را ثابت فرض کنید. اگر یک پسر ثابت فرض شود آنگاه دخترها به 6! طریق و پسرها به 5! طریق پس: $(5/6)!$

5- گزینه (2) صحیح است.

 اگر ارقام را a و b و c و d و e بگیریم (abcde) کفایت جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $a + b + c + d + e = 7$ را حساب کنیم:

$$\binom{7+5-1}{5-1} = 330$$

6- گزینه (1) صحیح است.

$$n(A) = \left\lceil \frac{2000}{9} \right\rceil = 2229 \text{ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر } 9$$

$$n(B) = \left\lceil \frac{2000}{11} \right\rceil = 1811 \text{ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر } 11$$

$$n(A \cap B) = \left\lceil \frac{2000}{99} \right\rceil = 2099 \text{ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر } 99$$

بنابراین تعداد اعدادی که بر 9 یا بر 11 بخش‌پذیرند برابر است با:

$$n(A \cup B) = 222 + 181 - 20 = 383$$

7- گزینه (4) صحیح است.

 اگر جوایز یکسان باشند: $\binom{10}{3} = 120$ و اگر جوایز متفاوت باشند: $(10)_3 = 720$ ، که البته متفاوت بودن جوایز منطقی است.

8- گزینه (2) صحیح است.

دو دوندۀ را انتخاب کرده، 8 نفر باقی می‌مانند. پس به 8 طریق می‌توان نفر سوم را انتخاب کرد. حال این 3 نفر به 3! طریق

می‌توانند نفرات اول تا سوم شوند: $8 \times 3! = 48$

9- گزینه (4) صحیح است.

حاصل جمع دو عدد وقتی زوج است که یا هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. پس باید 2 عدد را از اعداد زوج یا فرد انتخاب کرد.

$$\binom{50}{1} \times \binom{50}{1} = 2500 \quad \text{و} \quad \binom{50}{2} + \binom{50}{2} = 2450$$

10- گزینه (4) صحیح است.

$$\binom{10}{6} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{10!}{6!4!} \frac{4!}{2!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4} = 1260$$

11- گزینه (2) صحیح است.

تعداد کل بازی‌ها برابر 45 می‌باشد و در هر روز حداکثر 5 بازی قابل انجام است.

12- گزینه (4) صحیح است.

5 جلد کتاب را جدا کرده و سپس می‌گوییم بین 7 کتاب 8 فضای خالی وجود دارد. که به $\binom{8}{5}$ حالت می‌توان 5 فضا انتخاب کرد.

در این تست ظاهراً جایگشت کتاب‌ها اهمیت ندارد.

13- گزینه (4) صحیح است.

عددی که توان دوم کامل نیست، توان چهارم کامل هم نیست. بنابراین کفایت تعداد اعدادی را بیابیم که نه توان دوم کامل و نه توان سوم کامل هستند:

$$A: n(A) = 31 \rightarrow 1 \leq k \leq 31 \rightarrow 1 \leq k^2 \leq 1000$$

$$B: n(B) = 10 \rightarrow 1 \leq k \leq 10 \rightarrow 1 \leq k^3 \leq 1000$$

$$A \cap B: n(A \cap B) = 3 \rightarrow 1 \leq k \leq 3 \rightarrow 1 \leq k^6 \leq 1000$$

$$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1000 - 31 - 10 + 3 = 962$$

14- گزینه (3) صحیح است.

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} = 7 \times 8 \times 9 \times 1 = 504$$

15- گزینه (1) صحیح است.

کتاب‌های ریاضی یک دسته فرض می‌شوند که همراه 8 کتاب دیگر، 8 شی متفاوت هستند که 9! جایگشت دارند. خود کتاب‌های ریاضی نیز 4! جایگشت دارند.

16- گزینه (3) صحیح است.

$$A: n(A) = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142 \rightarrow \text{اعداد بخش‌پذیر بر 7}$$

$$B: n(B) = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90 \rightarrow \text{اعداد بخش‌پذیر بر 11}$$

$$A \cap B : 77 \rightarrow \text{اعداد بخش پذیر بر } 77 \rightarrow n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$$

$$\rightarrow n(A \cup B) = 142 + 90 - 12 = 220$$

17- گزینه (4) صحیح است.

$$\text{تعداد قطرها} = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 3n \Rightarrow \frac{n-1}{2} - 1 = 3 \Rightarrow n = 9$$

18- گزینه (2 و 3) صحیح است.

$$(1)^n (x)^n \Rightarrow \text{ضریب} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)(2n-1)!}{n!n!}$$

$$\Rightarrow \text{ضریب} = 2 \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = 2 \binom{2n-1}{n-1}$$

از طرفی می‌دانیم $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. پس گزینه 2 و 3 هر دو صحیح هستند.

19- گزینه (3) صحیح است.

$$(x^2)^a (x^3)^b (x^4)^c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=7 \\ 2a+3b+4c=18 \end{cases} \Rightarrow b+2c=4 \xrightarrow{\text{زوج } b} \begin{cases} 1) b=0, c=2, a=5 \\ 2) b=2, c=1, a=4 \\ 3) b=4, c=0, a=3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ ضریب} = \frac{7!}{2!5!} = 21 \\ 2) \text{ ضریب} = \frac{7!}{2!4!} = 105 \\ 3) \text{ ضریب} = \frac{7!}{4!3!} = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ضریب نهایی} = 161$$

20- گزینه (2) صحیح است.

$$\binom{5}{2} \binom{21}{4} 6!$$

21- گزینه (4) صحیح است.

تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر 2^{20} است و زیرمجموعه‌هایی که فرد عدد ندارند برابر 2^{10} است پس جواب $2^{20} - 2^{10}$ یعنی $(2^{10} - 1)2^{10}$ می‌باشد.

22- گزینه (4) صحیح است.

23- گزینه (1) صحیح است.

هر عضو مجموعه 3 حالت دارد: 1) در B باشد در A نباشد. 2) در A و B باشد. 3) در A و B نباشد. پس 3^n جواب است.



24- گزینه (2) صحیح است.

دو پسر به همراه مادرشان را یک شی در نظر می گیریم که به همراه 2 دختر و پدر جمعاً 4 شی می شوند. جایگشت دایره ای این 4 شی برابر 3! است و دو پسر نیز 2 حالت با هم جابجا می شوند پس جواب $2 \times 3! = 12$ می باشد.

25- گزینه (2) صحیح است.

$$\frac{((10-1) + (15-2))!}{(10-1)!(15-2)!} = \frac{(9+13)!}{9!13!}$$

26- گزینه (3) صحیح است.

$$\binom{14}{6} = \binom{(14-6) + 7 - 1}{7-1} \Leftarrow x_1 + x_2 + \dots + x_6 + x_7 = 14$$

27- گزینه (3) صحیح است.

می توان به ازای $n=1$ بررسی کرد که 5 حالت وجود دارد: $(0,0,0,0)$ و $(0,0,0,1)$ و $(0,0,1,1)$ و $(0,1,1,1)$ و $(1,1,1,1)$. فقط گزینه 3 به ازای $n=1$ برابر 5 می شود.

می توان ثابت کرد که تعداد دسته های 4 تایی برابر تعداد جواب های صحیح و نامنفی $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 4$ می باشد که این تعداد برابر گزینه 3 است.

28- گزینه (4) صحیح است.

هر عضو دارای $31 - 1 = 32$ انتخاب است. زیرا هر عضو می تواند در هر یک از زیر مجموعه های A_1 تا A_5 باشد. یعنی 32 حالت ولی یک حالت که عضو، در هیچ یک نیست قابل قبول نیست.

29- گزینه (4) صحیح است.

$$\text{ضریب} = (2)^3 \times (1) \times (5) \times \frac{5!}{3!1!1!} = 40 \times 20 = 800$$

30- گزینه (1) صحیح است.

درواقع باید از اعداد 2 تا 7، سه عدد متمایز انتخاب کنیم که برابر $\binom{6}{3} = 20$ می باشد.

31- گزینه (2) صحیح است.

روش اول عدد گذاری می کنیم:

$$\Rightarrow n=0 \text{ حاصل}$$

$$n=1 \Rightarrow \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \binom{1}{i} = \binom{0}{0} \binom{1}{0} + \binom{1}{0} \binom{1}{1} + \binom{1}{1} \binom{1}{1} = 3$$

$$n=2 \Rightarrow \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \binom{2}{i} = \binom{0}{0} \binom{2}{0} + \binom{1}{0} \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \binom{2}{1} + \binom{2}{0} \binom{2}{2}$$

$$+ \binom{2}{1} \binom{2}{2} + \binom{2}{2} \binom{2}{2} = 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 = 9$$

فقط گزینه 2 می تواند صحیح باشد.

روش دوم حاصل Σ را محاسبه می کنیم:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\binom{i}{0} + \binom{i}{1} + \dots + \binom{i}{i} \right] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \times 2^i = (2+1)^n = 3^n$$

32- گزینه (3) صحیح است.

$$3 \text{ مضارب} = \left\lfloor \frac{37}{3} \right\rfloor = 12$$

$$5 \text{ مضارب} = \left\lfloor \frac{37}{5} \right\rfloor = 7$$

$$2 \text{ مضارب} = \left\lfloor \frac{37}{2} \right\rfloor = 18$$

$$7 \text{ مضارب} = \left\lfloor \frac{37}{7} \right\rfloor = 5$$

$$15 \text{ مضارب} = \left\lfloor \frac{37}{15} \right\rfloor = 2$$

$$14 \text{ مضارب} = \left\lfloor \frac{37}{14} \right\rfloor = 2$$

گزینه 1 نادرست است $\Rightarrow 12 + 7 - 2 = 17$ تعداد مضارب 3 یا 5

گزینه 2 نادرست است $21 = 18 + 5 - 2$ تعداد مضارب 2 یا 7

گزینه (4) نادرست است زیرا تعداد مضارب 3 یا 5 مجموعه برابر 17 تاست و تعداد سایر اعداد 20 می باشد پس ممکن است هر 20

عدد انتخابی مضرب 3 یا 5 نباشند. گزینه 3 درست است زیرا تعداد مضارب 2 یا 7 برابر 21 می باشد و تعداد اعدادی که مضرب 2

یا 7 نیستند 16 می باشد. پس اگر 17 عضو انتخاب کنیم، طبق اصل لانه کبوتر حداقل 2 عضو مضرب 2 یا 7 هستند.

33- گزینه (2) صحیح است.

$$1^2 + 2^2 + \dots + 20^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870$$

34- گزینه (3) صحیح است.

با 100 شروع می شوند $A =$

بیت چهارم یک است $B =$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^5 + 2^7 - 2^4$$

35- گزینه (1) صحیح است.

مجموعه را به شکل $\{1, 12, 2, 11, 3, 10, 4, 9, 5, 8, 6, 7\}$ می نویسیم بنابراین:

+ زیرمجموعه هایی که کوچکترین و بزرگترین عضو 1 و 12 است = جواب

$(6, 7) + (5, 8) + (4, 9) + (3, 10)$ زیرمجموعه هایی که 2 و 11 است



$$= 2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 4^5 + 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4^1 + 4^0 = \frac{4^6 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^6 - 1)$$

36- گزینه (2) صحیح است.

$$\begin{matrix} a + b + c + d = 9 \\ a \geq 1 \end{matrix} \Rightarrow A + b + c + d = 8 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 + 4 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

37- گزینه (2) صحیح است.

نباید 4 و 8 را انتخاب کرد و همچنین 6 و 2 نباید با هم انتخاب شوند پس

شامل 6 فاقد 2 + شامل 2 فاقد 6 + فاقد 2 و 6 = جواب

$$= 2^5 + 2^5 + 2^5 = 96$$

اما چون سوال گفته ناتهی جواب 95 است.

38- گزینه (3) صحیح است.

هر سطر 6 درایه دارد و 2^6 حالت که نصف این حالات یعنی 2^5 حالاتی است که تعداد صفرهای هر سطر زوج است و چون 5

سطر وجود دارد پس $2^{25} = (2^5)^5$ جواب است.

39- گزینه (4) صحیح است.

فرمول نوشته شده تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی به k عضوی است و می دانیم وقتی $n < k$ تابع پوشا وجود ندارد و وقتی

$n \geq k$ تابع پوشا وجود دارد.

40- گزینه (1) صحیح است.

توزیع 21 مهره ناهمانند داخل 3 جعبه ناهمانند به 3^{21} حالت امکان پذیر است. این توزیع 4 حالت دارد: (فرد و زوج و زوج) و (زوج

و فرد و زوج) و (زوج و زوج و فرد) و (فرد و فرد و فرد) حالت (فرد و فرد و فرد) یکی کمتر از بقیه است و سایر حالات با هم

مساوی هستند پس $\frac{1}{4}(3^{21} + 1)$ تعداد حالاتی است که (زوج و فرد و زوج) می باشد.

41- گزینه (1) صحیح است.

$$\left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = 8$$

42- گزینه (4) صحیح است.

43- گزینه (2) صحیح است.

44- گزینه (2) صحیح است.

می توان مثلث را به 4 مثلث به ضلع یک تقسیم کرد که هر یک، لانه می باشند. پس 5 کبوتر باید وجود داشته باشد.

45- گزینه (2) صحیح است.

مجموعه را به شکل $\{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 49, 52, 55\}$ می نویسیم. جفت اعدادی که جمعشان 104 می شود برابر 16 جفت

می باشد که به همراه 1 و 52 می شوند 18 لانه، پس 19 کبوتر اگر داشته باشیم حداقل 2 تایی آنها وارد یک لانه می شوند و

جمعشان 104 می شود.

46- گزینه (3) صحیح است.

شش عملگر وجود دارد که می تواند پرانتز داشته یا نداشته باشد.

$$a - b * c + d - e / g / h$$

$$4 \quad 1 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \quad 3$$

47- گزینه (4) صحیح است.

(عدم شمول). فرض کنید A_i مجموعه حالاتی است که کارت شماره i در جعبه i هست ($i = 0, 2, 4, 6, 8$) پس با توجه به عدم شمول جواب برابر است با:

$$|\bar{A}_0 \bar{A}_2 \bar{A}_4 \bar{A}_6 \bar{A}_8| = 10! - \binom{5}{1} 9! + \binom{5}{2} 8! - \binom{5}{3} 7! + \binom{5}{4} 6! - \binom{5}{5} 5!$$

48- گزینه (1) صحیح است.

در واقع همه جایگشت های 25 حرف جواب است.

49- گزینه (4) صحیح است.

$$C_5 = \frac{1}{5+1} \binom{10}{5} = 42 \quad \text{جواب این سوال عدد کاتالان } (C_n) \text{ است پس}$$

50- گزینه (4) صحیح است.

یک نقطه با مختصات صحیح (x, y, z) از نظر زوج و فرد بودن مولفه ها، دارای 8 حالت است. مثلاً (زوج و زوج و زوج) و (فرد و زوج و زوج) و ... بنابراین اگر 9 نقطه در صفحه انتخاب کنیم، مؤلفه های حداقل 2 نقطه از نظر زوج و فرد بودن یکسان خواهد بود و وسط آنها صحیح است. دقت کنید مختصات وسط نقاط (x_i, y_i, z_i) و (x_j, y_j, z_j) عبارت است از:

$$\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}, \frac{z_i + z_j}{2} \right)$$

51- گزینه (4) صحیح است.

مجموعه را به 3 کلاس $3K$ و $3K+1$ و $3K+2$ افراز می کنیم:

$$A(3K) = \{3, 6, 9, \dots, 27\}, B(3K+1) = \{1, 4, 7, \dots, 28\}, C(3K+2) = \{2, 5, 8, \dots, 29\}$$

برای آنکه مجموع 3 عدد مضرب 3 باشد، 4 حالت وجود دارد: 1- هر 3 عضو A باشند. 2- هر 3 عضو B باشند. 3- هر 3 عضو C باشند. 4- از هر مجموعه یک عضو انتخاب شود.

$$\text{جواب} = \binom{9}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{9}{1} \binom{10}{1} \binom{10}{1} = 1224$$

فصل سوم: مجموعه‌های مرتب

1- رابطه R در A را ترتیب جزئی گوئیم هرگاه بازتابی ضد متقارن و متعدی باشد مجموعه A را همراه ترتیب جزئی R مجموعه با ترتیب جزئی نامیده و آن را با (A, R) نمایش خواهیم داد.

2- اگر $(A, \leq)$ و $(B, \leq)$ دو مجموعه با ترتیب جزئی باشند در این صورت $(A \times B, \leq)$ نیز یک مجموعه با ترتیب جزئی است که در آن ترتیب جزئی به صورت زیر تعریف شده است:

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ اگر } a \leq a' \text{ و } b \leq b' \text{ در } A \text{ و } B \text{ باشد.}$$

ترتیب جزئی $\leq$ تعریف شده برای حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را ترتیب جزئی حاصل ضرب می‌گویند. اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد گوئیم که $a < b$ هرگاه $a \leq b$ ولی $a \neq b$ باشد. فرض می‌کنیم که $(A, \leq)$ و $(B, \leq)$ مجموعه با ترتیب جزئی باشد. یک ترکیب دیگر در $A \times B$ که با $<$ نمایش داده می‌شود به وسیله زیر تعریف می‌شود:

$$(a, b) < (a', b') \text{ اگر } a < a' \text{ یا } (a = a' \text{ و } b < b')$$

این ترتیب را ترتیب قاموسی می‌گوئیم. وقتی که A و B مجموعه‌های کاملاً مرتب باشند در این صورت ترتیب قاموسی $<$ در $A \times B$ نیز یک ترتیب کامل است.

فرض کنید که Σ یک مجموعه متناهی از علائم باشد در این صورت یک رشته متناهی (شامل صفر عنصر) انتخاب شده از Σ را بدون نوشتن ویرگول بین عناصر نمایش داده و آن را یک کلمه روی Σ خواهیم گفت. Σ را الفبا می‌نامیم. طول کلمه ω را با $|\omega|$ نمایش خواهیم داد. کلمه به طول صفر را با ϵ نمایش داده و از آن به نام کلمه تهی یاد خواهیم کرد. مجموعه تمام کلمات به طول k به صورت Σ^k نمایش داده می‌شود این بدین معناست که:

$$\Sigma^0 = \{\epsilon\}$$

$$\Sigma^{k+1} = \{\omega a \mid \omega \in \Sigma^k, a \in \Sigma\}$$

مجموعه کلمات با هر طولی روی Σ مجموعه $\Sigma^* = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k$ خواهد بود.

همچنین مجموعه تمامی کلمات غیرتهی روی Σ مجموعه $\Sigma^+ = \bigcup_{k \geq 1} \Sigma^k$ است. بنابراین برای هر $\omega \in \Sigma^k$ داریم $|\omega| = k$. اگر

$\omega, y \in \Sigma$ به طوری که $|\omega| = n$ و $|y| = m$ ، به عبارت دیگر $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ و $y = y_1 y_2 \dots y_m$ در این صورت الحاق دو کلمه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\omega y = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n y_1 y_2 \dots y_m$$

$$|\omega y| = n + m \quad n + m \text{ به طول}$$

گراف سود دار یک ترتیب جزئی دارای هیچ دوری به طول بزرگتر از یک نیست.

نمودار هاس:

فرض کنید A یک مجموعه متناهی باشد می دانید که گراف سودار یک ترتیب جزئی در A دارای هیچ دوری به طول بیشتر از یک نیست. از طرف دیگر چون یک ترتیب جزئی یک رابطه بازتابی است هر رأسی در گراف سودار یک ترتیب جزئی شامل حلقه است. برای سادگی کار همه حلقه ها را از گراف سودار حذف می کنیم و همه یالهایی را که به وسیله یک رابطه متعدی به وجود آمده اند نیز حذف می کنیم و قرارداد می کنیم که جهت یالهای گراف سودار یک ترتیب جزئی را به طرف بالا رسم می کنیم، لذا می توانیم جهت این یالها را حذف کنیم. بالاخره دواير نمایش دهنده رئوس را نیز توسط نقاط نمایش خواهیم داد.

اما اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه جزئی و $(A, \geq)$ وارون هاس $(A, \leq)$ خواهد بود. اگر $a \leq b$ آنگاه $a < -B$. فرآیند تشکیل یک ترتیب کامل مثل $-$ را ترتیب توپولوژی می گویند. (اگر $a \leq b$ آنگاه a باید قبل از b وارد شود).

فرض کنید که $(A, \leq), (A', \leq')$ دو مجموعه با ترتیب جزئی و $f: A \rightarrow A'$ یک تناظر یک به یک بین A' و A باشد. تابع f را یک تابع یکرختی از $(A, \leq)$ به $(A', \leq')$ خواهیم گفت هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم: $a \leq b$ اگر و تنها اگر $f(a) \leq' f(b)$

اگر یک تابع یکرختی میان دو مجموعه با ترتیب جزئی $(A, \leq), (A', \leq')$ وجود داشته باشد در این صورت خواهیم گفت که $(A, \leq), (A', \leq')$ یکرخت هستند.

(اصل تناظر) اگر عناصر B نسبت به یکدیگر و یا نسبت به دیگر عناصر A دارای خاصیتی باشند و اگر این خاصیت را بتوان به طور کامل به وسیله $\leq$ تعریف کرد در این صورت عناصر B' نیز باید دارای همان خاصیت تعریف شده به وسیله $\leq'$ باشند. - اگر f یک تابع یکرختی باشد و هر برچسب a در H را به $f(b)$ تبدیل کنیم H به نمودار هاس $(A', \leq')$ تبدیل می شود و برعکس.

- هرگاه با جایگذاری هر برچسب به وسیله $f(a)$ و H به نمودار هاس $(A', \leq')$ تبدیل شود f یک تابع یکرختی خواهد بود.

عناصر $a \in A$ را یک عنصر ماکزیمال A خواهیم گفت اگر برای هیچ عضو رابطه $C < B$ برقرار نباشد.

مجموعه Z با ترتیب جزئی و متعارف $\leq$ نه دارای عضو ماکزیمال است و نه عضو مینیمال.

فرض کنید که $(A, \leq 1)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی متناهی باشد در این صورت A دست کم دارای $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ و یک عضو مینمال است.

عناصر $a \in A$ بزرگترین عضو A خوانده می شود هرگاه برای هر $x \in A$ داشتیم برقرار باشد.

یک مجموعه با ترتیب جزئی حداکثر دارای یک بزرگترین عضو و یک کوچکترین عضو است.

بزرگترین عضو یک مجموعه با ترتیب جزئی را در صورت وجود با I نمایش می دهیم و اغلب آن را عضو واحد می نماییم. به طریق مشابه کوچکترین عضو یک مجموعه با ترتیب جزئی را در صورت وجود با O نمایش داده و آن را عضو صفر می نامیم.

مجموعه با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه B از آن را در نظر بگیرید. یک عضو $a \in A$ کرانه بالایی B خوانده می شود هرگاه به ازای همه $b \in B$ داشته باشیم $b \leq a$ به همین ترتیب عضو $a \in A$ کرانه پایینی B خوانده می شود هرگاه به ازای تمامی $b \in B$ داشته باشیم $a \leq b$.

فرض کنید A یک مجموعه با ترتیب جزئی و B زیرمجموعه‌ای از آن باشد. عضو $a \in A$ را کوچکترین کرانه بالایی (LUB) برای B خواهیم گفت اگر a یک کرانه پایینی برای b باشد و اگر a نیز یک کرانه پایینی برای B باشد آنگاه $a \leq a'$ بنابراین $a = \text{GLB}(B)$ اگر به ازای هر $b \in B$ و $a \leq b$ و اگر $a' \in A$ نیز یک کرانه پایینی برای b باشد به ازای هر $b \in B$ و $a \leq b$ آنگاه $a \leq b$.

طبق معمول کرانه‌های بالایی در $(A, \leq)$ متناظر با کرانه‌های پایینی در $(A, \leq)$ برای هر مجموعه همسان از عناصر و کرانه‌های پایینی در $(A, \leq)$ متناظر با کرانه‌های بالایی در $(A, \leq)$ هستند.

فرض کنید که $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد. در این صورت یک زیرمجموعه B از A از حداکثر دارای یک LUB و یک GLB است.

فرض کنید که $(A, \leq)$ و $(A', \leq')$ مجموعه‌های با ترتیب جزئی یکرختی تحت تابع یکرختی $f: A \rightarrow A'$ باشند.
الف) اگر a یک عنصر ماکزیمال (مینیمال) $(A, \leq)$ باشد در این صورت $f(a)$ یک عنصر ماکزیمال (مینیمال) $(A', \leq')$ است.
ب) اگر A بزرگترین کوچکترین عضو $(A, \leq)$ باشد در این صورت $f(a)$ بزرگترین کوچکترین عضو $(A', \leq')$ است.
ج) اگر a یک کرانه بالایی برای کرانه پایینی و GLB و LUB برای زیرمجموعه B از A باشد در این صورت $f(a)$ نیز یک کرانه بالایی برای کرانه پایینی و GLB و LUB برای زیرمجموعه $f(B)$ از A' است.
د) اگر هر زیرمجموعه از $(A, \leq)$ دارای یک LUB (GLB) باشد در این مکان صورت هر زیرمجموعه از $(A', \leq')$ نیز دارای یک LUB (GLB) است.

یک شبکه مجموعه‌ای با ترتیب جزئی مثل $(L, \leq)$ دارای یک LUB (GLB) برای زیرمجموعه از $(A', \leq')$ نیز دارای یک LUB (GLB) است.

یک شبکه مجموعه‌ای با ترتیب جزئی مثل $(L, \leq')$ است که در آن هر زیرمجموعه شامل دو عضو مثل $[a, b]$ دارای LUB و یک GLB باشد در این صورت $\text{LUB}[a, b]$ با $a \vee b$ نمایش داده و آن را رسند a, b می‌نامیم.
اگر $(L_1, \leq)$ و $(L_2, \leq)$ دو ممسبکه باشند در این صورت $(L, \leq)$ نیز یک ممسبکه است که در این $L = L_1 \times L_2$ و ترتیب جزئی $(L, \leq)$ همان ترتیب جزئی حاصلضرب است.

فرض کنید که $(L, \leq)$ یک ممسبکه باشد زیرمجموعه ناتهی S از L را زیرممسبکه برای L می‌گوییم هرگاه به ازای هر a و b عناصر $a \vee b$ و $a \wedge b$ که در L تعیین می‌شوند در مجموعه S نیز قرار داشته باشند.

خواص ممسبکه‌ها:

- 1- $a \leq a \vee b$ و $b \leq a \vee b$ یک کرانه بالایی برای a و b است.
- 2- اگر $a \leq c$ و $b \leq c$ آنگاه $a \vee b \leq c$ (کوچکترین کرانه بالایی برای a و b است).
- 3- $a \wedge b \leq a$ و $a \wedge b \leq b$ یک کرانه پایینی برای a و b است.
- 4- اگر $c \leq a$ و $c \leq b$ آنگاه $c \leq a \wedge b$ (بزرگترین کرانه پایینی برای a و b است).

اگر L یک ممسبکه باشد آنگاه به ازای هر a و b از L داریم:

الف) $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \leq b$

ب) $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \leq b$

ج) $a \wedge b = b$ اگر و تنها اگر $a \vee b = b$

فرض کنید L یک شبکه باشد آنگاه داریم:

1- خاصیت خودتوانی

الف) $a \vee a = a$ ب) $a \wedge a = a$

2- خاصیت جابجایی

الف) $b \vee a = a \vee b$ ب) $b \wedge a = a \wedge b$

3- خاصیت شرکت پذیری

الف) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ب) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

4- خاصیت جذبی

الف) $a \vee (a \wedge b) = a$ ب) $a \wedge (a \vee b) = a$

فرض کنید که L یک شبکه باشد آنگاه برای هر c و b و a از L چنین داریم:

1- اگر $a \leq b$ آنگاه:

الف) $a \vee b \leq b \vee c$ ب) $a \wedge b \leq b \wedge c$

2- $a \leq c$ و $b \leq c$ اگر و تنها اگر $a \vee b \leq c$

3- $c \leq a$ و $c \leq b$ اگر و تنها اگر $c \leq a \wedge b$

4- اگر $a \leq c$ و $c \leq d$ آنگاه

الف) $a \vee c \leq b \vee d$ ب) $a \wedge c \leq b \wedge d$

مشبکه‌های ویژه:

- مشبکه L را محدود گوییم هرگاه دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد.

- فرض کنید که $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مشبکه متناهی باشد در این صورت L محدود است.

- مشبکه L را بخش پذیر گوییم به ازای هر c و b و a از L روابط زیر برقرار باشد:

الف) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ب) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

اگر L بخش پذیر نباشد آن را بخش ناپذیر می نامیم.

مشبکه L بخش ناپذیر است اگر و تنها اگر شامل زیر مشبکه‌های یکرخت با یکی از مشبکه‌های اشکال زیر باشد.

فرض کنید L یک مشبکه محدود دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد. همچنین فرض کنید که $a \in L$ عنصر

$a' \in L$ را متمم a گوییم هرگاه $a \wedge a' = O$ و $a \vee a' = I$ از این تعریف مشاهده می شود که $I' = O$ و $O' = I$.

فرض کنید که L یک مشبکه محدود و بخش پذیر باشد اگر یک متمم برای عضوی وجود داشته باشد در این صورت این متمم

منحصر به فرد است.

مشبکه $(L, \leq)$ را متمم‌دار گوییم هرگاه محدود بوده و هر عضو آن متمم داشته باشد.

جبر بول:

یک مشبکه است این مشبکه $(L, \subseteq)$ باشد آنگاه $L = P(S)$ یک مجموعه دلخواه و S قبلاً دیدیم که اگر دارای ویژگی‌های متنوعی است که یک مشبکه در حالت عمومی فاقد آنهاست. به همین دلیل این نوع مشبکه‌ها برای کارکردن بسیار ساده بوده و نقش مهمی را در کاربردهای مختلف ایفا می‌کنند.

اگر $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ دو مجموعه دلخواه و متناهی با n عنصر باشند در این صورت مشبکه‌های $(P(S_1), \subseteq)$ ، $(P(S_2), \subseteq)$ یکرخت هستند.

نکته: برای هر $n = 0, 1, 2, \dots$ فقط یک نوع مشبکه به صورت $(P(S), \subseteq)$ وجود دارد. این مشبکه مستقل از عناصر S بوده و فقط به مقدار n بستگی دارد. تعداد عناصر این مشبکه برابر 2^n است.

یک مشبکه متناهی را جبر بول گوییم هرگاه به ازای یک عدد صحیح و مثبت n یکرخت با B_n باشد.

قاعده جایگزینی برای جبر بول

فرض کنید که $(L, \leq)$ یک جبر بول z, y, x سه عضو دلخواه از آن و I و O نیز به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عضو آن باشد. نیز فرض کنید C و B و A سه زیرمجموعه دلخواه از مجموعه S و به عبارتی دیگر سه عضو از $(P(S), \subseteq)$ باشند در این صورت هر ویژگی برای عناصر دلخواه از $(P(S), \subseteq)$ را با جایگزین کردن $\vee$ به جای $\wedge$ و U به جای $\leq$ و I به جای $\subseteq$ عیناً همان ویژگی برای عناصر دلخواه از $(L, \leq)$ منتقل کرد.

مثال: با سه گزاره P و Q و R چند گزاره مرکب با جدول درستی متفاوت می‌توان داشت؟

16 (1) 64 (2) 8 (3) 256 (4)

حل) پاسخ 4 صحیح است. زیرا جدول درستی برای n متغیر 2^n سطر دارد و چون 2^{2^n} حالت می‌توانند T و یا F باشند در نتیجه تعداد گزاره مرکب قابل ایجاد با جدول درستی متفاوت 2^{2^n} عدد می‌باشد که در اینجا برابر 256 گزاره مرکب است.

مثال: اگر $P \vee Q \Leftrightarrow R, P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ آنگاه گزاره $P \rightarrow \neg Q$ هم ارز است با:

1) $P \vee R \rightarrow \neg Q$ 2) $P \vee Q \rightarrow \neg R$ 3) $P \vee R \rightarrow \neg R$ 4) 2 و 3

حل) پاسخ 2 صحیح است، زیرا عمل جایگزینی را نمی‌توان در دو مرحله انجام داد و باید عبارت و گزاره‌ها همزمان جایگزین شوند.

$$P \rightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow \neg R$$

$$(P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow \neg R$$

ولی جایگزینی بصورت زیر نادرست است:

تئوری مجموعه‌ها

تعاریف

مجموعه: اجتماعی از اشیاء مختلف که ممکن است خواص مشترکی داشته باشند، بعنوان مثال: «مجموعه شعرای ایرانی»

عضو: هر شیء که به یک مجموعه تعلق داشته باشد «عضو» یا «عنصر» آن مجموعه نامیده می‌شود.

مجموعه معین یا خوش ترکیب (well-defined): مجموعه‌ای که با استفاده از یک سری قوانین معین بتوان تعیین نمود یک شیء متعلق به آن هست یا خیر، «مجموعه معین» نامیده می‌شود.

مجموعه‌ها معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی و اعضا با حروف کوچک انگلیسی نمایش داده می‌شوند. اگر عنصری مانند a متعلق به مجموعه A باشد بصورت $a \in A$ و اگر نباشد بصورت $a \notin A$ نشان داده می‌شود.

نمایش یک مجموعه: یک مجموعه ممکن است با «تک تک اعضا» و یا براساس «خواص مشترک اعضا» و یا براساس «رابطه بین اعضا» نمایش داده شود. بعنوان مثال:

$$S_1 = \{1, 3, a\}$$

$$S_2 = \{x \mid x \text{ یک عدد فرد مثبت است}\}$$

$$S_3 = \{a, a^2, a^3, \dots\}$$

نکته: یک عضو مجموعه می‌تواند خود مجموعه‌ای دیگر باشد. بعنوان مثال: $S = \{a, \{1, 2\}, p, \{q\}\}$

در این مثال: $\{1, 2\} \in S$ و $q \notin S$ $\{q\} \in S$

مجموعه محدود و نامحدود: اگر تعداد عناصر مجموعه‌ای محدود باشد به آن «مجموعه محدود» و در غیر این صورت «مجموعه نامحدود» گفته می‌شود.

زیرمجموعه: اگر A و B دو مجموعه مفروض باشند و هر عضو A ، عضو B نیز باشد، آنگاه « A زیرمجموعه B » گفته می‌شود و این رابطه بصورت $A \subseteq B$ نشان داده می‌شود.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B)$$

خواص مهم زیرمجموعه‌ها:

1- هر مجموعه زیرمجموعه خودش است

$$2- (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$$

تساوی دو مجموعه: دو مجموعه A و B مساوی هستند اگر همزمان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشند.

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$\text{و یا: } (A = B) \Leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

زیرمجموعه خاص (سره): A زیرمجموعه خاص مجموعه B است اگر $A \subseteq B$ باشد ولی $A \neq B$

مجموعه جهانی: مجموعه‌ای است که هر مجموعه دیگر زیر مجموعه آن باشد و با E نمایش داده می‌شود.

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد و با $\emptyset$ و یا $\{\}$ نمایش داده می‌شود. $\emptyset$ زیر مجموعه هر مجموعه‌ای است.

مجموعه توانی: مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مانند A «مجموعه توانی A » یا «مجموعه قوه A » نامیده می‌شود و با $P(A)$ یا 2^A نمایش داده می‌شود.

$$P(A) = 2^A = \{x \mid x \subseteq A\}$$

بعنوان مثال مجموعه توانی مجموعه $A = \{a, b\}$ برابر است با:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

اگر تعداد اعضای مجموعه A ، n باشد، تعداد اعضای مجموعه 2^A ، 2^n می‌باشد.

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه، مجموعه‌ای است از عناصری که عضو هر دو مجموعه باشند و با $A \cap B$ نمایش داده می‌شوند.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

خواص مهم اشتراک:

$$A \cap E = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap A = A, A \cap B = B \cap A \quad -1$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad -2$$

مجموعه‌های جدا از هم (منفصل): دو مجموعه که اشتراکشان تهی باشد، «جدا از هم» نامیده می‌شوند.

مجموعه منفصل: اگر اعضای یک مجموعه همگی مجموعه بوده و دو بدو منفصل باشند، به آن مجموعه «مجموعه منفصل» گفته می‌شود، مانند مجموعه $A = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه، مجموعه‌ای از عناصر است که عضو A یا عضو B و یا عضو هر دو باشند.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

خواص مهم اجتماع:

$$A \cup E = E, A \cup \emptyset = A, A \cup A = A, A \cup B = B \cup A \quad -1$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad -2$$

تفاضل دو مجموعه (مکمل نسبی): تفاضل دو مجموعه A و B یا مکمل نسبی مجموعه B بصورت $A - B$ نشان داده می‌شود و مجموعه‌ای است از عناصری که عضو A بوده ولی متعلق به B نباشند.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

مکمل مطلق: مکمل نسبی مجموعه A نسبت به مجموعه جهانی E «مکمل مطلق مجموعه A » نامیده می‌شود و با $\sim A$ و یا A' نمایش داده می‌شود.

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$$

خواص مهم مکمل:

$$\sim(\sim A) = A, \sim \emptyset = E, \sim E = \emptyset, A \cup \sim A = E, A \cap \sim A = \emptyset$$

تفاضل متقارن دو مجموعه: تفاضل متقارن دو مجموعه یا «جمع بولی» A و B که بصورت $A + B$ نمایش داده می شود برابر است با:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

خواص دیگر مجموعه ها: علاوه بر خواص گفته شده، با توجه به تعاریف فوق خواص دیگری برای مجموعه ها اثبات می شود که اعم آنها عبارتند از:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

توزیع پذیری

توزیع پذیری

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$$

$$A - B = A \cap \sim B$$

$$A - (A \cap B) = A - B$$

$$A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$$

دمورگان

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

دمورگان

اصل دوگانی (دوالیته) که در جبر گزاره ها مطرح شد، در جبر مجموعه ها نیز مطرح است. در اینجا دوگان یک عبارت از تبدیل U و I به یکدیگر و نیز $\emptyset$ و E به یکدیگر بدست می آید.

زوج مرتب:

زوج مرتب: یک «زوج مرتب» عبارت است از دو شی که ترتیب خاصی نسبت به یکدیگر دارند.

در زوج مرتب برخلاف یک مجموعه دو عضوی، ترتیب عناصر مهم است و ممکن است حتی دو عنصر زوج مرتب مساوی باشند. $\langle x, y \rangle$ و $\langle 1, 2 \rangle$ و $\langle 2, 2 \rangle$ نمونه هایی از زوج های مرتب هستند.

تساوی دو زوج مرتب: دو زوج مرتب با هم مساویند در صورتی که مؤلفه های (عناصر) آنها به همان ترتیب مساوی باشند.

$$\langle x, y \rangle = \langle u, t \rangle \Leftrightarrow (x = u) \wedge (y = t)$$

n تایی مرتب: مفهوم زوج مرتب را می توان تعمیم داد و به این ترتیب سه تایی مرتب، چهار تایی مرتب و ... n تایی مرتب را تعریف نمود. یک n تایی مرتب بصورت $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ نمایش داده می شود.

حاصل ضرب کارتزین: اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه همه زوج های مرتب ممکن که مؤلفه اول آنها عنصری از A و

مؤلفه دوم آنها عضوی از B باشد، حاصل ضرب کارتین A و B نامیده می‌شود.

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

حاصل ضرب کارتین دارای خاصیت‌های جابجایی و شرکت‌پذیری نمی‌باشد ولی خاصیت توزیعی نسبت به اجتماع و اشتراک دارد.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

حاصل ضرب کارتین را می‌توان برای n مجموعه نیز تعمیم داد. حاصل ضرب کارتین $A \times A$ بصورت A^2 و حاصل ضرب $A \times A \times \dots \times A$ بصورت A^n نمایش داده می‌شود.

مثال: در صورتی که $C = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$, $A = \{2, 3, 4\}$ مجموعه $A + B + C$ کدام است؟

$$\{1, 3, 4\} \quad (4) \quad \{1, 3, 5, 6\} \quad (3) \quad \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (2) \quad \{1, 2, 3, 4\} \quad (1)$$

حل) پاسخ (3) صحیح است.

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A - B = \{3, 4\}, B - A = \{1\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 4\}$$

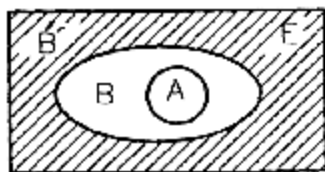
$$\{1, 3, 4\} + C = (\{1, 3, 4\} - C) \cup (C - \{1, 3, 4\}) = \{1, 3\} \cup \{5, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$$

مثال: اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه:

$$B - A = B \quad (4) \quad A \cup B = A \quad (3) \quad A - B = \emptyset \quad (2) \quad A \cap B = B \quad (1)$$

حل) پاسخ (2) صحیح است. زیرا: $A - B = A \cap \sim B = \emptyset$

که با استفاده از نمودار نیز مشاهده می‌شود.



$$= x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{n-2} = x \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= x(a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n) + \frac{x^2}{(1-x)^2} = xA(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow A(x) = xA(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} x_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

ساختمانهای جبری

عمل دوتایی و عمل n تایی

تعریف: عمل n تایی (n-ary operation) روی یک مجموعه مانند X، تابعی مانند f است اگر:

$$f : X^n \rightarrow X$$

در این حالت گفته می شود، مجموعه X روی عملگر f بسته است.

اگر n برابر 2 باشد آنگاه عملگر f عملگر دوتایی (Binary Operation) نامیده می شود و:

$$\forall x_i, x_j \in X \Rightarrow (x_i, x_j) \in X \times X \Rightarrow f(x_i, x_j) \in X$$

خواص اعمال دوتایی

الف) عضو همانی: اگر * یک عمل دوتایی روی مجموعه ای مانند X باشد، عنصر e_L از مجموعه X

$$\forall x \in X \Rightarrow e_L * x = x$$

عضو «همانی چپ» است اگر

$$\forall x \in X \Rightarrow x * e_R = x$$

و عضو «همانی راست»، است اگر:

قضیه: اگر در عملی همانی چپ و راست وجود داشته باشد، با هم برابرند.

ب) عضو وارون: اگر * یک عمل دوتایی روی مجموعه ای مانند X بوده و e عضو همانی و a عضوی از X باشد، عنصر x_L از

$$x_L * a = e$$

مجموعه X عضو «وارون چپ» است اگر:

$$a * x_R = e$$

و عنصر x_R عضو «وارون راست» است اگر:

قضیه وارون هر عضو در صورت وجود منحصر به فرد است:

$$x_L = x_R = a^{-1}; a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

ج) حذف پذیری: اگر * یک عمل دوتایی روی مجموعه X باشد، عضو a از X «حذف پذیر» گفته می شود، اگر

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

نکته: اگر عضوی از مجموعه X، وارون پذیر باشد، قطعاً حذف پذیر است ولی در صورت حذف پذیری ممکن است وارون پذیر نباشد.

د) خود توانی: اگر * عمل دوتایی روی مجموعه X باشد، عضو a از مجموعه X «خود توان» است اگر:

$$a * a = a$$

نکته: بجز خواص فوق، اعمال دوتایی می‌توانند خواص جابجایی، شرکت‌پذیری (انجمنی) و توزیع‌پذیری را نیز داشته باشند. سیستم‌های جبری

یک «سیستم جبری» مجموعه‌ای مانند S و یک یا بیشتر عمل n تایی است که روی مجموعه S تعریف شده‌اند، اگر این اعمال $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشند، سیستم بصورت $\langle S, f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ نمایش داده می‌شود.

هر سیستم جبری علاوه بر خاصیت بسته بودن می‌تواند دارای خواص شرکت‌پذیری، جابجایی، عضو همانی (یکسان)، عضو وارون، توزیع‌پذیری، حذف‌پذیری و ... باشد که بر روی تک تک عملهای دوتایی (n تایی) سیستم جبری تعریف می‌شوند.

زیر جبر (Subalgebra): اگر $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ یک سیستم جبری باشد $Y \subseteq X$ تحت عمل $\mathbf{o}$ بسته باشد در این صورت $\langle Y, \mathbf{o} \rangle$ یک «زیر جبر» از $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ نامیده می‌شود.

همومورفیسم (Homomorphism): اگر $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ و $\langle Y, * \rangle$ دو سیستم جبری مشابه باشند ($\mathbf{o}$ و $*$ هر کدام یک عمل دوتایی با خواص مشابه می‌باشند)، تابع $g: X \rightarrow Y$ یک «همومورفیسم» از $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ به $\langle Y, * \rangle$ گفته می‌شود اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in X \Rightarrow g(x_1, \mathbf{o}, x_2) = g(x_1) * g(x_2)$$

در این صورت به $\langle Y, * \rangle$ یک تصویر «همومورفیک» $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ گفته می‌شود و واضح است که:

$$\forall x \in X \Rightarrow g(x) \in Y$$

اپی مورفیسم (بروربختی Epimorphism): اگر تابع $g: X \rightarrow Y$ یک همومورفیسم از $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ به $\langle Y, * \rangle$ و نیز یک تابع پوشا باشد، در این صورت به آن یک «اپی مورفیسم» گفته می‌شود.

مونومورفیسم (تک ریبختی Monomorphism): اگر تابع $g: X \rightarrow Y$ یک همومورفیسم از $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ به $\langle Y, * \rangle$ و نیز یک تابع یک به یک باشد، در این صورت به آن یک «مونومورفیسم» گفته می‌شود.

ایزومورفیسم (یک ریبختی Isomorphism): اگر تابع $g: X \rightarrow Y$ یک همومورفیسم از $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ به $\langle Y, * \rangle$ و نیز یک تابع پوشا و یک به یک باشد، در این صورت به آن یک «ایزومورفیسم» گفته می‌شود و دو سیستم جبری «ایزومورفیک» و یا «ایزومورف» نامیده می‌شود.

اندومورفیسم (درون ریبختی Endomorphism): اگر تابع $g: X \rightarrow Y$ یک همومورفیسم از $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ به $\langle Y, * \rangle$ باشد و $X \subseteq Y$ در این صورت به تابع g یک «اندومورفیسم» گفته می‌شود.

اتومورفیسم (خودریبختی Auto morphism): اگر تابع $g: X \rightarrow Y$ یک همومورفیسم از $\langle X, \mathbf{o} \rangle$ به $\langle Y, * \rangle$ باشد و $X = Y$ در این صورت به تابع g یک «اتومورفیسم» گفته می‌شود.

نیم گروه (Semigroup)

نیم گروه یک سیستم جبری ساده است. اگر S مجموعه‌ای غیر تهی و $\mathbf{o}$ یک عمل دوتایی روی مجموعه S باشد در این صورت $\langle S, \mathbf{o} \rangle$ یک «نیم گروه» نامیده می‌شود اگر $\mathbf{o}$ دارای خاصیت انجمنی باشد:

$$\forall a, b, c \in S \quad (a \mathbf{o} b) \mathbf{o} c = a \mathbf{o} (b \mathbf{o} c)$$

منوید (Monoid – تکوار – تک تهی)

نیم گروهی که دارای عنصر خنثی (همانی) نسبت به عمل $\circ$ باشد یک «منوید» گفته می شود و یا به عبارت دیگر، سیستم جبری $\langle M, \circ \rangle$ یک منوید گفته می شود اگر:

$$\forall a, b, c \in M \Rightarrow (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$\forall a \in M; \exists e \in M \Rightarrow a \circ e = e \circ a = a \quad \text{و}$$

نکته: در نمایش منوید، در بعضی اوقات از عنصر خنثی (همانی) نیز استفاده می شود و بعنوان مثال می تواند بصورت $\langle M, \circ, e \rangle$ نیز نمایش داده شود.

منوید دوری

منوید $\langle M, *, e \rangle$ دوری گفته می شود اگر:

$$\exists a \in M, \forall x \in M \Rightarrow x = a^j \quad (j \in \mathbb{N})$$

در این صورت a «مولد منوید» گفته می شود.

گروه

هر سیستم جبری مانند $\langle G, * \rangle$ که عمل $*$ در آن سه خاصیت شرکت پذیری (انجمنی)، عضو همانی و عضو وارون را داشته باشد، یک «گروه» (Group) نامیده می شود.

مرتبه گروه: تعداد عناصر موجود در گروه G «مرتبه گروه» نامیده می شود که با $|G|$ نمایش داده می شود.

نکته: گروه حالت خاصی از نیم گروه و منوید است.

نکته: عضو خنثی و عنصر معکوس (وارون) در گروه یکتا است.

نکته: نظیر منوید دوری، «گروه دوری» و «مولد گروه» تعریف می شوند.

نکته: تعاریفی مانند زیر جبر، ایزومورفیسم، همومورفیسم و ... که در مورد سیستمهای جبری بیان شد در مورد ساختمانهای جبری دیگر نیز تحت نام خودشان وجود دارد. تعاریفی نظیر زیر منوید، زیر نیم گروه و ...

قضیه: اگر $\langle G, * \rangle$ یک گروه و $a \in G$ عضوی دلخواه از G باشد، گروه دوری تولید شده بوسیله a یک زیرگروه از $\langle G, * \rangle$ خواهد بود.

قضیه: زیرمجموعه $S \neq \emptyset$ از G یک زیرگروه $\langle G, * \rangle$ می باشد، اگر و تنها اگر برای هر جفت عضو $a, b \in S$ بتوان نوشت:

$$a * b^{-1} \in S$$

قضیه: اگر $\langle G, * \rangle$ و $\langle H, \Delta \rangle$ دو گروه باشند و نگاشت (تابع) $g: G \rightarrow H$ یک همومورفیسم از $\langle G, * \rangle$ به $\langle H, \Delta \rangle$

باشد و اگر $\langle S, * \rangle$ یک زیرگروه از $\langle G, * \rangle$ و $g(S)$ تصویر مجموعه S تحت همومورفیسم g باشد، آنگاه $\langle g(S), \Delta \rangle$ یک زیرگروه از $\langle H, \Delta \rangle$ خواهد بود.

گروه آبدلی

اگر در گروه $\langle G, * \rangle$ ، عمل $*$ دارای خاصیت جابجایی باشد، به گروه G یک «گروه جابجایی» یا «گروه آبدلی» گفته می‌شود.

$$\forall a, b \in G \Rightarrow a * b = b * a$$

هسته (Kernel) همومورفیسم

اگر g یک همومورفیسم از $\langle G, * \rangle$ به $\langle H, \Delta \rangle$ باشد، مجموعه همهٔ عنصرهایی از G که به e_H (عضو همانی گروه H) تصویر می‌شوند، «هسته همومورفیسم g » نامیده می‌شود و به صورت $\text{Ker}(g)$ نشان داده می‌شود.

قضیه: هسته همومورفیسم g از گروه $\langle G, * \rangle$ به $\langle H, \Delta \rangle$ یک زیرگروه است.

نکته: همومورفیسم گروه، عضو همانی، وارون و زیرگروه را حفظ می‌کند:

$$g(e_G) = e_H, \quad g(a^{-1}) = [g(a)^{-1}]$$

لاتیسه‌ها (مشبکه‌ها)

کران پایین (LB) و کران بالا (UB)

اگر $\langle P, \leq \rangle$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد و $A \subseteq P$ (رابطه $\leq$ بیانگر رابطهٔ «کوچکتر یا مساوی» نیست، بلکه دارای مفهوم کلی‌تر «قبل از» می‌باشد)، آنگاه هر عضو مانند x متعلق به P یک «کران بالا» برای زیر مجموعهٔ A گفته می‌شود به شرط اینکه:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \leq x$$

و یک «کران پایین» زیرمجموعهٔ A گفته می‌شود، اگر:

$$\forall a \in A \Rightarrow x \leq a$$

GLB و LUB

اگر $\langle P, \leq \rangle$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد و $A \subseteq P$ باشد، عضو $x \in P$ یک LUB یا Supremum زیر مجموعه A نامیده می‌شود، اگر x یک کران بالا برای A بوده و برای هر کران بالایی دیگر مانند y ، $x \leq y$ برقرار باشد و نیز به طریق مشابه GLB یا Infimum زیرمجموعهٔ A عضوی مانند $x \in P$ است، بطوری که x یک کران پایین A بوده و برای هر کران پایین دیگر مانند y ، $y \leq x$ برقرار باشد.

نکته: LUB «کوچکترین کران بالا» و GLB «بزرگترین کران پایین» می‌باشند.

نکته: GLB و LUB منحصر بفرد می‌باشند.

نکته: در یک «زنجیر» هر زیرمجموعه دارای یک LUB و یک GLB می‌باشد.

نکته: طبق قضایای دوگانی می‌توان نوشت:

$$\text{LUB} \langle P, \geq \rangle = \text{GLB} \langle P, \leq \rangle, \quad \text{LUB} \langle P, \leq \rangle = \text{GLB} \langle P, \geq \rangle$$

مشبکه (Lattice)

مجموعه با ترتیب جزئی $\langle L, \leq \rangle$ یک «مشبکه» گفته می‌شود اگر در آن هر دو عضو دلخواه مانند a و b دارای یک GLB و یک LUB باشند. در این صورت GLB و LUB دو عمل دوتایی می‌باشند که نتیجه‌شان نیز متعلق به خود مجموعه L است. به عمل دوتایی meet , GLB (تماس) و به عمل دوتایی join , LUB (الحاق) نیز گفته می‌شود و با علائم زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\text{GLB}(x, y) = x * y = x \quad \text{I} \quad y = x \wedge y = x \times y$$

$$\text{LUB}(x, y) = x \oplus y = x \quad \text{U} \quad y = x \vee y = x + y$$

نکته: چون نتیجه دو عمل متعلق به خود L است، $\langle L, *, \oplus \rangle$ یک سیستم جبری است.

نکته: هر مجموعه با ترتیب کامل یک شبکه است ولی هر مجموعه با ترتیب جزئی لزوماً شبکه نیست و نیز اگر مجموعه با ترتیب کامل نباشد، قطعاً نمی‌توان گفت شبکه نیست.

نکته: شبکه‌ها بر روی دو عمل meet و join دارای خواص خودتوانی، جابجایی، انجمنی و نیز خاصیت جذبی طبق تعریف می‌باشند:

$$a * (a \oplus b) = a ; \quad a \oplus (a * b) = a$$

همزاد (دوگان) یک شبکه: اگر $\langle L, \leq \rangle$ یک شبکه باشد، آنگاه $\langle L, \geq \rangle$ نیز یک شبکه خواهد بود.

همزاد (دوگان) یک شبکه از تبدیل $\leq$ به $\geq$ و $*$ به $\oplus$ و نیز $\oplus$ به $*$ بدست می‌آید.

شبکه کامل: شبکه کامل، شبکه‌ای است که هر زیرمجموعه غیرتهی از آن حداقل دارای یک LUB و یک GLB باشد.

شبکه کراندار: شبکه‌ای که دارای کوچکترین و بزرگترین عضو باشد «شبکه کراندار» نامیده می‌شود.

کوچکترین و بزرگترین اعضا کران‌های شبکه نامیده شده و با $\mathbf{0}$ و $\mathbf{1}$ نمایش داده می‌شوند.

قضیه: اگر $\langle L, *, \oplus \rangle$ یک شبکه بوده و $L = \{a_1, \dots, a_n\}$ باشد آنگاه:

$$\text{GLB} = *_{i=1}^n a_i = \mathbf{0} ; \quad \text{LUB} = \oplus_{i=1}^n a_i = \mathbf{1}$$

قضیه: برای کرانهای $\mathbf{0}$ و $\mathbf{1}$ در شبکه $\langle L, *, \oplus, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ و برای هر $a \in L$:

$$a \oplus \mathbf{0} = a ; \quad a * \mathbf{1} = a ; \quad a \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1} ; \quad a * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

تعریف: در یک شبکه کراندار $\langle L, *, \oplus, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ، عضو $b \in L$ مکمل عضو $a \in L$ گفته می‌شود اگر:

$$a * b = \mathbf{0} , \quad a \oplus b = \mathbf{1}$$

شبکه مکمل پذیر: شبکه $\langle L, *, \oplus, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ «مکمل پذیر» نامیده می‌شود، اگر هر عضو a حداقل دارای یک مکمل باشد.

شبکه توزیع پذیر: شبکه $\langle L, *, \oplus, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ «توزیع پذیر» نامیده می‌شود، اگر برای هر $a, b, c \in L$ بتوان نوشت:

$$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$$

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c) \quad \text{و}$$

جبر بول

یک شبکه مکمل پذیر یک «جبر بول» نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\langle B, *, \oplus, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$$

خواص جبر بول

جبر بول $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ علاوه بر خواص عموم شبکه‌ها (خودتوانی، جابجایی، انجمنی، جذبی) دارای خواص زیر است:

- 1- خاصیت توزیع پذیری $*$ روی $\oplus$ و $\oplus$ روی $*$
- 2- خاصیت دوری که به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\forall a, b, c \in B \Rightarrow (a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) = (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$
- 3- خاصیت حذفی که به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\forall a, b, c \in B ; a * b = a * c, a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$$
- 4- وارون پذیری نسبت به $*$ و $\oplus$
- 5- خاصیت دموگن که در دو حالت زیر قابل ارائه است:

$$(a * b)' = a' \oplus b', \quad (a \oplus b)' = a' * b'$$

و نیز:

علاوه بر 5 خاصیت فوق هم چنین می‌توان نوشت:

- 1- $\langle B, *, \oplus \rangle$ یک شبکه‌ی کراندار با عضو همانی و عضو صفر است.
- 2- $\langle B, \leq \rangle$ یک مجموعه با ترتیب جزئی است (B یک شبکه است) و برای $a, b \in B$ می‌توان نوشت:
$$a \leq b \Rightarrow a * b = a, \quad a \oplus b = b \quad \text{و نیز} \quad a \leq b \Rightarrow a * b' = 0, \quad a' \oplus b = 1$$

زیر جبر بول

اگر $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ یک جبر بول و $S \subseteq B$ باشند، در صورتی که S شامل عضوهای 0 و 1 و تحت $*$ و $\oplus$ بسته باشد، آنگاه $\langle S, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ «زیر جبر بول» نامیده می‌شود.

نکته: بسته بودن نسبت به $*$ و $\oplus$ ، بسته بودن نسبت به $'$ و وجود 0 و 1 را تضمین می‌نماید.

نکته: در جبر بول $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ ، زیر مجموعه $\{0, 1\}$ و مجموعه B و نیز برای $\forall a \in B, a \neq 0, 1$ مجموعه $\{a, a', 0, 1\}$ زیر جبر بول هستند.

نکته: زیرمجموعه $\{0, 1\}$ یک زیر جبر بول از هر جبر بول می‌باشد.

توابع بولی

اگر $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ یک جبر بول باشد، تابع $f: B^n \rightarrow B$ که متناظر با یک عبارت بولی است، «تابع بولی» نامیده می‌شود.

عبارت بولی: بررسی یک عبارت بولی شبیه فرمولهای خوش ساخت در مبحث گزاره‌ها است و طبق قوانین زیر یک عبارت بولی تشخیص داده می‌شود:

- 1- 0 و 1 هر کدام به تنهایی یک عبارت بولی هستند.
- 2- $x_1, x_2, \dots, x_n$ هر کدام به تنهایی یک عبارت بولی هستند.
- 3- اگر α و β دو عبارت بولی باشند، $\alpha * \beta$ و $\alpha \oplus \beta$ نیز عبارت بولی خواهند بود.

4- اگر α یک عبارت بولی باشد، α' هم عبارت بولی است.

5- تنها رشته‌هایی عبارت بولی هستند که بتوان آنها را با کاربرد متناهی از قوانین (1) تا (4) بدست آورد.

نکته مهم: ساده کردن توابع و عبارت بولی در روشهای مختلف از جمله جدول کارنو به تفصیل آمده‌اند و مبحث مربوط به زبانها و دستور زبان (گرامر) که خود نوعی منوید هستند.

نمودار Hass (Hass Diagram)

گراف ترتیب جزئی و ترتیب کامل، «نمودار Hass» یا HD نامیده می‌شود. در HD ترتیب و چگونگی قرار گرفتن گره‌ها اهمیت دارد.

اگر $\langle P, < \rangle$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد و بتوان نوشت:

$$\forall x, y \in P; x < y$$

آنگاه در HD، گره x در زیر گره y قرار می‌گیرد و در صورتی که هیچ عضو دیگری مانند z بین آن دو وجود نداشته باشد یا عبارت دیگر:

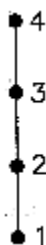
$$(x < y \wedge x \leq z \leq y) \Rightarrow (x = z \vee y = z)$$

در این صورت گفته می‌شود « y پوششی برای x » است.

بعنوان مثال رابطه $\leq$ روی مجموعه $X = \{1, 2, 3, 4\}$ هر سه خاصیت انعکاسی، نامتقارن و انتقالی را دارد و در نتیجه یک ترتیب جزئی است و HD آن به صورت روبرو است:

و در این مثال می‌توان گفت که 4 پوششی برای 3، 3 پوششی برای 2 و 2 نیز پوششی برای 1 است و مشاهده می‌شود که یک «زنجیر» تشکیل شده است.

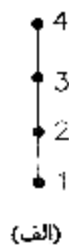
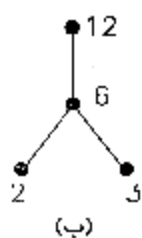
نکته: همیشه HDها دارای شکل هندسی منظم هستند.



نمونه‌ای از یک HD

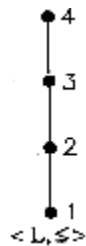
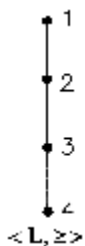
تشخیص مشبکه با استفاده از HD

می‌توان از روی HD، مشبکه (لاتیس) بودن یک مجموعه با ترتیب جزئی را بررسی نمود. در این بررسی، باید بتوان برای هر دو گره مشبکه یک GLB و یک LUB بدست آورد. برای دو گره که مستقیماً به یکدیگر متصل هستند GLB و LUB یکی از دو گره می‌باشند. بعنوان مثال در شکل زیر حالت (الف) هر دو گره دارای یک GLB و LUB هستند. ولی در حالت (ب) دو گره 3 و 2 چنین حالتی ندارند.



حالت (ب) یک مشبکه را معرفی نمی‌نماید زیرا مجموعه $\{2, 3\}$ دارای $LUB = 6$ می‌باشد ولی GLB ندارد.

نکته: دو شبکه دوگان یکدیگر دارای HD های با اختلاف 180° دوران می‌باشند.



شبکه دوگان

تست‌ها

۱- کدام عبارت در مورد مجموعه‌ها صحیح نیست؟

- (1) مجموعه مرجع می‌تواند نامتناهی باشد.
- (2) شمارش کلیه اعضای مجموعه مکمل یک مجموعه متناهی همواره ممکن نیست.
- (3) اگر مجموعه A زیر مجموعه B باشد، حاصل تفاضل $A-B$ یک مجموعه تهی است.
- (4) اگر اشتراک دو مجموعه A, B و اشتراک دو مجموعه A, C مساوی باشند، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌های C, B مساوی هستند.

۲- روابط R, S به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$aRb \leftrightarrow a \equiv b \pmod{6}$$

$$aSb \leftrightarrow a \equiv b \pmod{9}$$

کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

$$a(R \cap S)b \leftrightarrow a \equiv b \pmod{3} \quad (2)$$

$$a(R \cup S)b \leftrightarrow a \equiv b \pmod{3} \quad (1)$$

$$a(R \circ S)b \leftrightarrow a \equiv b \pmod{3} \quad (4)$$

$$a(R \cap S)^+b \leftrightarrow a \equiv b \pmod{3} \quad (3)$$

۳- سه مجموعه A, B, C هر یک دارای ۱۲ عضو هستند. از این اعضا ۸ عضو به هر دو مجموعه‌ی A, B ، ۹ عضو به هر دو مجموعه‌ی A, C ، ۶ عضو به هر دو مجموعه‌ی B, C و ۵ عضو به هر سه مجموعه‌ی A, B, C تعلق دارند. در این صورت با Δ معرف تفاضل متقارن مجموعه‌ای، اعداد اعضای مجموعه‌ی $\Delta(A \cap B \cap C)$ برابر است با:

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7

۴- فرض کنید $A, B \subseteq X, X = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ به طوری که $|A| = 5, |B| = 7$ و $A \cap B = \emptyset$ چند زیر مجموعه از X ، مانند C می‌توان یافت به طوری که $C \cap A \neq \emptyset, C \cap B \neq \emptyset$ ؟

- (1) 93 (2) 96 (3) 248 (4) 256

۵- فرض کنید A یک مجموعه متناهی و R, S دو رابطه هم‌ارزی تعریف شده در A باشند. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

- (1) $R \cap S$ یک رابطه هم‌ارزی است ولی $R \cup S$ الزاماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.
- (2) $R \cup S$ یک رابطه هم‌ارزی است ولی $R \cap S$ الزاماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.
- (3) هم $R \cup S$ و هم $R \cap S$ هر دو رابطه هم‌ارزی هستند.
- (4) هیچ یک از روابط $R \cup S, R \cap S$ الزاماً روابط هم‌ارزی نیستند.
- ۶- اگر R, S دو رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشند، آنگاه رابطه‌ی $R \cap S$:

- (1) هم‌ارزی است. (2) پاره ترتیبی (جزئی مرتب) است.



(3) تنها ویژگی‌های تقارن و ترایابی را دارد. (4) تنها ویژگی‌های پاد تقارن و ترایابی را دارد.

۷- کدام یک از روابط زیر یک رابطه هم‌ارزی است؟

(1) اگر X مجموعه مردان تهرانی باشد، به ازای هر $x, y \in X$ ، xRy نمایانگر نسبت « x بردار y است» می‌باشد.

(2) $\{(a, b) \mid a, b \in N, \min(a, b) \text{ بخش‌پذیر باشد و } N = \{1, 2, K\}\}$

(3) $\{((x_1, x_2), (x_3, x_4)) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z, x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$

(4) $\{((x_1, x_2), (x_3, x_4)) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z, x_1 + x_4 = x_2 + x_3\}$

۸- مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ مفروض است. چند رابطه روی A وجود دارد، به طوری که خواص پادمتقارن و بازتابی (هر

دو) را دارا باشد؟

(4) 3^8

(3) 3^7

(2) 3^6

(1) 3^5

۹- سه رابطه زیر روی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ در نظر بگیرید.

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$

$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

رابطه تهی $Q =$

با در نظر گرفتن خواص antisymmetric ، transitive ، symmetric و reflexive کدام گزینه صحیح است؟

(1) رابطه Q تمام خواص فوق‌الذکر را دارا است.

(2) روابط Q ، S ، R همگی symmetric هستند.

(3) هیچ‌کدام هر دو خاصیت reflexive و antisymmetric را با هم ندارند.

(4) هر کدام از روابط Q ، S ، R حداقل سه خاصیت از چهار خاصیت فوق‌الذکر را داراست.

۱۰- فرض کنید $S = \{1, 2, K, 20\}$ یک رابطه Equivalence روی این مجموعه تعریف شده به شکل زیر است.

$x \equiv y \pmod{5}$ یعنی $5 \mid x - y$ را تقسیم می‌کند. کدام گزینه partition مجموعه S به وسیله رابطه R می‌باشد؟

(1) $\{1, 6, 11\}, \{2, 7, 12\}, \{3, 8, 13\}, \{4, 9, 14\}, \{5, 10, 15\}$

(2) $\{6, 11, 16\}, \{7, 12, 17\}, \{8, 13, 18\}, \{9, 14, 19\}, \{10, 15, 20\}$

(3) $\{1, 6, 11, 16\}, \{2, 7, 12, 17\}, \{3, 8, 13, 18\}, \{4, 9, 14, 19\}, \{5, 10, 15, 20\}$

(4) $\{2, 6, 11, 16\}, \{1, 7, 12, 17\}, \{4, 8, 13, 18\}, \{3, 9, 14, 19\}, \{5, 10, 15, 20\}$

۱۱- فرض کنید A یک مجموعه غیر تهی و $R \subseteq A \times A$ یک رابطه دو دویی تهی باشد. $(R = \emptyset)$ کدام یک از گزاره‌های

زیر نادرست است؟

(2) R یک رابطه تراگذری است.

(1) R یک رابطه انعکاسی است.

(4) R یک رابطه ضد متقارن است.

(3) R یک رابطه متقارن است.

۱۲- فرض کنید R_1, R_2 دو رابطه بازتابی و متقارن روی مجموعه A باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟

$$(1) R_1 \subseteq R_1^2$$

$$(2) R_1 \Delta R_2 \text{ متقارن نیست.}$$

$$(3) \overline{R_1} \text{ متقارن است.}$$

$$(4) R_1 \Delta R_2 \text{ بازتابی نیست } (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$$

۱۳- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

$$(1) \text{ اگر } R, S \text{ روابط هم‌ارزی باشند آنگاه } R \cup S \text{ الزاماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.}$$

$$(2) \text{ اگر } R \text{ یک رابطه از } A \text{ به } A, S, B \text{ به } T, \text{ دو رابطه از } B \text{ به } C \text{ باشند آنگاه } (S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$$(3) \text{ اگر } R \text{ یک رابطه از } A \text{ به } A, S, B \text{ به } T, \text{ دو رابطه از } B \text{ به } C \text{ باشند آنگاه } (S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

$$(4) \text{ اگر } R, S \text{ دو رابطه در } A \text{ باشند به ازای هر } n \geq 1 \text{ داریم } (R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$$

۱۴- چه تعداد رابطه هم‌ارزی روی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ وجود دارد که دقیقاً دو کلاس هم‌ارزی با اندازه ۳ داشته باشد؟

$$(1) \frac{1}{2} \binom{6}{3} \quad (2) \frac{1}{3} \binom{6}{2} \quad (3) \binom{6}{3} \quad (4) \frac{1}{3} \binom{6}{3}$$

۱۵- در تست قبل، چه تعداد رابطه هم‌ارزی که دقیقاً دارای یک کلاس هم‌ارزی با اندازه ۳ می‌باشد وجود دارد؟

$$(1) \frac{1}{2} \binom{6}{3} \quad (2) \binom{6}{3} \quad (3) 4 \binom{6}{3} \quad (4) \frac{1}{3} \binom{6}{2}$$

۱۶- در تست قبل، چه تعداد رابطه هم‌ارزی که دارای یک کلاس هم‌ارزی با اندازه ۴ می‌باشد وجود دارد؟

$$(1) \frac{1}{2} \binom{6}{4} \quad (2) \binom{6}{4} \quad (3) 2 \binom{6}{4} \quad (4) \frac{1}{3} \binom{6}{4}$$

۱۷- برای $|A| = 7$ و $R \subseteq A \times A$ و $|R| = r$ ، به ازای کدامیک از مقادیر r رابطه R می‌تواند یک رابطه هم‌ارزی باشد؟

$$(1) r = 6, 7, 8 \quad (2) r = 7, 9, 11 \quad (3) r = 7, 8, 9 \quad (4) r = 7, 9, 10$$

۱۸- اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه مجموعه نسبی x نسبت به R را که با $R(x)$ نمایش می‌دهند به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$R(x) = \{y \mid y \in B, xRy\}$$

به طریق مشابه، اگر $A_1 \subseteq A$ باشد، داریم:

$$R(A_1) = \{y \in B \mid xRy, x \in A_1\}$$

کدام گزینه صحیح است؟

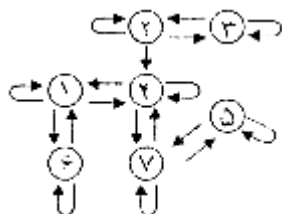
$$(1) R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$$

$$(2) \text{ اگر } A_1 \subseteq A_2 \text{ آنگاه } R(A_1) \subseteq R(A_2)$$

$$(3) R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$$

$$(4) \text{ هر سه}$$

۱۹- فرض کنید R یک رابطه دودویی (binary relation) در روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ با نمایش گرافیکی زیر است.



(1) R دارای خاصیت تراگذری (transitive) است.

(2) R دارای خاصیت تقارن (symmetric) است.

(3) R دارای خاصیت ضدتقارن (antisymmetric) است.

(4) R دارای خاصیت انعکاسی (reflexive) است.

۲۰- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و رابطه R به وسیله ماتریس رابطه زیر داده شده است:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(1) R یک رابطه غیربازتابی است (irreflexive) می‌باشد.

(2) R یک رابطه نامتقارن (asymmetric) می‌باشد.

(3) R یک رابطه پاد متقارن (antisymmetric) می‌باشد.

(4) R یک رابطه انتقالی (transitive) می‌باشد.

۲۱- کدام گزینه صحیح است؟

(1) $(\text{hog}) \circ f = \text{ho}(\text{gof})$

(2) $\text{fog} \neq \text{gof}$

(3) اگر $f : A \rightarrow B$ و $g : B \rightarrow C$ و gof یک به یک باشد، f نیز یک به یک می‌باشد.

(4) هر سه

۲۲- اگر $f : x \rightarrow y$ و $g : y \rightarrow z$ باشند کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(1) اگر gof یک به یک باشد آنگاه f یک به یک است.

(2) اگر f و g هر دو پوشا باشند آنگاه gof نیز پوشا است.

(3) اگر f و g هر دو یک به یک و پوشا باشند آنگاه gof نیز یک به یک و پوشا است.

(4) اگر gof یک به یک باشد آنگاه g یک به یک است.

۲۳- تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4\}$ که حداقل ۲ کلاس هم‌ارزی دارند برابر است با:

14 (4)

9 (3)

7 (2)

6 (1)

۲۴- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، چند تا از روابط موجود روی A رابطه هم‌ارزی بوده و در آنها اعداد ۱ و ۲ در کلاس عدد ۴ قرار دارند؟

- 48 (1) 52 (2) 60 (3) 72 (4)

۲۵- اگر $f: x \rightarrow y$ ، $g: y \rightarrow z$ دو تابع باشند و $g \circ f$ نیز یک تابع یک به یک باشد کدام یک از گفته‌های زیر صحیح است؟

- (1) f یک به یک بوده، g می‌تواند یک به یک باشد یا نباشد.
- (2) g یک به یک بوده و f می‌تواند یک به یک باشد یا نباشد.
- (3) هر دو باید یک به یک باشند.
- (4) لزومی ندارد که هر دو یک به یک باشند.

۲۶- مجموعه $A = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \phi\}, \{\phi\}, \phi\}$ مفروض است. مجموعه توانی A دارای چند زیر مجموعه است؟

- 4 (1) 2^4 (2) 2^3 (3) 2 (4)

۲۷- در یک استادیوم ورزشی، همه پرسپولیسی‌ها لباس قرمز پوشیده‌اند، همچنین همه افراد کمتر از ۳۰ سال آدامس می‌جویند و هرکس که آدامس می‌جود، پرسپولیسی است. اگر بدانیم همه کسانی که لباس قرمز به تن دارند، کمتر از ۳۰ سال سن دارند، آنگاه:

- (1) فقط پرسپولیسی‌ها در استادیوم هستند.
- (2) فقط افرادی با سن کمتر از 30 سال در استادیوم هستند.
- (3) همه در استادیوم آدامس می‌جویند.
- (4) همه پرسپولیسی‌ها سنی زیر 30 سال دارند.



پاسخنامه تست‌ها

1- گزینه (4) صحیح است.

$$A \cap B = A \cap C \not\Rightarrow B = C$$

مثال: $A = \{1, 2\}$

$$B = \{2, 3\}$$

$$A \cap B = A \cap C = \{2\}, \quad B \neq C$$

$$C = \{2, 4\}$$

2- گزینه (4) صحیح است.

$$R = \{(a, b) \mid a - b = 6k\}$$

$$S = \{(a, b) \mid a - b = 9k\}$$

$$R \cup S = \{(a, b) \mid a - b = 6k \text{ یا } a - b = 9k\}$$

$$R \cap S = \{(a, b) \mid a - b = 18k\}$$

$$(c, b) \in R, (a, c) \in S \text{ یعنی } (a, b) \in RoS$$

$$a - b = 3k \text{ در نتیجه } \begin{cases} a - c = 9k \\ c - b = 6k \end{cases} \text{ پس } c \equiv b, a \equiv c \pmod{9}$$

$$RoS = \{(a, b) \mid a - b = 3k\}$$

3- گزینه صحیح وجود ندارد.

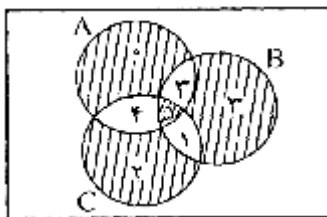
$$|A| = |B| = |C| = 12$$

$$|A \cap B| = 8$$

$$|A \cap C| = 9$$

$$|B \cap C| = 6$$

$$|A \cap B \cap C| = 5$$



$$|A \Delta (B \cap C)| = 5 + 0 + 3 + 2 = 10$$

ولی کلید گزینه 2 می‌باشد.

4- گزینه (3) صحیح است.

$$2^3 = 8 = \text{تعداد زیر مجموعه‌هایی که با } A, B \text{ اشتراک ندارند.}$$

$$2^8 = 256 = \text{تعداد زیر مجموعه‌هایی که با } B \text{ اشتراک ندارند.}$$

$$256 - 8 = 248 = \text{تعداد زیر مجموعه‌هایی که با } A \text{ اشتراک دارند و با } B \text{ اشتراک ندارند.}$$

5- گزینه (1) صحیح است.

مجموعه روابط هم‌ارزی نسبت به عمل اشتراک بسته است یعنی این که اشتراک دو رابطه هم‌ارزی، رابطه‌ای هم‌ارزی است. ولی مجموعه روابط هم‌ارزی نسبت به عمل اجتماع بسته نیست.

6- گزینه (1) صحیح است.

7- گزینه (4) صحیح است.

رابطه گزینه (1) خاصیت بازتابی و تعدی ندارد زیرا x با x برادر نیست (بازتاب نیست) و اگر x با y برادر و y با x برادر، آنگاه x با x برادر، نادرست است (تعدی نیست). رابطه گزینه‌های 2 و 3 خاصیت تعدی ندارند. البته گزینه 3 بازتاب هم نیست.

8- گزینه (2) صحیح است.

و در نتیجه $n = 4$ در اینجا $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ عضو برابر است. با n تعداد روابطی که هم بازتابی و هم پاد متقارن باشد، روی یک مجموعه با $3^{\frac{16-4}{2}} = 3^6$.

9- گزینه (3) صحیح است.

R متعدی و پاد متقارن، S بازتاب و متعدی و متقارن Q پادمتقارن، متعدی، متقارن.

10- گزینه (3) صحیح است.

همنهشتی به پیمانه 5 است، و اعضای کلاسها $5k + m$ هستند که $m = 0, 1, 2, 3, 4$.

11- گزینه (1) صحیح است.

12- گزینه (2) صحیح است.

چون R_1 متقارن است $\overline{R_1}$ نیز متقارن است (گزینه 3)

چون R_2, R_1 متقارن هستند $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ و در نتیجه $(R_1 \cap R_2) - (R_1 \cup R_2)$ نیز متقارن است (گزینه 2 نادرست).

چون R_1, R_2 بازتابی است $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ بازتاب است پس $R_1 \Delta R_2$ ضد بازتابی است (گزینه 4). گزینه 1 نیز صحیح است بررسی کنید.

13- گزینه (3) صحیح است.

$(S \cap T) \cup R \subseteq (S \cup R) \cap (T \cup R)$ می‌توان با یک مثال بررسی کرد.

$$S = \{(3, 2)\}$$

$$T = \{(1, 2)\}$$

$$R = \{(1, 3), (1, 1)\}$$

$$(S \cap T) \cup R = \{ \}$$

$$S \cup R = \{(1, 2)\}$$

$$T \cup R = \{(1, 2)\}$$

$$(S \cup R) \cap (T \cup R) = \{(1, 2)\}$$

14- گزینه (1) صحیح است.

به $\binom{6}{3}$ می‌توان 3 عضو برای یک کلاس انتخاب کرد و آن 3 عضو دیگر تشکیل کلاس دوم را می‌دهند ولی کل حالات باید در $\frac{1}{2}$

ضرب شود زیرا افزایندهایی مثل $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ و $\{d, e, f\}, \{a, b, c\}$ دو بار شمرده شده‌اند.

15- گزینه (3) صحیح است.



به $\binom{6}{3}$ حالت می توان 3 عضو انتخاب کرد مثلاً $\{a, b, c\}$. 3 عضو دیگر 4 حالت دارند:

$$(1) \{d\}\{e\}\{f\} \quad (2) \{d, e\}\{f\} \quad (3) \{d, f\}\{e\} \quad (4) \{e, f\}\{d\}$$

16- گزینه (3) صحیح است.

به $\binom{6}{4}$ حالت می توان 4 عضو برای کلاس انتخاب کرد. 2 عضو باقیمانده 2 حالت دارند.

17- گزینه (2) صحیح است.

چون مجموعه 7 عضوی است، بخاطر بازتاب حداقل 7 زوج می خواهد و بخاطر تقارن باید 2 زوج 2 زوج به آن اضافه شود.

18- گزینه (4) صحیح است.

تعاریف این تست را بخاطر بسپارید و گزینه ها را اثبات کنید.

19- گزینه (4) صحیح است.

(2و4) هست ولی (2و4) نیست پس متقارن نیست. (3و2) و (3و2) هستند پس پادمتقارن نیست.

(2و4) و (4و7) هستند ولی (2و7) نیست پس تعدی هم نیست.

20- گزینه (3) صحیح است.

رابطه ی انعکاسی نیست، زیرا عناصر قطر اصلی همگی مساوی یک نیستند و نیز نامنعکس نیست زیرا همگی عناصر روی قطر اصلی برابر صفر نیستند. از طرفی چون ماتریس رابطه متقارن نیست در نتیجه رابطه متقارن نیست و همچنین نامتقارن نیست زیرا بعضی از درایه های قطر اصلی ماتریس یک هستند. این رابطه متعدی هم نیست زیرا:

$$(2, 3) \in R \text{ and } (3, 4) \in R \Rightarrow (2, 4) \notin R$$

نکته: رابطه ای asymmetric است که اگر $(a, b) \in R$ آنگاه $(b, a) \notin R$ حتی اگر $a = b$.

21- گزینه (4) صحیح است.

22- گزینه (4) صحیح است.

23- گزینه (4) صحیح است.

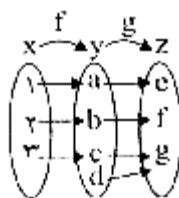
تعداد روابط هم ارزی (افزاهای) مجموعه 4 عضوی برابر 15 عدد می باشد که یکی از آنها $\{1, 2, 3, 4\}$ می باشد یعنی یک کلاس هم ارزی دارد و 14 افزاز دیگر حداقل 2 کلاس هم ارزی دارند.

24- گزینه (2) صحیح است.

تعداد افزاهای مجموعه 5 عضوی برابر 52 عدد می باشد. در این تست 1 و 2 و 4 را یک عضو فرض کنید، مجموعه 5 عضوی می شود.

25- گزینه (1) صحیح است.

اگر gof یک به یک باشد لازم نیست g یک به یک باشد. با مثال نشان می دهیم.



در این شکل، f یک به یک است ولی G یک به یک نیست، $g \circ f$ نیز یک به یک است:

$$g \circ f = \{(1, e)(2, f)(3, g)\}$$

26- گزینه (2) صحیح است.

$$A = \{\Phi, \{\Phi\}\}$$

$$|A| = 2 \Rightarrow |P(A)| = 4 \Rightarrow P(A) \text{ تعداد زیر مجموعه‌های } 2^4 = 16$$

27- گزینه (4) صحیح است.

پرسپولیسی‌ها
لباس قرمز پوشیده‌اند
کمتر از ۳۰ سال
آدامس می‌چوند

$$\left. \begin{array}{l} = A \quad A \subseteq B \\ = B \quad C \subseteq D \\ = C \quad D \subseteq A \\ = D \quad B \subseteq C \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = C = D$$

28- گزینه (4) صحیح است.

به عنوان مثال مجموعه‌های مقابل را در نظر بگیرید.

$$M = \{1, 2, K, 10\}$$

$$A \cap B = \Phi$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap C = \Phi$$

$$B = \{5, 6, 7, 8\}$$

گزینه 1 درست نیست

$$A \cap C = \{4\} \Rightarrow$$

$$C = \{4, 9, 10\}$$

برای نقض گزینه 2 کافیست $A = \{1, K, 5\}$, $B = \{6, K, 10\}$ را در نظر بگیرید.

برای نقض گزینه 3 کافیست $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید.

در گزینه 4، اگر $C = \Phi$ باشد حتماً باید $A \cup B = M$ باشد و اگر A , B اشتراک نداشته باشند، آنگاه A , B باید M را افراز کنند

که در این صورت $B' = A$, $A' = B$ خواهد بود که جدا از هم هستند.



تست‌های فصل

۱- در هر گزینه مجموعه A و یک رابطه R بر روی آن داده شده است. کدام یک از رابطه‌های داده شده یک رابطه

ترتیب جزئی (partial order) می‌باشد؟

(1) مجموعه A شامل تمام خطوط موجود در صفحه و xRy اگر و فقط اگر x با y موازی یا بر هم منطبق باشند.

$$(2) \quad R = \{(1,1), (2,2), (3,1), (1,3)\}, \quad A = \{1,2,3\}$$

(3) $A = \mathbb{Z}^+$ اگر و فقط اگر xRy اگر y را تقسیم کند.

$$(4) \quad xRy \iff A = \mathbb{Z}^+ \text{ اگر و فقط اگر } xy \text{ زوج باشد.}$$

۲- چند رابطه R روی A وجود دارد که ترتیب کامل باشد؟ $(|A| = n)$

$$(1) \quad n + n! \quad (2) \quad n! \quad (3) \quad (n-1)! \quad (4) \quad 2^{n^2}$$

۳- برای عدد صحیح و مثبت n ، D_n عبارت است از مجموعه با ترتیب جزئی که عناصر آن مجموعه تمامی مقسوم

علیه‌های عدد n و ترتیب جزئی هم، رابطه بخش‌پذیری است. با توجه به این تعریف کدام یک از عبارات زیر صحیح

است؟

$$(1) \quad D_{42} \text{ جبر بول است و } D_{45} \text{ نیست.}$$

$$(2) \quad D_{45} \text{ جبر بول است و } D_{42} \text{ نیست.}$$

$$(3) \quad \text{هیچ کدام جبر بول نیستند.} \quad (4) \quad \text{هر دو جبر بول هستند.}$$

۴- فرض کنید A مجموعه اعداد مثبت بوده $(\mathbb{Z}^+)$ و رابطه $\leq$ که روی مجموعه A رابطه ترتیب جزئی (partial order)

باشد، همچنین فرض نمایید A' مجموعه اعداد صحیح زوج مثبت بوده و رابطه $\leq$ نیز روی A' یک رابطه ترتیب جزئی

باشد. آنگاه:

$$(1) \quad \text{تابع } f(a) = 2a \text{ از } A \text{ به } A' \text{ یک ایزومورفیزم از } (A, \leq) \text{ به } (A', \leq) \text{ خواهد بود.}$$

$$(2) \quad \text{تابع } f(a) = 2a \text{ از } A' \text{ به } A \text{ یک ایزومورفیزم از } (A', \leq) \text{ به } (A, \leq) \text{ خواهد بود.}$$

$$(3) \quad \text{تابع } f(a) = 2a \text{ از } A \text{ به } A' \text{ یک ایزومورفیزم از } (A', \leq) \text{ به } (A, \leq) \text{ خواهد بود.}$$

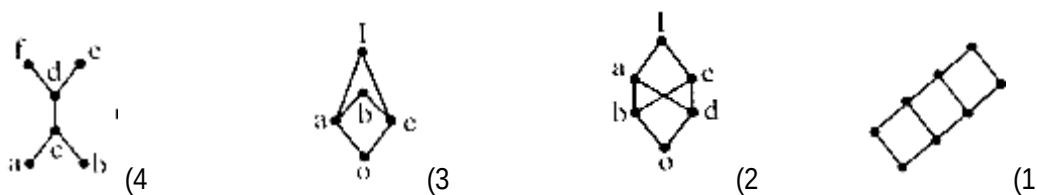
$$(4) \quad \text{تابع } f(a) = 2a \text{ از } A' \text{ به } A \text{ یک ایزومورفیزم از } (A', \leq) \text{ به } (A, \leq) \text{ خواهد بود.}$$

۵- فرض کنید A مجموعه اعداد صحیح مثبت $(\mathbb{Z}^+)$ بوده و رابطه $\leq$ روی A رابطه ترتیب جزئی باشد، همچنین فرض

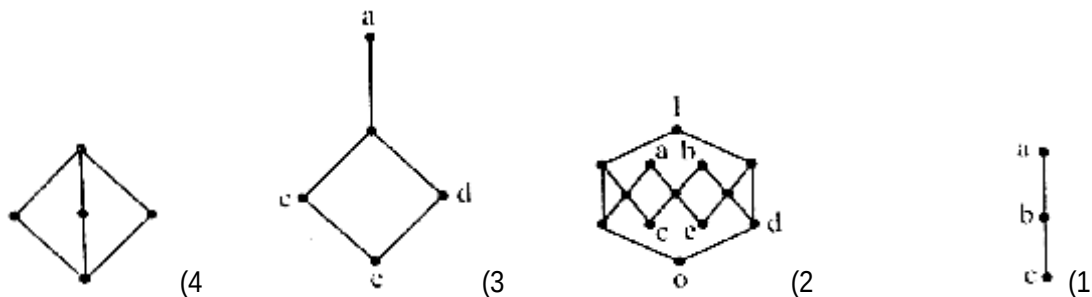
کنید A' مجموعه اعداد صحیح زوج مثبت و رابطه $\leq'$ روی A' یک رابطه ترتیب جزئی باشد. آنگاه:

- (1) تابع $f(x) = kx$ از A به A' ایزومورفیسم از $(A, \leq)$ به $(A', \leq')$ است.
- (2) تابع $f(x) = kx$ از A' به A ایزومورفیسم از $(A', \leq')$ به $(A, \leq)$ است.
- (3) تابع $f(x) = kx$ از A به A' ایزومورفیسم از $(A, \leq)$ به $(A', \leq')$ نیست.
- (4) تابع $f(x) = kx$ از A' به A ایزومورفیسم از $(A', \leq')$ به $(A, \leq)$ نیست.

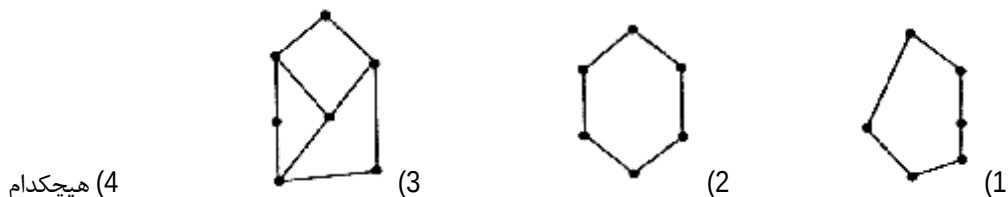
۶- چهار مجموعه با ترتیب جزئی به وسیله Hasse diagram های زیر نشان داده شده‌اند. کدام یک شبکه است؟



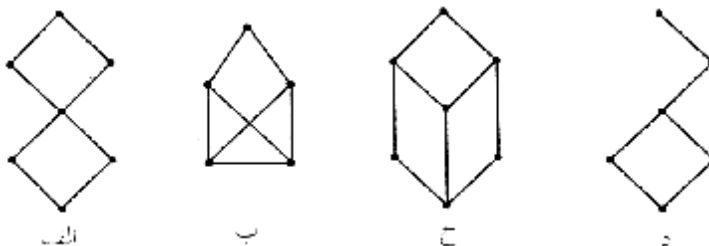
۷- از Hasse Diagram های داده شده کدام یک شبکه نمی‌باشد؟



۸- کدام شبکه زیر پخش پذیر است؟



۹- اشکال مقابل نمودار هاس (Hasse Diagram) چند مجموعه‌ی پاره ترتیبی را نشان می‌دهند. کدام یک از آنها نشانگر یک شبکه هستند؟



(2) فقط (الف) و (ج)

(1) فقط (ج)

(4) فقط (الف) و (ج) و (د)

(3) (الف) و (ب) و (ج) و (د)

۱۰- در شبکه‌ی $\leq$ و $<$ اگر برای $a, b, c \in P$ داشته باشیم $c \leq b, c \leq a$ کدام یک از گفته‌های زیر صحیح است؟

(4) $a \oplus b \leq c$

(3) $c \leq a \oplus b$

(2) $c * b \leq c$

(1) $c \leq a * b$

۱۱- کدام گزاره درست است؟

(1) اگر (A, R) مشبکه و A متناهی باشد، (A, R) کوچکترین عنصر دارد.

(2) اگر (A, R) مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد، عنصری مینیمال دارد.

(3) اگر (A, R) مشبکه باشد، آنگاه مجموعه‌ای تماماً مرتب است.

(4) اگر (A, R) مجموعه‌ای جزئاً مرتب بوده ولی تماماً مرتب نباشد و $\phi \neq B \subset A$ آنگاه $(B, B \times B \cap R)$ مجموعه‌ای تماماً مرتب نیست.

۱۲- تعداد روابط ترتیب جزئی روی مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ که دارای بزرگترین و کوچکترین عضو هستند برابر است با:

(4) $7 \times 5!$

(3) $5 \times 5!$

(2) $4 \times 5!$

(1) $3 \times 5!$

۱۳- کدام گزاره نادرست است؟

(1) اگر A که یک مجموعه مرتب با ترتیب کلی است فقط یک عضو ماکسیمال a داشته باشد، آنگاه a بزرگترین عضو A است.

(2) اگر A که یک مجموعه مرتب با ترتیب جزئی است فقط یک عضو ماکسیمال a داشته باشد، آنگاه a بزرگترین عضو A است.

(3) مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 8 < x^3 < 15\}$ که در آن Q مجموعه اعداد گویاست بزرگترین کران پایین دارد ولی کوچکترین کران بالا ندارد.

(4) اگر A که مجموعه‌ای متناهی و مرتب با ترتیب جزئی است فقط یک عضو ماکسیمال a داشته باشد، آنگاه a بزرگترین عضو A است.

۱۴- در جبر بولی $B_0 = [B, *, 0, 1]$ ، به ازای هر $a \in B$

(2) $a * 0 = 1$, $a + 1 = 1$

(1) $a * a = a$, $a + a = a$

(4) $a * 0 = a$, $a + 1 = 1$

(3) $a * a = 0$, $a + a = a$

۱۵- اگر $A = \{a, b, c\}$ و $P(A)$ مجموعه‌ی قوه‌ی A باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر یک زیر شبکه‌ی $\langle P(A), \subseteq \rangle$ نیست؟

- (1) $\langle \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}, \subseteq \rangle$
 (2) $\langle \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \subseteq \rangle$
 (3) $\langle \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq \rangle$
 (4) $\langle \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq \rangle$

۱۶- کدام گزینه رابطه ترتیب نیست؟

- (1) رابطه $\subseteq$ روی $P(A)$ (مجموعه توانی A)
 (2) رابطه $\leq$ روی $\mathbb{Z}$
 (3) رابطه $|$ روی $\mathbb{Z}$
 (4) رابطه R که به این صورت تعریف می‌شود: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : aRb \Leftrightarrow b = a^r (\exists r \in \mathbb{Z}^+)$

۱۷- کدام گزینه با رابطه بخش‌پذیری یک ترتیب کلی (خطی) است؟

- (1) $\{3, 5, 15\}$ (2) $\mathbb{N}$ (3) $\{24, 2, 6\}$ (4) $\{1, 2, 3\}$



پاسخنامه تست‌ها

1- گزینه (3) صحیح است.

رابطه گزینه‌های 1 و 2 و 4 خاصیت پاد تقارنی ندارند. رابطه گزینه (2) خاصیت انعکاسی نیز ندارد زیرا شامل زوج مرتب (3 و 3) نیست. توجه: رابطه‌ای ترتیب است که سه خاصیت بازتاب، پاد تقارن و تعدی داشته باشد.

2- گزینه (2) صحیح است.

ترتیب کامل، زنجیر است و تعداد زنجیرهای n عضوی $n!$ می‌باشد.

3- گزینه (1) صحیح است.

$$45 = 3^2 \times 5 \quad 42 = 7 \times 3 \times 2$$

4- گزینه (1) صحیح است.

این تست غلط است و 4 نیز صحیح است.

5- گزینه (4) صحیح است.

گزینه 1 به ازای $k = 2$ صحیح است ولی به ازای $k \neq 2$ صحیح نیست.

گزینه 2 به ازای هیچ مقدار k صحیح نیست.

گزینه 3 به ازای $k = 2$ صحیح نیست.

6- گزینه (1) صحیح است.

در گزینه 2، $a \wedge c, b \vee d$ وجود ندارد، در گزینه 3، $a \vee c, b \wedge I, b \vee I$ وجود ندارد و در گزینه 4، $f \vee e, a \wedge b$ وجود ندارد.

7- گزینه (2) صحیح است.

$a \vee b$ وجود ندارد.

8- گزینه (4) صحیح است.

بررسی کنید.

9- گزینه (4) صحیح است.

10- گزینه (1 و 3) صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} c \leq a \\ c \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow c \leq a \wedge b$$

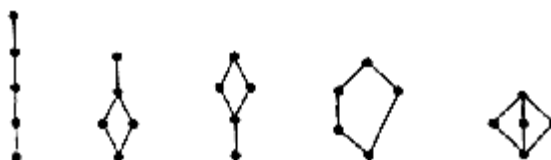
چون $c \leq a \wedge b$ می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت که $c \leq a \vee b$ زیرا همیشه $a \wedge b \leq a \vee b$ می‌باشد.

11- گزینه (1) صحیح است.

هر شبکه متناهی مینیمم و ماکسیمم دارد. هر پاست متناهی مینیمال و ماکسیمال دارد.

12- گزینه (2) صحیح است.

نمودار هاس چنین روابطی به شکل‌های زیر است:



شکل 1 دارای 5 حالت است. شکل 2 و 3 دوگان هم هستند و هر دو با هم 4 حالت دارند شکل 4 دارای 5 حالت است و شکل

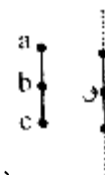
5 دارای 3 حالت پس

$$5! + 4! + 5! + 3!$$

با هیچ گزینه‌ای سازگار نیست.

13- گزینه (2) صحیح است.

گزینه 2 نادرست است زیرا پاست اگر نامحدود باشد ممکن است یک ماکسیمال داشته باشد ولی ماکسیمم نداشته باشد مثلاً



دارای ماکسیمال a است ولی ماکسیمم ندارد.

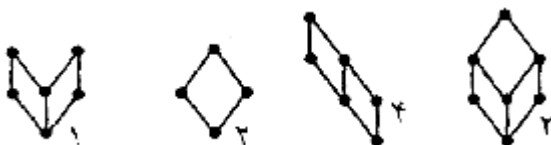
گزینه 3 صحیح است زیرا $8 < x^3 < 15$ پس $2 < x < \sqrt[3]{15}$ بزرگترین کران پایین A برابر 2 است ولی کوچکترین کران بالا وجود

ندارد. دقت کنید $\sqrt[3]{15}$ گویا نیست.

14- گزینه (1) صحیح است.

15- گزینه (1) صحیح است.

نمودار هاس هر 4 گزینه به شکل زیر است:



البته با تعریفی که در کتاب برای زیر شبکه گفته شده تست غلط است! ولی در بعضی منابع، زیر شبکه صرفاً زیر مجموعه‌ای است

از یک شبکه که خود شبکه باشد که در این صورت تست درست است.

16- گزینه (3) صحیح است.

رابطه عاد کردن روی Z پاد متقارن نیست ولی روی N پاد متقارن هست.

17- گزینه (3) صحیح است.



2 عدد 6 و 6 عدد 24 را می‌شمارد پس هاس آن می‌باشد.



مجموعه تست

۱- روی مجموعه X با عضو متمایز، چند عمل دوتایی می توان تعریف کرد؟

- (1) n^n (2) $n \times n$ (3) $(n)^{n^2}$ (4) $2^{n \times n}$

۲- مجموعه اعداد صحیح مثبت N و اپراتور $*$ به معنی کوچکترین مضرب مشترک را در نظر بگیرید، کدام گزینه صحیح است؟

(1) $162 = 18 * 9$

(2) عنصر Identity مربوط به $*$ برابر صفر است.

(3) $(N, *)$ یک semigroup بوده و commutative نیست.

(4) تنها عضوی از مجموعه N که Inverse دارد 1 است.

۳- دو سیستم جبری $\langle S, \Delta, < G, * \rangle$ به وسیله جداول زیر تعریف شده اند. نسبت دو سیستم جبری را مشخص کنید. سیستم جبری را مشخص کنید.

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Δ	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

(1) $\langle G, * \rangle$ سایه همومورفیک نیم گروه $\langle S, \Delta \rangle$ است.

(2) $\langle G, * \rangle$ سایه منومرفیک $\langle S, \Delta \rangle$ است.

(3) $\langle G, * \rangle$ سایه ایزومورفیک نیم گروه $\langle S, \Delta \rangle$ است.

(4) $\langle G, * \rangle$ سایه اپی مرفیک تکوار $\langle S, \Delta \rangle$ است.

۴- $G = \{0, 1, 2, 3\}$

f	0	1	2	3
0	1	2	3	0
1	2	3	0	1
2	3	0	1	2
3	0	1	2	3

(1) (G, F) یک نیم گروه است، ولی مونوئید نیست.

(2) (G, F) یک مونوئید است ولی گروه نیست.

(3) (G, F) یک گروه است.

(4) (G, F) یک نیم گروه است.

۵- عضو $G \in G$ مرکز گروه $(G, *)$ نامیده می‌شود اگر برای هر G داشته باشیم: $c = c * x$ یک مرکز گروه

تقارن‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع عبارت است:

- (1) دوران حول مرکز مثلث به اندازه 60 درجه
- (2) دوران حول مرکز مثلث به اندازه 90 درجه
- (3) دوران حول مرکز مثلث به اندازه 90 درجه
- (4) دوران حول مرکز مثلث به اندازه 180 درجه

۶- فرض کنید I مجموعه‌ی اعداد صحیح و $\mathbb{Z}_m$ مجموعه‌ی کلاسهای هم‌ارزی تولید شده به وسیله رابطه هم‌ارزی

«همنهشت به پیمانه m » به ازای هر عدد صحیح مثبت m باشد، به ازای $[i], [j] \in \mathbb{Z}_m$ تعریف می‌کنیم (عملیات $+$ و $\times$

روی I تعریف شده‌اند)

$$[i] +_m [j] = [(i + j) \pmod{m}] \text{ (به پیمانه‌ی } m \text{)}$$

$$[i] \times_m [j] = [(i \times j) \pmod{m}] \text{ (به پیمانه‌ی } m \text{)}$$

کدام گزینه درست است؟

$$(1) \quad \langle \mathbb{Z}_m, \times_m \rangle \text{ گروه است.} \quad (2) \quad \langle \mathbb{Z}_m, +_m \rangle \text{ تکواره نیست.}$$

$$(3) \quad \langle \mathbb{Z}_m, +_m \rangle \text{ گروه است.} \quad (4) \quad \langle \mathbb{Z}_m, \times_m \rangle \text{ تکواره نیست.}$$

۷- فرض کنید $\subseteq$ نمایشگر زیر ساخت باشد. کدام یک درست نیست؟

$$(1) \quad (\mathbb{N}, <) \subseteq (\mathbb{Z}, <) \quad (2) \quad (\mathbb{N}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +) \quad (3) \quad (\mathbb{N}, -) \subseteq (\mathbb{Z}, -) \quad (4) \quad (\mathbb{N}, |) \subseteq (\mathbb{Z}, |)$$



پاسخنامه

1- گزینه (3) صحیح است.

به متن درس رجوع کنید.

2- گزینه (4) صحیح است.

ک.م.م 18 و 9 برابر 18 است (گزینه 1 غلط). عنصر همانی 1 است (گزینه 2 غلط) $(N, *)$ جابجایی دارد (گزینه 3 غلط)

3- گزینه (3) صحیح است.

کافیست تابع $f: G \rightarrow S$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$f(1) = c, \quad f(2) = d, \quad d = (3) = a, \quad f(4) = b$$

در این صورت:

$$f(2 * 3) = f(4) = b$$

$$f(2) \Delta f(3) = d \Delta a = b$$

می‌توان نشان داد $\forall x, y \in G: f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$ پس f همومورفیسم است و چون یک به یک پوشا است، ایزومورفیسم است.

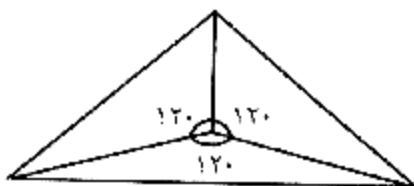
در ضمن (S, Δ) , $(G, *)$ شرکت‌پذیر هستند پس نیم‌گروه است.

4- گزینه (3) صحیح است.

عضو خنثی 3 است. شرکت‌پذیر است و هر عضو وارون دارد پس گروه است.

5- گزینه (3) صحیح است.

لازم به ذکر است، مرکز مثلث، محل برخورد میانه‌هاست.



6- گزینه (3) صحیح است.

$(Z_m, +)$ گروه آبدی است. $(Z_m, \times)$ تکوار است.

7- گزینه (3) صحیح است.

$(N, -)$ اصلاً سیستم جبری نیست.

فصل چهارم: روابط بازگشتی

یک دنباله را به روش‌های متنوع می‌توان تعریف کرد:

- 1- نوشتن چندین جمله اول به امید رسیدن به یک الگو با فرمول عمومی (ابهام‌انگیز است).
 - 2- ارائه یک فرمول صریح برای جمله n ام
 - 3- استفاده از مفاهیم بازگشتی
- روش سوم اولاً به یک معادله به نام رابطه‌ی بازگشتی نیاز دارد که جمله n ام را به چند جمله قبلی مرتبط می‌کند و ثانیاً مقادیر چند جمله‌ی اول را می‌خواهد که به آنها شرایط مرزی می‌گوییم. (دنباله فیبوناتچی)
- **تعریف:** دنباله به صورت بازگشتی معادل به کار بردن استقراری ریاضی است. شرایط مرزی مشابه پایه استقرار و رابط بازگشتی مشابه مرحله استقرار است.

تعریف: یک رابطه بازگشتی فرمولی است که جمله n ام را به K جمله پیشین مرتبط می‌سازد که $K \geq 1, n \leq K$. شرایط مرزی ارائه مقادیر برای $a_0, a_1, \dots, a_{K-1}$ است. K مرتبه‌ی رابطه بازگشتی می‌باشد.

- یک رابطه بازگشتی با شرایط مرزی متفاوت دنباله‌های متعدد تولید می‌کند.

حل یک مسأله به صورت بازگشتی به معنای پیدا کردن راهی برای شکستن مسأله مزبور به زیر مسائلی است که صورت ظاهری آنها مشابه به مسئله اولیه است. این روند تکرار می‌شود تا آخرین زیر مسأله به سادگی حل می‌شود. گام بعدی تلفیق و ترکیب جواب‌های حاصل و به دست آوردن جواب کلی است. این فرض که زیر مسائل کوچکتر قبلاً حل شده‌اند به تفکر بازگشتی معروف است. این سنت مشابه فرض استقرار در اثبات قضایاست.

مثال: برج هانوی - بنا به افسانه‌ها یک معبد هندی دارای سه ستون الماس است که خداوند 64 حلقه طلا به ترتیب نزولی قطرشان از پایین به بالا روی آنها قرار داده. راهبه‌ها باید این حلقه‌ها را به ستون آخر منتقل کنند و هرگز نباید یک حلقه بزرگتر روی کوچکتر قرار گیرد. اگر با اتمام کار، عمر جهان پایان یابد، عمر جهان چقدر است؟

حلقه به ستون دوم پیدا کرده‌ایم. حال باید حلقه‌ی آخر را $n-1$ راه حل بازگشتی اینچنین است که فرض می‌کنیم راهی برای انتقال n حداقل انتقال‌های لازم برای جابه‌جایی $a_n \geq 1$ به ستون سوم اضافه کرد و سپس 1- حلقه را به ستون سوم رساند حال اگر به B حلقه از $n-1$ انتقال و برای انتقال B, a_{n-1} به A حلقه از $n-1$ حلقه از یک ستون به ستون دیگر باشد می‌بینیم برای انتقال است.
$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$
 پس رابطه بازگشتی $a_1 = 1$ و شرط مرزی $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ انتقال نیاز است پس a_{n-1}, C

مثال: دنباله فیبوناتچی - این رابطه منصوب به لئوناردو پیزا ریاضیدان قرون وسطایی است و بر این اساس است که: در ابتدای سال یک جفت خرگوش داریم. هر جفت خرگوش در ماه اول تولد صاحب بچه نمی‌شوند ولی در ماه‌های دیگر یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند و هیچ خرگوشی از بین نمی‌رود. تعداد خرگوش‌های در انتهای سال؟

تعداد خرگوش‌های متولد شده ماه n برابر تعداد خرگوش‌های ماه $n-2$ است زیرا خرگوش ماه $n-1$ هنوز تولید مثل نکرده‌اند پس اگر F_0 تعداد خرگوش‌های ماه n باشد، $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ، $f_1 = 1, F_0 = 1$

مثال: مجموعه اعداد دو دویی n رقمی فاقد الگوی 11 چند عضو دارد؟

می‌دانیم $S_1 = 2S_0 = 0$ و می‌دانیم که برای ساختن اعداد u رقمی باید به اعداد $1-u$ رقمی U یا 1 اضافه کنیم. پس همان تعداد $1-u$ رقمی عدد داریم ولی در اضافه کردن 1 باید مواظب باشیم الگوی 11 ایجاد نشود، بنابراین

$$n \geq 2, S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

مثال: تعداد افزایندهای ممکن است یک مجموعه n عضوی به 7 زیر مجموعه‌ی غیرتهی که با S_{n-1} گشتان می‌دهیم را حساب کنید. اعداد $S_{n,r}$ به اعداد استرلینگ نوع دوم معروف هستند.

این مجموعه را می‌توان به دو گروه شامل $\{x_n\}$ و فاقد $\{x_n\}$ تقسیم کرد. تعداد افزایندهای $S_{n,r}$ که شامل $\{x_n\}$ باشند که با تعداد $S_{n-1,r-1}$ برابر است اما تعداد گروه دوم برابر $rS_{n-1,r}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} S_{n,r} = S_{n-1,r-1} + rS_{n-1,r} & 1 \leq r \leq n \\ S_{n,r} = 1, S_{n,n} = 1 & n \geq 1 \end{cases}$$

گاهی از اوقات، بویژه وقتی به جملات با اندیس بزرگتر نیاز داریم یا خواص دنباله را می‌خواهیم به فرمول صریح نیاز داریم که آن را جواب رابطه بازگشتی گوئیم.

حال روابط بازگشتی با استفاده از جایگذاری با تکرار:

این روش برای حل روابط بازگشتی مرتبه اول بسیار مناسب است.

مثال:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + f(x) & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \rightarrow a_n = a_0 + \sum_{K=1}^n f(K)$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + f(x) & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \rightarrow a_n = a_0 + \sum_{K=1}^n f(K)$$

$$a_1 = a_0 + f(1), a_2 = a_0 + f(1) + f(2) \quad K$$

$$\begin{cases} a_n = ea_{n-1} + f(x) & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \rightarrow a_n = e^n a_0 + \sum_{K=1}^n e^{K-K} f(K)$$

$$a_f ea_0 + f(1), a_2 - c2a_0 + cf(1) + f(2) \quad K$$

مثال:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \rightarrow c = 3, f(n) = 1$$

$$\rightarrow a_n = \sum_{K=1}^n 2^{n-K} = 2^{K-1} + K + 2^{06} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

مثال مرتب‌سازی جایی را در نظر بگیرید، تعداد مقایسه‌های لازم را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \rightarrow c = 0, f(n) = n-1$$

$$\rightarrow a_n = \sum_{K=1}^n (K-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

K_n شکل است که از ترسیم یک n ضلعی با تمام اقطارش حاصل شده (گراف کامل) تعداد یالهای آن از رابطه‌ی

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \quad \text{بدست می‌آید.}$$

تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب‌سازی ادغامی: در این روش ابتدا آرایه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را با تقسیم‌های متوالی به قسمت‌های دیگر تقسیم می‌کنیم. سپس مرتب‌سازی در راه بازگشت صورت می‌پذیرد و با هم ادغام می‌شوند.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + n - 1 & n \geq 2, n = 2^m \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$2a_{\frac{n}{2}} = 2 \left[2a_{\frac{n}{4}} + \frac{n}{2} - 1 \right] = 2^2 a_{\frac{n}{4}} + n - 2$$

$$2^2 a_{\frac{n}{4}} = 2^2 \left[2a_{\frac{n}{8}} + \frac{n}{4} - 1 \right] = 2^3 a_{\frac{n}{8}} + n - 2^2$$

$$\left. \begin{aligned} a_n - 2a_{\frac{n}{2}} &= n - 2^0 \\ \rightarrow 2a_{\frac{n}{2}} - 2^2 a_{\frac{n}{4}} &= n - 2^1 \\ 2^{m-1} a_{\frac{n}{2^{m-1}}} - 2^m a_{\frac{n}{2^m}} &= n - 2^{m-1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \pm &a_n = (n - 2^0) + (n - 2^1) + \mathbf{K} + (n - 2^{m-1}) \\ &= mn - (n^0 + 2^1 + \mathbf{K} + 2^{m-1}) = mn - (2^m - 1) \\ &= mn - u + 1m = \log \frac{n}{2} > a_n \log \frac{n}{2} - n + 1 \end{aligned}$$

رابطه بازگشتی حالت خاصی از روابط تقسیم و حل است. این روابط برای تجزیه و تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی به کار می‌روند.

فرمول عمومی یک رابطه‌ی تقسیم و حل به صورت $a_n = ca_{n/d} + f(n)$ است که d, c ثابت و $f(x)$ تابعی از n است.



حل روابط بازگشتی با استفاده از معادله مشخصه:

تعریف: اگر $c_n \neq 0, c_{n-1} \neq 0, K, c_{n-K} \neq 0$ اعداد حقیقی و a_n یک دنباله باشد آنگاه
 $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-K} a_{n-K} = f(n), n \geq K$ یک رابطه بازگشتی از مرتبه K است. اگر $f(n) = 0, \forall n \geq 0$ رابطه بازگشتی را همگن (متجانس) و در غیر این صورت ناهمگن می‌گوییم.

روابط بازگشتی همگن مرتبه دو: $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$

$c_n = cr^n$ در نظر گرفته می‌شود پس داریم $c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$ به این معادله، معادله مشخصه می‌گوییم. که اگر r_1, r_2 ریشه‌های آن باشند سه حالت داریم:

$$r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$r_1 = r_2 = r \quad (2)$$

$$r_1 \neq r_2 \quad (3)$$

(1) در حالت اول جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ که c_1, c_2 ثابت‌های دلخواهی هستند که با دانستن شرایط مرزی مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 & n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

$$r^2 + r - 6 = 0 \rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \rightarrow r_1 = 2, r_2 = -3$$
 معادله مشخصه

$$\rightarrow a_n = c_1 (2)^n + c_2 (-3)^n \rightarrow \begin{cases} a_0 = c_1 2^0 + c_2 (-3)^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = c_1 2^1 + c_2 (-3)^1 = 2c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow a_n = 2^n$$

مثال عبارت محاسباتی مجاز بدون پرانتز شامل $0, +90, *$ را در نظر می‌گیریم. اگر a_n تعداد این محاسبات مجاز باشد بدیهی است:

$$a_n = 10a_{n-1} + 2qa_{n-2}, n \geq 3, a_2 = 100, a_1 = 10$$

در عبارت $n-1$ علامتی فقط یک عدد می‌توان اضافه کرد، اما به $n-2$ علامتی‌ها می‌توان یکی از 29 علامت $0, +, q, K, *, q, +, q, K$ اضافه کرد.

$$\begin{cases} a_n = 10a_{n-1} + 2qa_{n-2} & n \geq 3 \\ a_1 = 10, a_2 = 100 \end{cases}$$

$$\rightarrow r^2 - 10r - 2q = 0 \rightarrow r_1, r_2 = 5 \pm 3\sqrt{6} \rightarrow a_n = \frac{5}{3\sqrt{6}} \left[(5+3\sqrt{6})^n - (5-3\sqrt{6})^n \right]$$

(2) در حالتی که ریشه‌های موهومی‌اند باز جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ است که c_1, c_2 موهومی‌اند. در عین حال وقتی ضرایب رابطه بازگشتی حقیقی است، جواب عمومی حاصل نیز حقیقی است.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$z = x + iy \rightarrow 2 = r(\cos \theta + i \sin \theta), r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad n \geq 0$$

(3) در حالتی که معادله‌ی مشخصه دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2$ است، جواب عمومی به صورت $a_n = (c_1 + nc_2 - r^n)$ در

حالت عمومی، اگر $c_n a_n + c_{n-K} a_{n-K} = 0$ ، $c_n \neq 0$ ، $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_{n-K} \neq 0$ ، r یک ریشه تکراری با مرتبه m ، $z \leq m \leq K$ باشد. آن قسمت از جواب عمومی که مربوط به ریشه‌ی r است عبارت است از

$$A_{m-1} r^{m-1} + A_{m-2} r^{m-2} + \dots + A_1 r + A_0 (A_0 + A_1 n + K + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

$$\begin{cases} a_{n+3} - 3a_{n+2} - 4a_n, n \geq 0 \\ a_0 = 3, a_1 = 4, a_2 = 22 \end{cases} \rightarrow r^3 - 3r^2 + 4 = 0 \rightarrow r_1 = +r_2 = 2, r_3 = -1$$

$$\rightarrow a_n = (A_0 + A_1 n) 2^n + c(-1)^n$$

از جایگذاری شرایط مرزی داریم:

$$A_0 = 1, A_1 = 2, C = 2 \rightarrow a_n = (1 + 2n) 2^n + c(-1)^n$$

روابط بازگشتی ناهمگن خطی با ضرایب ثابت:

رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه K و با ضرایب ثابت $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-K} a_{n-K} = f(n)$ ، $n \geq K$ که $c_n \neq 0$ ، $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_{n-K} \neq 0$ ، $f(n)$ یک تابع غیر صفر است.

- رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه $2 \leq n \leftarrow 2$ ، $a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n)$ ، $c \neq 0$ ، a_n تابع غیر صفر.

جواب عمومی این رابطه به دو صورت $a_n^{(n)} a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن $a_n + ca_{n-1} + ba_{n-2} = 0$ است و $a_n^{(p)}$ یک جواب ویژه که بسته به $f(n)$ از راه‌های زیر بدست می‌آید:

(1) $f(n)$ حاصل جمعی از توابع ستون اول باشد $a_n^{(p)}$ هم حاصل جمع جملات متناظر در ستون دوم خواهد بود.

(2) $f(n)$ به صورت یکی از حالت‌های جدول باشد و جوابی برای رابطه بازگشتی همگن نباشد $a_n^{(p)}$ هم مثل ستون دوم است.

(3) وقتی یک از جمع‌وندهای تابع $f(n)$ مثل $f_1(n)$ جوابی برای رابطه بازگشتی همگن باشد یعنی $f_1(n) = cr^n$ یا

$f_1(n) = (c_1 + c_2 n) r^n$ که در آن r ریشه معادلات مشخصه است. در چنین حالتی جواب ویژه‌ی منسوب به $f_1(n)$ را به

کوچکترین توانی از n مثل n^s که در آن هیچ جمع‌وندی از $f_1(n)$ نباشد ضرب می‌کنیم. در این حالت $n^s f_1(n)$ قسمت متناظر از $a_n^{(p)}$ است.

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
C	A ثابت
ثابت	$A_0 + A_1 n$
n	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2$
n^2	$A_0 + A_1 n + K + A_{1-1} n^{r-1} + A_1 n^1$
$n^T \quad T \in \mathbb{Z}^+$	A_r^n
$r^n \quad r \in \mathbb{R}$	
$\sin \alpha n$	$A \sin \alpha n + \beta \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \sin \alpha n + \beta \cos \alpha n$
$n' r^n$	$r^n (A_0 + A_1 n + K + A_{t-1} n^{T-1} + A_1 n^1)$
$r^n \sin \alpha n$	$A r^n \sin \alpha n + B r^n \cos \alpha n$
$r^n \cos \alpha n$	$A r^n \sin \alpha n + B r^n \cos \alpha n$

توابع مولد:

مثال: اگر بخواهیم 12 پرتقال را بین 3 نفر که اولی حداقل 4 تا، دومی حداقل 2 تا و سومی حداقل 2 تا و حداکثر 5 داشته باشند تقسیم کنیم چند حالت داریم؟

ضریب x^{12} برابر تعداد حالات است.

$$f(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^2 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \rightarrow \text{تابع مولد}$$

مثال: 24 توپ را از بین تعداد نامحدود توپ‌هایی با رنگ قرمز، سبز، سفید و سیاه به گونه‌ای انتخاب کنیم که حداقل 6 توپ سیاه و به تعداد زوج توپ سفید داشته باشیم.

ضریب x^{24} جواب مسأله است.

$$f(x) = (x^0 + x^1 + K + x^{18})(x^0 + x^1 + K + x^{34})(x^0 + x^2 + x^4 + K + x^{18})$$

تعریف: فرض کنید که $K, a_6, K a_0$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد.

$$= - \sum_{u=0}^{\infty} a_n x^n \text{ تابع}$$

$$f(x) = (a_0 a_1 x^1 + a_2 x^2 + K$$

مثال: $(1+x)^n$ تابع مولد برای رشته‌ی $c_n^1, c_n^2, c_n^3, \dots, c_n^n, K, 0, 0, 0, \dots$ است.

- برای هر $n \in \mathbb{Z}^6$ قضیه دو جمله‌ای نیوتون به صورت زیر است:



$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \dots + c_n^n x^n$$

این فرمول را برای n های منفی و حقیقی می توان تعمیم کرد:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq r \geq 0 \Rightarrow c_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

$$n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow c_{-n}^r = \frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} = \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!(n-r)!} = (-1)^r (n+r-1)! e^r n+r-1$$

$$n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow c_n^0 = 1$$

مثال: برای $n \in \mathbb{Z}^+$ بسط سری مک لورن برای $(1+x)^{-n}$ به صورت زیر است:

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-r+1)}{r!}x^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c_{n+r-1}^r x^r$$

لذا $(1+x)^{-n}$ تابع مولد رشته‌ی $c_{-n}^0, c_{-n}^1, c_{-n}^2, \dots, c_{-n}^r, \dots$ است.

نکات مهم:

$$1. (1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \dots + c_n^n x^n$$

$$2. (1+ax)^n = c_n^0 + c_n^1 ax + c_n^2 a^2 x^2 + \dots + c_n^n a^n x^n$$

$$3. (1+x^m)^n = c_n^0 + c_n^1 x^m + c_n^2 x^{2m} + \dots + c_n^n x^{nm}$$

$$4. (1+x^{n+1})/(1+x) = 1+x+x^2+\dots+x^n$$

$$5. 1/(1-x) = 1+x+x^2+\dots = \sum_{K=0}^{\infty} x^K$$

$$6. \frac{1}{(1+x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1 x + c_{-n}^2 x^2 + \dots = \sum_{K=0}^{\infty} c_{-n}^K x^K = \sum_{K=0}^{\infty} 1 + (-1)^K c_{K+n}^K x^K$$

$$7. \frac{1}{(1-x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1 (-x) + c_{-n}^2 (-x)^2 + \dots = \sum_{K=0}^{\infty} c_{-n}^K (-x)^K = \sum_{K=0}^{\infty} c_{n+K}^K x^K$$

$$\text{اگر } h(x) = \sum_{K=0}^{\infty} c_K x^K, \text{ آنگاه } h(x) = F(x)g(x), g(x) = \sum_{K=0}^{\infty} b_K x^K, f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K$$

$$\text{در آن } K \geq 0, C_K = \sum_{i=0}^K a_i b_{K-i}$$

مثال: ضریب x^{15} را در $f(x) = (x^2 + x^3 + \dots)^4$ بدست آورید.

$$f(x) = (x^2(1+x+\dots))^4 = \left[\frac{x^2}{1-x} \right]^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} c_{n+r-1}^r x^r \Rightarrow c_{11}^7 = 120$$



حال روابط بازگشتی با استفاده از توابع مولد:

مثال: تعداد جابه‌جایی‌های حلقه‌ها در برج هانوی:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\rightarrow A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \rightarrow A(x) = 2xA(x) + \frac{x}{1-x} \rightarrow (1-2x)A(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\rightarrow A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x} = \frac{a(1-2x) + b(1-x)}{(1-x)(1-2x)} \rightarrow x = a(1-2x) + b(1-x) \rightarrow a = -1 \text{ و } b = 1$$

$$\rightarrow A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n \rightarrow a_n = 2^n - 1$$

روابط بازگشتی

برای دنباله‌ی a_0, a_1, K, a_n به معادله‌ای که در آن مقدار a_n وابسته به مقادیر a_0, a_1, K, a_{n-1} باشد، یک رابطه‌ی بازگشتی گفته می‌شود.

این معادله را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + K + c_0 a_0 = f(n)$$

شرایط اولیه: هر رابطه‌ی بازگشتی معرف یک دنباله از مقادیر است که یک یا چند مقدار این دنباله باید مشخص باشد تا با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی بقیه مقادیر بدست آیند. این مقادیر مشخص «شرایط اولیه» نامیده می‌شوند.

رابطه‌ی بازگشتی همگن: یک رابطه‌ی بازگشتی که در آن $f(n) = 0$ باشد، «رابطه‌ی بازگشتی همگن» نامیده می‌شود.

رابطه‌ی بازگشتی همگن مرتبه‌ی k با ضرایب ثابت رابطه‌ای بصورت زیر است:

$$a_n = c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} + K + c_k a_{n-k} \quad c_k \neq 0$$

که برای بدست آوردن جواب خاص بعنوان دنباله‌ی a_0, a_1, K باید k شرط اولیه وجود داشته باشد:

$$a_0 = C_0, \quad a_1 = C_1, \quad K, \quad a_{k-1} = C_{k-1}$$

رابطه‌ی بازگشتی همگن مرتبه‌ی اول با ضرایب ثابت

با استفاده از آنچه برای رابطه‌ی بازگشتی مرتبه‌ی k عنوان شد، در این حالت رابطه صورت کلی زیر را دارد:

$$a_n + ca_{n-1} = 0$$

در این رابطه یک شرط اولیه برای بدست آوردن دنباله کفایت می‌کند و می‌توان هر جمله‌ی دنباله را با استفاده از آن شرط اولیه بدست آورد:

$$a_n = -ca_{n-1} = c^2 a_{n-2} = -c^3 a_{n-3} = K = (-c)^n a_0$$

رابطه بازگشتی همگن مرتبه‌ی دوم با ضرایب ثابت

رابطه در این حالت بصورت زیر است:

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0$$

در چنین حالتی دو شرط اولیه برای بدست آوردن دنباله کفایت می کند.

جواب معادله در این حالت می تواند بصورت $a_n = cr^n$ باشد که جایگذاری در رابطه می توان نوشت:

$$c_n cr^n + c_{n-1} cr^{n-1} + c_{n-2} cr^{n-2} = 0 \Rightarrow c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$$

که براساس ریشه های این معادله درجه دوم سه حالت امکان وقوع دارد:

الف) r_1, r_2 دو ریشه ی حقیقی و جدا باشند که در این صورت جواب بصورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ خواهد بود.

ب) r_1, r_2 دو ریشه ی حقیقی و مضاعف باشند که در این صورت جواب بصورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_1^n$ خواهد بود.

ج) r_1, r_2 دو ریشه هایی حقیقی نباشند که باز هم مثل حالت الف ولی با مقادیر مختلط r_1, r_2 می باشد:

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

رابطه ی بازگشتی ناهمگن مرتبه ی اول و دوم

این گونه روابط نیز بصورت های عمومی زیر می باشند:

$$a_n + ca_{n-1} = f(n) \quad ; \quad n \geq 1$$

$$a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n) \quad ; \quad n \geq 2$$

که این روابط با دو روش «جواب عمومی و خصوصی» و «تابع مولد» قابل حل می باشند.

جواب عمومی و خصوصی

این راه حل را در بعضی از موارد می توان بکار برد. در این روش جواب رابطه (a_n) حاصل جمع دو مقدار خصوصی (a_{np}) و عمومی (a_{nr}) در نظر گرفته می شود. مقدار عمومی، جواب رابطه ی همگن می باشد که روش بدست آوردن آن قبلاً ذکر شده است (برای $f(n) = 0$) و برای بدست آوردن جواب خصوصی نیز باید با استفاده از (n) جواب حدس زده شود و سپس بدست آید. بعنوان نمونه در معادله ی $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n)$ می توان حدس زد که جواب بصورت 7^n می باشد که با جایگذاری در رابطه و داشتن مقدار اولیه، A نیز بدست می آید.

تابع مولد

در این روش در رابطه ناهمگن $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} + K = f(n)$ دو طرف در x^n ضرب می گردد و حاصل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} \quad 2$$

$$\frac{1}{\alpha - \beta x} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)^n \quad 1$$

در این روش ممکن است نیاز به قوانینی مانند قوانین زیر باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+m-1} \right) = \frac{d^{m-1} \left(\frac{1}{1-x} \right)}{dx^{m-1}} = \frac{1}{(1-x)^m} \quad 3$$



تست های فصل

۱- پاسخ معادله ی بازگشتی $F(n) = nF(n-1) + n!$ به ازای چه مقدار برای $F(1)$ برابر است با $F(n) = (n+1)!$ ؟

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) -1

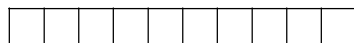
۲- با توجه به دنباله بازگشتی مقابل $s(73)$ کدام است ؟

$$S(0) = 0, S(1) = 1$$

$$S(n) = S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + S\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right), n \geq 2$$

- (1) 6 (2) 8 (3) 9 (4) 7

۳- نواری به طول ۱۰ مطابق شکل در اختیار داریم. به چند طریق می توان برخی از خانه های نوار را سیاه کرد، به طوری که هیچ سه خانه سفیدی کنار همدیگر نباشند؟



- (1) 1002 (2) 274 (3) 149 (4) 64

۴- برای یک سیستم کامپیوتری یک رشته دهمی یک کلمه رمز معتبر است اگر شامل تعداد زوج صفر باشد. یک رابطه بازگشتی برای تولید کلمات رمز معتبر به طول n عبارتست از:

$$\begin{array}{llll} a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1} & (4) & a_n = 10a_{n-1} - 8 & (3) \\ a_1 = 9 & & a_1 = 9 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} a_n = 9a_{n-1} & (2) \\ a_1 = 10 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} a_n = 8a_{n-1} + 10 & (1) \\ a_1 = 9 & \end{array}$$

۵- اگر $S_{n,r}$ برابر تعداد حالت هایی باشد که یک مجموعه n عضوی را بتوان به r زیر مجموعه غیرتهی افراز کرد، کدام گزینه صحیح است؟ (مثلاً $S_{3,2} = 3$ زیرا یک مجموعه ۳ عضوی را به ۳ طریق می توان به دو زیر مجموعه غیرتهی افراز کرد) (شرایط اولیه $S_{n,1} = S_{n,n} = 1$).

$$S_{n,r} = S_{n-1,r} + S_{n,r-1} \quad (2) \quad S_{n,r} = S_{n-1,r-1} + rS_{n-1,r} \quad (1)$$

$$S_{n,r} = S_{n,r-1} + (r-1)S_{n-1,r-1} \quad (4) \quad S_{n,r} = S_{n-1,r-1} + rS_{n,r-1} \quad (3)$$

۶- رابطه بازگشتی برای $T(n)$ تعداد مقایسه های لازم برای اجرای جستجوی دوتایی (binary search) در یک لیست مرتب شده با n عضو چیست؟

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 \quad (4) \quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \quad (3) \quad T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \quad (2) \quad T(n) = T(n-1) + 1 \quad (1)$$

۷- فرض کنید a_n تعداد رشته هایی به طول n است که از $0, 1$ تشکیل شده اند و در ضمن شامل دو صفر یا یک پشت سر هم نیستند. رابطه بازگشتی برای a_n کدام است؟

$$a_0 = 1, a_1 = 3, 2a_{n-2} + a_{n-1} + 2 \quad (1)$$

$$a_0 = 1, a_1 = 3, 3a_{n-2} + a_{n-1} + 1 \quad (4) \quad a_0 = 1, a_1 = 3, 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (3)$$

۸- می‌خواهیم تابعی بازگشتی برای بیان تابع زیر که روی اعداد صحیح تعریف می‌گردد، بنویسیم. گزینه صحیح کدام

$$\text{است؟ } n \geq 0, F(n) = 2n - 1 + 2^n$$

$$\begin{aligned} F(n) &= 3F(n-1) - 2F(n-2) - 5 & (2) & \quad F(n) = 4F(n-1) - 3F(n-2) - 5 & (1) \\ F(1) &= 3 \quad F(2) = 7 & & \quad F(0) = 0 \quad F(1) = 3 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(n) &= 4F(n-1) - 5F(n-2) - 5 & (4) & \quad F(n) = 4F(n-1) - 5F(n-2) + 2F(n-3) & (3) \\ F(0) &= 0 \quad F(1) = 3 & & \quad F(0) = 0 \quad F(1) = 3 \quad F(2) = 7 & \end{aligned}$$

۹- n نفر از شماره ۱ تا n در یک دایره قرار گرفته‌اند و از شماره ۱ به ترتیب یک در میان حذف می‌شوند تا یک نفر

باقی بماند (اول نفر ۲ حذف می‌شود). شماره نفر باقیمانده (n) چیست. کدام یک از روابط زیر صحیح است. (j(1)=1)

$$\begin{aligned} \begin{cases} j(2n+1) = 2j(n)+1 \\ j(2n) = 2j(n)-1 \end{cases} & (4) & \begin{cases} j(2n) = j(2n)-1 \\ j(2n+1) = 2j(n)-1 \end{cases} & (3) & \begin{cases} j(2n) = 2j(n) \\ j(2n+1) = 2j(n)+1 \end{cases} & (2) & \begin{cases} j(2n) = 2j(n)+1 \\ j(2n+1) = 2j(n)-1 \end{cases} & (1) \end{aligned}$$

۱۰- اعداد 1, 2, K, n را متوالیاً دور یک دایره (مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت) می‌چینیم. حال عدد ۲ را حذف می‌کنیم

و سپس یک در میان، این کار را بین اعداد باقیمانده تکرار می‌کنیم تا تنها یک عدد باقی بماند (مثلاً به ازای n=5،

اعداد حذف شده به ترتیب ۲ و ۴ و ۱ و ۵ بوده و عدد ۳ باقی می‌ماند). به ازای 37 چقدر عددی باقی می‌ماند؟

$$11 \quad (4) \quad 12 \quad (3) \quad 13 \quad (2) \quad 15 \quad (1)$$

۱۱- فرض کنید $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ در این صورت a_n به صورت است؟

$$a_n = b3^n + c(-1)^n \quad (4) \quad a_n = b2^n + c(-1)^n \quad (3) \quad a_n = b3^n + c2^n \quad (2) \quad a_n = b2^n + cn \quad (1)$$

۱۲- اگر $a_0 = a_1, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ در این صورت با α, β اعداد ثابت، a_n برابر است با:

$$a_n = \alpha(-1)^n + \beta3^n \quad (4) \quad a_n = \alpha3^n + \beta(-1)^n \quad (3) \quad a_n = \alpha2^n + \beta3^n \quad (2) \quad a_n = \alpha3^n + \beta \quad (1)$$

۱۳- دنباله $a_n = 3(2)^n - n - 3$ حل کدام رابطه بازگشتی است؟

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} - 1 \quad (2) \quad a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad (1)$$

$$a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + a_{n-3} \quad (4) \quad a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} \quad (3)$$

۱۴- فرض کنید به ازای $2^k = \text{هاشته باشیم}$ $f(n) = f(\frac{n}{2}) + 3$ در این صورت به ازای $n = 2^k$ $f(n)$ به صورت

..... است.

$$f(n) = a \log_2 n + b \quad (4) \quad an + b \log_2 n \quad (3) \quad f(n) = a2^n + b \quad (2) \quad f(n) = an + b \quad (1)$$



پاسخنامه تست‌ها

1- گزینه (3) صحیح است.

$$F(n) = (n+1)! \Rightarrow F(1) = (1+1)! = 2$$

2- گزینه (2) صحیح است.

$$S(73) = S(36) + S(14) = S(18) + S(7) + S(7) + S(2) = S(9) + S(3) + 2(S(3) + S(1)) + S(1) + S(0)$$

$$= S(4) = S(1) + S(1) + S(0) + 2(1+1) + 1 + 0 = S(2) + S(0) + 7 = S(1) + 7 = 8$$

3- جواب درست وجود ندارد.

رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ با شرایط اولیه $a_3 = 7, a_2 = 4, a_1 = 2$ می‌باشد و جمله دهم جواب است:

$$2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504$$

4- گزینه (4) صحیح است.

به متن درس مراجعه کنید و یا به ازای $n=1, n=2, n=3$ آزمایش کنید ($a_1=9, a_2=82, a_3=756$)

5- گزینه (1) صحیح است.

تعداد افزایشی که $\{x_n\}$ را شامل می‌شود = تعداد افزایشی $\{x_1, K, x_n\}$ به r زیر مجموعه افزایشی که $\{x_n\}$ شامل نشود $(S_{n,r})$ را اعداد استرلینگ نوع دوم می‌گویند

6- گزینه (2) صحیح است.

7- گزینه (3) صحیح است.

b_n, c_n, d_n را به ترتیب رشته‌هایی می‌گیریم که به صفر یا یک یا 2 ختم می‌شوند و $b_n = c_n + d_n$ و b_n رشته‌هایی که به 2 ختم می‌شوند برابر $d_n = a_{n-1}$ می‌باشند. رشته‌هایی که به 1 ختم می‌شوند برابر $c_n = b_{n-1} + d_{n-1}$ می‌باشند (چون رقم ماقبل آخر باید صفر یا 2 باشد). رشته‌هایی که به صفر ختم می‌شوند برابر $b_n = c_{n-1} + d_{n-1}$ می‌باشد پس:

$$a_n = b_n + c_n + d_n = c_{n-1} + d_{n-1} + b_{n-1} + d_{n-1} + a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1} = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

8- گزینه (3) صحیح است.

با آزمایش $n=3$ به جواب خواهید رسید. علاوه بر این با توجه به اینکه $f(n) = (2n-1)1^n + 2^n$ پس معادله مشخصه باید ریشه مضاعف و ریشه ساده 2 داشته باشد.

9- گزینه (4) صحیح است.

به ازای $n=1$, $j(1)=1$ می‌باشد به ازای $n=2$, $j(2)=1$ و به ازای $n=3$, $j(3)=3$

10- گزینه (4) صحیح است.

با توجه به تست 9، جواب $j(37)$ است پس:

$$j(37) = 2j(18) + 1, j(18) = 2j(9) - 1, j(9) = 2j(4) + 1, j(4) = 2j(2) - 1 = 1$$

$$j(37) = 11, j(18) = 5, j(9) = 3 \text{ پس}$$

11- گزینه (3) صحیح است.

$$r^2 - r - 2 = 0, r = -1, r = 2$$

12- گزینه (3) صحیح است.

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \rightarrow r_1 = -1, r_2 = +3 \rightarrow a_n = \alpha(3)^n + \beta(-1)^n$$

13- گزینه (3) صحیح است.

معادله مشخصه دارای ریشه ساده 2 و ریشه مضاعف 1 می باشد که گزینه «3» صحیح است. زیرا رابطه بازگشتی همگن مرتبه 3 است که گزینه 3 یا 4 صحیح است و با بررسی گزینه 3 جواب است.

$$a_n = 3(2)^n + (-n - 3)(1)^n$$

14- گزینه (4) صحیح است.

این رابطه لگاریتمی است.

فصل پنجم: گرافها

مروری بر نظریه گرافها

بسیاری از مسائل روزمره‌ی زندگی را می‌توان به صورت انتزاعی توسط مجموعه‌ای گسسته از اشیا و روابط دودویی تعریف شده بر آن بیان کرد.

در این گونه مسائل گرافیکی مناسب‌ترین روش نمایش است. این امر مطالعه‌ی نظریه‌ی گرافها منجر می‌شود.

تعاریف:

گراف سودار به صورت زوج مرتب (V, E) است، که در آن V مجموعه‌ای از متناهی از رئوس و E رابطه‌ای دودویی در V می‌باشد. عناصر V را رئوس و زوج مرتب‌های E را یال گراف سودار می‌نامیم. یک یال حادث با رئوسی است که به وسیله‌ی آن به هم وصل می‌شوند. یال (a, b) حادث از a و حادث به b است. a راس ابتدایی و b راس انتهایی است.

دو راس مجاور خوانده می‌شوند که به وسیله‌ی یالی به هم وصل می‌شوند. یک رأس منفرد است هرگاه هیچ یالی با آن حادث نباشد و اگر یالی حادث به همان راس باشد حلقه نامیده می‌شود. گراف بی‌سوی G به صورت زوج مرتب (V, E) است که V مجموعه متناهی و E مجموع همان دو عنصری از V است. دو گراف را یکریخت می‌کنیم هرگاه یک تناظر یک به یک بین رئوس و یک تناظر یک به یک بین یال‌های آن موجود باشد و مفهوم حادث بودن بماند.

اگر $G(V, E)$ باشد $G'(V', E')$ را زیر گراف G گوئیم هرگاه $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ به طوری که یال‌های E' تنها با رئوس V' باشند. اگر یک زیر گراف G' شامل تمامی رئوس V باشد آن را زیر گراف پوشا می‌خوانیم. مکمل زیر گراف G' نسبت به G زیر گرافی چون $C''(V'', E'')$ است که $V'', E'' = E - E'$ رئوس را شامل می‌شود که یال‌های E'' با آنها حادثند.

فرض کنید $\emptyset \neq Y \subseteq V$ زیر گراف $C_1(U, E_1)$ را زیر گراف القا گوئیم هرگاه E_1 شامل تمام یال‌هایی باشد که رئوس انتهایی آنها در U وجود دارد.

گراف کامل بی‌سوی n راسی را با K_n نشان می‌دهیم که بین هر دو رأس متمایز آن یالی است. همچنین گراف سودآور n راسی است.

مکمل گراف G با n رأس مکمل آن نسبت به K_n است و با $\bar{G}$ نمایش داده می‌شود.

اگر برای گراف $G(V, E)$ یک مجموعه چندگانه از زوج‌های مرتب از $V \times V$ باشد آنگاه G را یک گراف چند گانه‌ی سودار گوئیم.

در گراف‌های سودار و بی‌سوی چند گانه هیچ محدودیتی برای تعداد پیکانها از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر وجود ندارد. گراف معمولی یا چندگانه را با نام گراف نام می‌بریم. اگر بخواهیم تأکید کنیم گراف غیر چندگانه را گراف خطی می‌نامیم. یک گراف وزن‌دار را به صورت چهارتایی (V, E, F, f) یا سه‌تایی (V, E, g) تعریف می‌کنیم که در آنها V رئوس E یال‌ها و F تابعی با دامنه‌ی V ، g تابعی با دامنه‌ی E هستند.

F , g بیانگر انتساب وزن‌ها به رئوس و یال‌ها هستند.

در یک گراف سودار مسیر رشته‌ای از یال‌ها مثل $e_{ik}, K, e_{12}, e_{11}$ به گونه‌ای است که راس انتهایی e_{ik} منطبق بر رأس ابتدایی e_{j+1} است. مسیر را رشته‌ای از رئوس نیز می‌توان نمایش داد.

مسیر را ساده می‌گوییم اگر هیچ یالی در آن تکرار نشود و ابتدایی گوئیم هرگاه هیچ رأسی در آن دوبار ملاقات نشود.

مدار مسیری مثل $e_{ik}, K, e_{12}, e_{ij}$ است که در آن رأس انتهایی یال e_{ik} بر راس ابتدایی e_{ij} منطبق باشد.

مدار ساده است هرگاه شامل یال تکراری نباشد و ابتدایی است هرگاه هیچ رأسی در آن دوبار ملاقات نشود.

گراف بی‌سو راهمند می‌نامیم هرگاه بین هر دو راس دلخواه مسیری وجود باشد. در غیر این صورت ناهمند است.

گراف سودار هممند است هرگاه گراف بی‌سوی حاصل از آن هممند باشد.

هر گراف ناهمند شامل چندین زیر گراف هممند است که هر کدام از یک نمونه مولفه برای گراف می‌نامیم.

یک گراف سودار هممند قوی است هرگاه به ازای هر دو راس a, b هم مسیری از a به b و هم مسیری از b به a موجود باشد.

مثال: در بازی حماقت لحظه‌ای 4 مکعب با وجه‌هایی به رنگ‌های متفاوت (در کل 4 رنگ متفاوت) داریم. می‌خواهیم آنها را روی هم بچینیم به طوری که در هر ستون 4 رنگ متفاوت دیده شود. برای این کار در حالت عمومی برای 4 مکعب یک گراف چندگانه‌ی وزن‌دار تشکیل داده و سعی خواهیم کرد دو زیر گراف با ویژگی‌های زیر در آن پیدا کنیم:

(1) هر زیر گراف باید شامل 4 رأس و 4 یال با برچسب‌های مختلف باشد.

(2) در هر زیر گراف درجه‌ی هر رأس باید دقیقاً برابر 2 باشد.

(3) دو زیر گراف نباید یال مشترک داشته باشد.

مسیر و مدار اولری به مسیر و مداری گفته می‌شود که از هر کدام از یال‌های گراف تنها و تنها یک بار عبور کند.

درجه‌ی هر راس تعداد یال‌های حادث با آن تعریف می‌شود. درجه‌ی هر رأس V را با $\deg(7)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱: در یک گراف بی‌سو $G(V, E)$ رابطه‌ی زیر را داریم.

$$|E(G)| = \sum_{V \in V} V \deg(7) = 2|E(G)|$$

تعداد یال‌ها می‌باشد.

مثال ۲: در یک گراف بی‌سو تعداد رئوس از درجه فرد همیشه زوج می‌باشد.

$$\sum_{V \in V} \deg(V) = \sum_{\text{ford}} \deg(v) = \sum_{\text{zof}} \deg(V) = 2|E(G)|$$

زوج است

قضیه: گراف بی‌سوی $G(V, E)$ دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر هممند بوده و حداکثر دو رأس از درجه فرد داشته باشد.

مثال ۳: یکی از سرگرمی‌های مردم کانیکزبرگ این بود که با شروع از یک نقطه از هفت پل واقع بر رودخانه‌ی پر گل و تنها بار عبور کرده به نقطه‌ی عزیمت خود برگردند. نقشه را می‌توان به صورت گرافی که یال‌های آن پل‌ها و رئوس آن جزیره‌ها و دو طرف رودخانه هستند نشان داد.

اولر که پدر نظریه گرافها لقب گرفته نشان داد حل مسأله در گرو پیدا کردن یک مدار اولری در این گراف است که با توجه به 4 رأس درجه‌ی فرد آن نه مسیر و نه مدار اولری در این گراف موجود نمی‌باشد.

برای گراف سودار $G(V, E)$ درجه‌ی ورودی یک رأس مثال V برابر تعداد یال‌های حادث به آن و درجه‌ی خروجی یک رأس برابر

تعداد یال‌های حادث از آن تعریف می‌شود درجه‌ی ورودی را با $\deg^-(V)$ و درجه خروجی را با $\deg^+(V)$ نمایش می‌دهیم. هر حلقه در گراف سودار موجب افزایش یک واحد با $\deg^-(V)$ و یک واحد به $\deg^+(V)$ می‌شود. قضیه: گراف سودار $G(V, E)$ دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر همبند بوده و برای $v \in V$ داشته باشیم: $\deg^+(v) \deg^-(v)$ و دارای مسیر اولری است اگر و تنها اگر همبند بوده و به استثنای دو رأس مثل a, b نیز داشته باشیم. مسیر و دور هامیلتونی: مسیر (دور) هامیلتونی به مسیری (دوری) گفته می‌شود که از هر رأس گراف فقط و فقط یک بار عبور کند. تنها راه‌حل برای نشان دادن اینکه گرافی دارای مسیر هامیلتونی است تشکیل صریح آن است. اگر گرافی دارای دور هامیلتونی باشد همبند است

چند نکته مفید برای بدست آوردن یک دور هامیلتونی در گراف $G(V, E)$

- (1) اگر G دور هامیلتونی دارد برای هر رأس $v \in V$, $\deg(v) \geq 2$
- (2) اگر برای $a \in V$, $\deg(a) > 2$ دو یال حادث با رأس a باید در دور هامیلتونی قرار بگیرند. در زمان تشکیل دور هامیلتونی برای G نمی‌توانیم دوری برای یک زیر گراف از G تشکیل دهیم مگر اینکه همه‌ی رئوس را شامل شوند. راهی برای نشان دادن اینکه بعضی گراف‌ها مسیر هامیلتونی ندارند. رئوس را با X, Y طوری برچسب می‌زنیم که رأس X حادث با y حادث با x باشد. دور هامیلتونی شامل $|V|$ رأس است که از x, y های متوالی ظاهر شده سپس تعداد x, y باید به اندازه $\frac{|V|}{2}$ موجود باشد.

دور هامیلتونی در یک گراف کامل:

مثال: هفده نفر می‌خواهند در یک میزگرد به شیوه‌هایی بنشینند که هر بار دو طرف یک شخص افراد متفاوتی نشسته باشند.

در گراف کامل K_n ، $n \geq 3$ ، راس و $K_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ یال موجود است. حداکثر $\frac{n-1}{2}$ دور هامیلتونی با یال عادی متفاوت

موجود است. بنابراین به $\frac{16-1}{2} = 8$ روش ممکن می‌توانند بنشینند.

تعریف: یک گراف کامل سودار با n راس که با K_n^0 نمایش داده می‌شود گرافی است سودار و با n راس به طوری که برای هر دو

راس x, y یا (x, y) موجود باشد. K_n^* را چرخه می‌گوییم.

قضیه: K_n^* دارای یک مسیر: سودار هامیلتونی است.

اثبات به شیوه استقرار:

(1) $n=2$ درست است.

(2) K_n^* دارای مسیر هامیلتونی است. (فرض)

(3) اگر از K_{n+1}^* راس V_{n+1} را حذف کنیم. K_n^* بدست می‌آید که مسیر هامیلتونی نام دارد دو امکان وجود خواهد داشت:

الف) برای $1 \leq K \leq n$ یال‌های $(V_K, V_{K+1}), (V_{n+1}, V_{K+1})$ ، گراف هستند که در این صورت آنها را با یال (V_K, V_{K+1}) جایگزین می‌کنیم.

ب) (V_n, V_{n+1}) ، K_{n+1}^* است که در این صورت این یال به مسیر اولیه $\deg(x) + \deg(y) \geq n-1$ برقرار باشد G دارای مسیر هامیلتونی است.

اثبات: G همبند است چون در غیر این صورت c_2, c_1 دو مؤلفه‌ای گراف با n_2, n_1 راس بوده و داریم:

که با فرض تناقض دارد:

$$\begin{cases} y \in c_2 \rightarrow \deg(y) \leq n_2 - 1 \\ x \in c_1 \rightarrow \deg(x) \leq n_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \deg(x) + \deg(y) \leq n - 2$$

مثال: اگر $G(V, E)$ یک گراف بی‌سوی بدون حلقه با n راس باشد، اگر برای هر $v \in V$ ، $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$ آنگاه G مسیر هامیلتونی

دارد.

قضیه: اگر $G(V, E)$ یک گراف بی‌سود بدون حلقه با راس باشد و برای هر دو راس دلخواه و غیرمجاور x, y رابطه

$\deg(x) + \deg(y) \geq n$ برقرار باشد آنگاه G یک دور هامیلتونی دارد.

کوتاه‌ترین مسیرها در گراف‌های وزن‌دار (الگوریتم دیکسترا):

فرض کنید $G(V, E)$ یک گراف وزن‌دار است. وزن یالی مثل (i, j) با $w(i, j)$ نشان داده شده و آن را طول آن یال می‌نامیم. طول یک مسیر در G مجموع طول یالهای تشکیل دهنده آن است. نکته: مسئله مهم تعیین کوتاه‌ترین مسیر از یک راس به راس دیگر مثل a تا Z است. برای این کار از الگوریتم دیکسترا استفاده می‌کنیم.

الگوریتم دیکسترا:

(1) ابتدا $T = V = \{a\}$ و برای $T \in T$, $L(t) = W(a, t)$, $L(t).p = \{a\}$ را کوتاه‌ترین مسیر از a به t می‌نامیم به طوری که شامل هیچ راس دیگری از T نباشد. $L(t)$ را اندیس t نسبت به p می‌گوییم و اگر مسیری وجود نداشت برابر ∞ قرار می‌دهیم.
(2) فرض می‌کنیم $x \in T$ راسی است که کوچکترین اندیس نسبت به p را دارد.
(3) اگر x راسی باشد که می‌خواهیم از a به آن برسیم در این صورت الگوریتم خاتمه می‌یابد. در غیر این صورت $T' = T - \{x\}$, $p' = p \cup \{x\}$ و برای هر $T \in T''$ اندیس آن را با استفاده از $L'(t) = \min\{L(t), L(x) + w(x, t)\}$ رابطه حساب می‌کنیم.

(4) مراحل 2 و 3 را با p'' به جای p , T'' به جای T تکرار می‌کنیم.
اگر در مرحله دوم این الگوریتم رئوسی را ذخیره کنیم که منجر به کوتاه‌ترین مسیر از a به x می‌شوند نه تنها کوتاه‌ترین مسیر از a به x بلکه خود این مسیر را نیز به دست خواهیم آورد.
نکته: پیدا کردن دورهامیلتونی دارای کمترین وزن به ویژه برای n های بزرگ عملاً امکان‌پذیر نیست.

قاعده نزدیکترین همسایه:

فرض کنیم $G(V, E, W)$ گراف وزن‌دار بی سو با n است و قاعده‌ی نزدیکترین همسایه برای بدست آوردن دور هامیلتونی نیمه بهینه H به صورت زیر است:

(1) فرض می‌کنیم $x \in V$ یک راس دلخواه از V است.

$$\{x\} \leftarrow p, H \leftarrow Z, a \leftarrow \text{اولین راس } H \text{ است.}$$

(2) برای $i = 1$ تا $i = n - 1$ فرض $H \leftarrow H \cup \{z, a\}$, $p \leftarrow p \cup \{y\}$, $x \leftarrow y$

(3) $H \leftarrow H \cup \{x, a\}$ (یال ایجاد شده با اولین و آخرین راس اضافه می‌کنیم).

تعریف: گراف $G(V, E)$ هارمونی گویند هر گاه G را بتوان در صفحه به گونه‌ای رسم کرد که یال‌های آن تنها در رئوس G متقاطع باشد.

تعریف: گراف G را در دو بخش گوییم که هرگاه $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V = V_1 \cup V_2$ و برای هر یال یک راس متعلق به V_1 و دیگری متعلق به V_2 باشد اگر هر راس از V_1 به تمام رئوس V_2 وصل باشد گراف را در دو بخش کامل می‌گوییم. در حالت اخیر که $|V_1| = M$, $|V_2| = N$, G را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: فرض کنیم که G یک گراف بی سو و بی حلقه است که رد آن $E \neq \emptyset$ اگر یال $e = \{V, W\}$ را حذف و $\{W, V\}, \{U, V\}$

را اضافه کنیم که $V \in g$ در این صورت یک زیر بخش مقدماتی از G حاصل خواهد شد.

تعریف: گراف‌های بی سو و بی حلقه $G_1 - G_2$ را همریخت گوییم هرگاه یکرخت باشند یا از یک گراف بی سو و بی حلقه H به وسیله یک رشته از زیر بخش‌ها بدست آیند.

تعریف: یک ناحیه از گراف هارمونی ناحیه‌ای از صفحه است که یال‌های گراف محدود بوده و دیگر قابل تقسیم به زیر نواحی نیست. اگر گراف را در امتداد یال‌ها ببریم ناحیه‌ها جدا می‌شوند.

نکته: یک ناحیه متناهی است هرگاه مساحت آن متناهی باشد در غیر این صورت نامتناهی است.

قضیه: فرض کنید G یک گراف همبند و هارمونی با $|E| = e, |V| = V$ است اگر r تعداد نواحی تعریف شده به وسیله G باشد، آنگاه

$$V - e + r = 2 \text{ داریم}$$

$$e = 1 \begin{cases} v=1 \rightarrow r=2 \\ v=2 \rightarrow r=1 \end{cases} \quad \text{اثبات یا استقرار:}$$

$$e = K \quad V - K + r = 2$$

$$e = 1 + 1 \Rightarrow$$

(A) با حذف a داریم $G \rightarrow$ راسی از درجه 1 دارد:

$$(V-1) = r - K = 2 \rightarrow [(V-1)+1] + 1 = (K+1) + r = V - e = r = 2$$

(B) با حذف a داریم $G \rightarrow$ راسی از درجه 1 نداریم:

$$(V-1) - K + (r-1) + 2 \rightarrow [(V-1)+1] - (K+1) + [(K+1)+1] = 2$$

مثال: فرض کنید که G یک گراف بی سوی همبند هارمونی و بدون حلقه با $[V] = V, [E] = e > 2$ است در این صورت

$$e \leq 3V - 6$$

اثبات: اگر b تعداد همه یال‌های مرزی برای نواحی باشد:

$$2e \geq 3r \Leftrightarrow b \leq 2e; b \geq 3r \text{ یا } \frac{2e}{3} \geq r$$

$$2 = V - r + r \leq \frac{2e}{3} + V - r - \frac{e}{3} \rightarrow e \leq 3V - 6$$

در نتیجه اگر G گرافی خطی باشد و بدون حلقه با $[E] > 2$ یال باشد $e > 3V - 6$ و آنگاه G هارمونی نیست.

قضیه (کورتاوسکی): گراف G هارمونی است اگر دارای زیر گرافی همریخت $K_{1,5}$ یا $K_{3,3}$ نباشد.

تئوری گراف

گراف

عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط به نام گره (node) که بین آنها ممکن است روابطی برقرار باشد. هر گراف بصورت سه تایی مرتب (V, E, ϕ) نمایش داده می‌شود که در آن V مجموعه‌ی غیرتهی از گره‌ها، E مجموعه لبه‌ها و ϕ نگاشتی از مجموعه‌ی E به سوی مجموعه‌ای از زوجهای مرتب یا غیرمرتب حاصل از $V \times V$ می‌باشد (زوج غیرمرتب زوجی است که ترتیب آنها نسبت به هم اهمیتی نداشته باشد). در صورتی که هر لبه بطور مستقیم متناظر با یک زوج مرتب یا غیرمرتب باشد، سه تایی مرتب (V, E, ϕ) می‌تواند بصورت زوج مرتب نیز $\langle V, E \rangle$ بیان شود.

نکته: محل قرار گرفتن گره‌ها در یک گراف از نظر هندسی منحصر به فرد نیست و آنچه اهمیت دارد فقط ارتباط بین گره‌هاست.

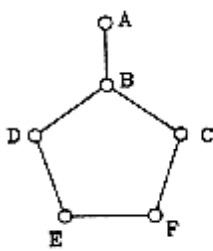
انواع گراف و تعاریف مربوطه

گراف جهت‌دار (Digraph): $D = \langle V, E \rangle$ که در آن V مجموعه‌ای از گره‌ها و $E \subseteq V \times V$ مجموعه‌ای است که به هر زوج مرتب در آن یک «لبه» یا «کمان» یا «یال» گفته می‌شود.

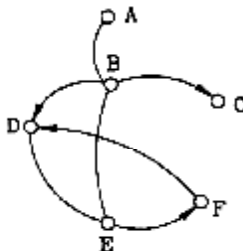
گراف غیرجهت‌دار (Undirect Graph): گرافی است که در آن همه‌ی لبه‌ها یا کمانها «زوجهای غیرمرتب» باشند.

گراف مخلوط (Mixed Graph): گرافی است که در آن بعضی از لبه‌ها جهت‌دار و بعضی غیرجهت‌دار باشند.

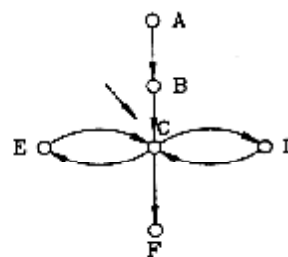
نمونه‌هایی از گرافهای یاد شده در شکل زیر نشان داده شده است.



(ج)



(ب)



(الف)

نمونه‌ای از گرافهای (الف) جهت‌دار (ب) مخلوط (ج) غیرجهت‌دار

گراف وزن‌دار (Weighted Graph): گرافی که در آن به هر لبه وزنی نسبت داده شود «گراف وزن‌دار» نامیده می‌شود، این وزن می‌تواند تعداد لبه‌های هم‌جهت باشد.

گره‌های مجاور: اگر بین دو گره لبه‌ای (جهت‌دار یا بدون جهت) موجود باشد، آن دو گره «گره‌های مجاور» نامیده می‌شوند.

گره‌ی منفرد (Isolated Node): گره‌ای که با هیچ گره‌ی دیگری مجاور نباشد.

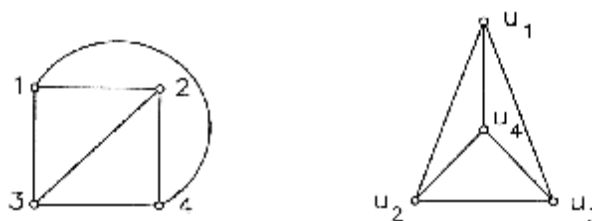
گراف پوچ (Null graph): گرافی که فقط شامل گره‌های منفرد باشد، «گراف پوچ» نامیده می‌شود.

گراف کامل: گراف کامل، گرافی است که بدون در نظر گرفتن جهت لبه‌ها بین هر دو گره‌ی متمایز آن یک لبه موجود باشد. یک

گراف کامل با n گره با k_n نمایش داده می‌شود.

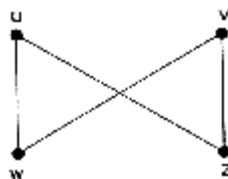
گراف مکمل یک گراف: مکمل گراف $G = (V, E)$ گراف $G' = (V, E')$ است که در آن $E' = E_k - E$ بطوری که $G_k = (V, E_k)$ یک گراف کامل باشد.

گراف‌های ایزومورفیک: دو گراف «ایزومورفیک» هستند اگر تناظر یک به یک بین گره‌ها و لبه‌های دو گراف وجود داشته باشد، بطوری که مجاورت گره‌ها همچنین جهت لبه‌ها در صورت وجود حفظ شوند. شکل زیر نمونه‌ای از دو گراف ایزومورفیک را نشان می‌دهد.



نمونه‌ای از دو گراف ایزومورفیک

گراف دو قسمتی: در گراف $G = (V, E)$ اگر V_1, V_2 لایر مجموعه‌هایی از V باشند بگونه‌ای که $V = V_1 \cup V_2$ و هر لبه‌ی موجود در گراف G یک گره از V_1 را به یک گره از V_2 لاصل کند، آنگاه گراف G یک «گراف دو قسمتی» است. شکل زیر یک گراف دو قسمتی را نشان می‌دهد.



گراف دو قسمتی

$$V_1 = \{u, v\} \quad ; \quad V_2 = \{w, z\}$$

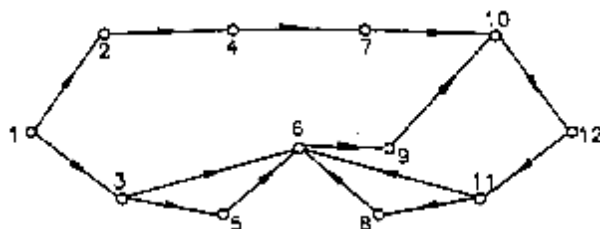
درجه ورودی و خروجی گره: در یک گراف جهت‌دار برای هر گره، تعداد لبه‌هایی که آغاز آنها در این گره باشد، «درجه خروجی» (Outdegree) یا $\deg^+$ گره و تعداد لبه‌هایی که پایان آنها در این گره باشد، «درجه‌ی ورودی» (Indegree) یا $\deg^-$ گره نامیده می‌شود. برای گراف‌های غیرجهت‌دار درجه‌ی هر گره جمع تعداد لبه‌های متصل به گره است.

درجه‌ی ورودی و خروجی مجموعه‌ای از گره‌ها: اگر $G = \langle V, E \rangle$ گراف جهت‌دار و $X \subseteq V$ باشد، تعداد لبه‌هایی از G را که گره‌ی آغاز آنها در X ولی گره‌ی پایانی آنها در X نباشد، «درجه‌ی خروجی مجموعه‌ی X » و بطور مشابه تعداد لبه‌هایی از G را که گره‌ی پایانی آنها در X ولی گره‌ی آغازی آنها در X نباشد، «درجه‌ی ورودی مجموعه‌ی X » گفته می‌شود.

نکته: در یک گراف غیرجهت‌دار تعداد گره‌های از درجه‌ی فرد، همواره زوج است.

مسیر و انواع آن

مسیر: هر دنباله از لبه‌های یک گراف اعم از جهت‌دار و غیر جهت‌دار که در آن گره‌ی پایانی هر لبه‌ی واقع در دنباله، گره‌ی آغازی لبه‌ی بعدی باشد، یک «مسیر» از گراف گفته می‌شود. بعنوان مثال در گراف شکل P_1 یک مسیر را مشخص می‌نماید.



یک گراف نمونه

$$P_1 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 7, 10 \rangle, \langle 10, 12 \rangle \}$$

مسیر P_1 با گره‌ی شماره‌ی 1 شروع می‌شود و با گره‌ی شماره‌ی 12 پایان می‌یابد.

طول مسیر: تعداد لبه‌های تشکیل‌دهنده‌ی یک مسیر، «طول مسیر» گفته می‌شود.

مسیر ساده: مسیری که در آن هیچ لبه‌ای بیش از یک بار ظاهر نشده باشد «مسیر ساده» نامیده می‌شود.

مسیر اصلی (Elementary Path – ابتدایی): مسیری که در آن از هیچ گره‌ای بیش از یک بار عبور نشده باشد، «مسیر اصلی» گفته می‌شود.

نکته: اگر مسیری اصلی باشد حتماً ساده است ولی مسیر ساده لزوماً اصلی نخواهد بود.

مدار: مسیری است که در آن رأس انتهایی مسیر و رأس ابتدایی آن بر هم منطبق باشند.

مدار ساده: مداری است که شامل لبه‌ای تکراری نباشد.

مدار اصلی (مدار ابتدایی – دور): مداری است که در آن از هیچ گره‌ای بیش از یک بار عبور نشود.

نکته: به مدار با تعریف فوق گاهی لفظ «سیکل» نیز اطلاق می‌شود.

نکته: اگر مسیری اصلی نباشد حتماً در آن مدار وجود دارد که اگر مدار حذف شود یک مسیر اصلی بوجود خواهد آمد.

حلقه: لبه‌ای است که گره‌ی ابتدایی و انتهایی آن یک گره باشد.

دسترسی‌پذیری (Reachable-Accessible): در یک گراف جهت‌دار $G = \langle V, E \rangle$ گره $a, b \in V$ گفته می‌شود گره‌ی b از

گره‌ی a دسترسی‌پذیر یا قابل دسترسی است، اگر مسیری از گره‌ی a به b در گراف وجود داشته باشد. فرض بر این است که هر گره با مسیری به طول صفر توسط خودش قابل دسترسی است.

نکته: دسترسی‌پذیری دارای خواص انعکاسی و انتقالی است ولی خاصیت متقارن یا نامتقارن ندارد.

Geodesic (کوتاهترین مسیر): اگر گره‌ای از گره‌ی دیگر دسترسی‌پذیر باشد، کوتاهترین مسیر بین آن دو «Geodesic» یا «مسیر با حداقل طول» گفته می‌شود.

فاصله‌ی دو گره: وقتی گره‌ای از گره‌ی دیگر دسترسی‌پذیر باشد، طول کوتاهترین مسیر، «فاصله‌ی دو گره» نامیده می‌شود و

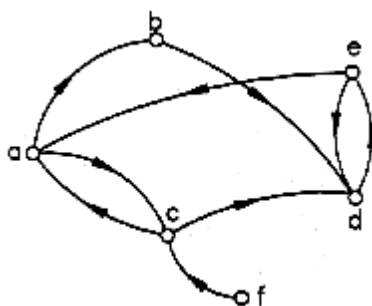
بصورت زیر نمایش داده می شود:

فاصله ی گره ی u از گره ی v $d(u, v) = v$

فاصله ی گره ی v از گره ی u $d(v, u) = u$

نکته: در یک گراف جهت دار برای دو گره که از یکدیگر دسترس پذیر باشند، ممکن است فاصله ی اولی تا دومی با فاصله ی دومی تا اولی برابر نباشد. اگر u از گره ی v دسترس پذیر نباشد می توان نوشت: $d(v, u) = \infty$ به عنوان مثالی از تعاریف فوق، در گراف شکل می توان نوشت:

$P_1 = \{ \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle \}$ یک مسیر اصلی از گره ی a به گره ی e با طول 3 می باشد و نیز همه گره ها بجز گره ی f از یکدیگر قابل دسترسی هستند. در این مثال بین گره های a, e دو مسیر بصورت زیر وجود دارند که هر دو به طول 3 هستند و می توان گفت $d(a, e) = 3$ ولی همانگونه که در شکل دیده می شود $d(e, a) = 1$ می باشد.



گراف و ماتریس مربوط به آن

$$P_1 = \{ \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle \}$$

$$P_2 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, e \rangle \}$$

در این گراف مسیر $P_3 = \{ \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, a \rangle \}$ یک مدار اصلی و ساده است.

نکته: در یک گراف جهت دار با n گره، طول مسیر اصلی حداکثر $n-1$ و طول یک مدار اصلی حداکثر n خواهد بود.

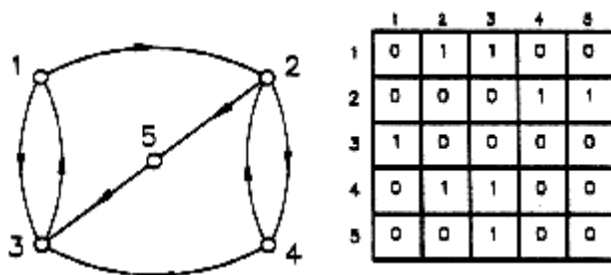
زیر گراف

اگر $V(H)$ مجموعه ی گره های گراف h و $V(G)$ مجموعه ی گره های گراف G و $V(H) \subseteq V(G)$ باشد، در صورتی که هر لبه ای از G نیز باشد، گفته می شود H یک زیر گراف از G است و بصورت $H \subseteq G$ نشان داده می شود.

نکته: گراف پوچ و گراف G ، زیر گراف های گراف G می باشند.

ماتریس گراف (همسایگی گراف)

این ماتریس مانند ماتریس روابط است. برای یک گراف جهت دار که دارای تعداد گره ی n است، ماتریس گراف بصورت $n \times n$ رسم می شود و به ازای هر لبه بین دو گره ی مجاور مقدار یک در خانه متناظر در ماتریس گراف منظور می گردد (فرض بر این است که لبه های موازی وجود ندارند). نمونه ای از ماتریس گراف در شکل آمده است.



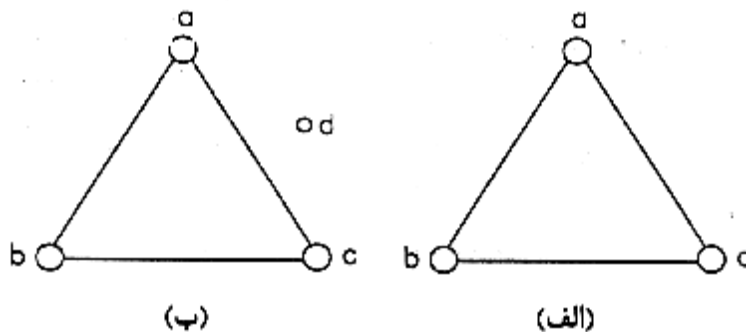
نکته: در ماتریس گراف وزن دار، وزن هر لبه بعنوان درایه‌ی ماتریس گراف منظور می‌شود.

گرافهای همبند (متصل)

مفهوم همبندی برای گرافهای جهت دار و غیرجهت دار متفاوت است که در ادامه گرافهای جهت دار همبند و گرافهای غیرجهت دار همبند معرفی می‌گردند.

گراف غیرجهت دار همبند

یک گراف غیرجهت دار، همبند گفته می‌شود اگر هر دو گره‌ی دلخواه از آن از یکدیگر دسترس پذیر باشند. شکل زیر یک گراف بی جهت همبند و یک گراف بی جهت ناهمبند را نشان می‌دهد.



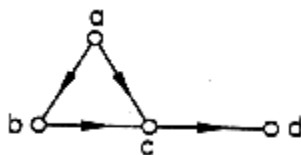
گرافهای بی جهت (الف) همبند (ب) ناهمبند

گراف جهت‌دار همبند

گراف‌های جهت‌دار به سه صورت می‌توانند متصل باشند:

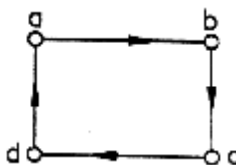
الف) متصل بطور ضعیف (Weakly Connected): یک گراف جهت‌دار است که بدون در نظر گرفتن جهت لبه‌ها، مانند یک گراف بدون جهت همبند باشد.

ب) متصل یکطرفه (Unilaterally Connected): یک گراف جهت‌دار است که برای هر دو گرهی دلخواه در آن حداقل یکی از دیگری دسترس‌پذیر باشد.



گراف متصل یک طرفه

ج) متصل قوی (Strongly Connected): یک گراف جهت‌دار است که برای هر دو گرهی دلخواه در آن هر دو از یکدیگر دسترس‌پذیر باشند.



گراف متصل قوی

مسیرها و مدارهای اولری

مسیر اولری: در یک گراف مسیری است که از هر یک از لبه‌های گراف فقط و فقط یکبار عبور کند.

مدار اولری: در یک گراف مداری است که از هر یک از لبه‌های گراف فقط و فقط یکبار عبور کند.

نکته: برای یک گراف غیر جهت‌دار $G = \langle V, E \rangle$ می‌توان نوشت:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

که در آن $|E(G)|$ تعداد لبه‌های گراف G می‌باشد.

نکته: در یک گراف غیرجهت‌دار تعداد گره‌ها از درجه‌ی فرد همواره زوج است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مدار اولری در یک گراف غیرجهت‌دار آن است که درجه‌ی تمامی گره‌های آن زوج باشد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مدار اولری در یک گراف غیرجهت‌دار آن است که درجه‌ی تمامی گره‌های آن زوج باشد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مسیر اولری در یک گراف غیرجهت‌دار آن است که همبند بوده و فقط دارای دو رأس از درجه‌ی فرد باشد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مدار اولری در گراف جهت‌دار $\vec{G} = (V, E)$ آن است که همبند بوده و برای هر $v \in V$ بتوان نوشت:



$$\deg^-(v) = \deg^+(v)$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مسیر اولری در گراف جهت دار $G=(V, E)$ آن است که همبند بوده و برای هر گره

$$\deg^-(v) = \deg^+(v) \quad v \in V \text{ بتوان نوشت:}$$

و یا دو گره v_1, v_2 یافت شوند که برای آنها رابطه زیر برقرار باشد:

$$\deg^-(v_2) = \deg^+(v_2) + 1$$

$$\deg^-(v_1) = \deg^+(v_1) + 1$$

مسیرها و دورهای (مدارهای) هامیلتونی

مسیر هامیلتونی: مسیری است که از هر رأس گراف فقط و فقط یکبار عبور کند.

دورهای هامیلتونی: مداری است که از هر رأس گراف فقط و فقط یکبار عبور کند.

قضیه (9-22) اگر در یک گراف ساده و بدون حلقه برای هر دو رأس غیرمجاور v_2, v_1 بتوان نوشت:

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) \geq n - 1$$

آنگاه گراف مزبور دارای مسیر هامیلتونی است.

قضیه: اگر K_n یک گراف جهت دار کامل باشد، یعنی برای هر دو گره متمایز x, y حداقل یکی از دو لبه $\langle x, y \rangle$ یا $\langle y, x \rangle$

متعلق به گراف K_n باشد، آنگاه K_n دارای مسیر هامیلتونی است.

قضیه: اگر در یک گراف ساده غیرجهت دار و بدون حلقه برای هر دو گره غیرمجاور v_2, v_1 بتوان نوشت:

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) \geq n$$

آنگاه گراف دارای مدار هامیلتونی است.

قضیه: اگر یک گراف ساده و بدون حلقه با n گره حداقل $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ لبه داشته باشد، آنگاه گراف دارای مدار هامیلتونی

است.

قضیه: در هر گراف دو قسمتی اگر تعداد عناصر دو قسمت گراف (v_2, v_1) برابر نباشند، یعنی $|V_1| \neq |V_2|$ آنگاه این گراف دارا

مدار هامیلتونی نیست.

یافتن مسیر بهینه (کوتاهترین مسیر) در گراف

استفاده از ماتریسهای گراف و مسیر

برای یافتن کوتاهترین مسیر بین دو گره در یک گراف با n گره بصورت زیر عمل می شود:

1- یک ماتریس $n \times n$ برای گراف در نظر گرفته می شود که هر درایه ی آن مشخص کننده ی طول مسیر بین دو گره از گراف

براساس وزنه لبه ی بین آن دو می باشد. مسیر بین هر گره با خودش طول صفر دارد و طول مسیر دو گره ای که ارتباط مستقیم

ندارند ∞ در نظر گرفته می شود.

2- اگر هر عنصر ماتریس بصورت a_{ij} نمایش داده شود، براساس عناصر a_{ii} (عناصر روی قطر اصلی) درایه های دیگر بصورت زیر

$$i \leq j \leq n$$

تغییر داده می شوند.

اگر a_{ik} بیانگر عناصر سطر i ام باشند ($1 \leq k \leq n$) و a_{ji} مبین عناصر ستون i ام ($1 \leq j \leq n$)، آنگاه عنصر $a_{ik} + a_{ji}$ برابر مینیمم مقدار قبلی خود و حاصل جمع $a_{ik} + a_{ji}$ می‌گردد.

3- بعد از انجام مرحله 2 برای تمامی عناصر روی قطر اصلی ماتریس حاوی کوتاهترین مسیر بین دو گره می‌باشد.

نکته: الگوریتم بالا به الگوریتم «وارشال» معروف است و تنها طول کوتاهترین مسیر را می‌دهد و برای بدست آوردن خود مسیر بهینه بصورت زیر عمل می‌شود:

1- ماتریس $n \times n$ دیگری بعنوان ماتریس مسیره با درایه‌های a'_{ji} نظیر درایه‌های ماتریس قبلی در نظر گرفته می‌شود.

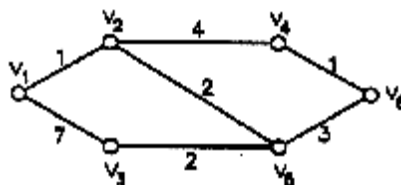
2- هر عنصر ماتریس یا $\emptyset$ یا $\$$ می‌باشد. اگر بین دو گره‌ی گراف مسیر مستقیمی موجود باشد درایه‌ی مربوط به دو گره‌ی $\emptyset$ و اگر مسیر مستقیمی وجود نداشته باشد درایه‌ی مربوطه، $\$$ فرض می‌شود.

3- اگر درایه‌ای از ماتریس الگوریتم وارشال (a_{ji}) تغییر کند، درایه متناظر در ماتریس مسیر (a'_{ji}) نیز تغییر می‌نماید. بدین صورت که بجای درایه‌ی a'_{ji} ، مسیر بین دو گره‌ی v_i, v_j را وارد کرده، به دنبال آن خود گره‌ی v_i و سپس مسیر بین v_i, v_k درج شود یا بعبارت دیگر:

$$a'_{jk} = a'_{ji} + v_i + a'_{ik}$$

در صورتی که در الگوریتم وارشال a_{jk} با $a_{ji} + a_{ik}$ برابر باشد (∞ شامل رابطه‌ی تساوی نمی‌شود) a'_{jk} در درایه باقی می‌ماند در کنار آن $a'_{ji} + v_i + a'_{ik}$ نیز قرار می‌گیرد.

بعنوان مثال در گراف غیر جهت‌دار مقابل تعیین کوتاهترین مسیر و طول آن در مراحل مختلف صورت می‌گیرد که این مراحل بصورت تغییرات ماتریس گراف (الگوریتم وارشال) و ماتریس مسیره نشان داده شده‌اند.



نمونه‌ای از گراف برای تعیین کوتاهترین مسیر

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	$\emptyset$	1	7	∞	∞	∞
v_2	1	$\emptyset$	∞	4	2	∞
v_3	7	∞	$\emptyset$	∞	2	∞
v_4	∞	4	∞	$\emptyset$	∞	1
v_5	∞	2	2	∞	$\emptyset$	3
v_6	∞	∞	∞	1	3	$\emptyset$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\$$	$\$$	$\$$
v_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\$$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\$$
v_3	$\emptyset$	$\$$	$\emptyset$	$\$$	$\emptyset$	$\emptyset$
v_4	$\$$	$\emptyset$	$\$$	$\emptyset$	$\$$	$\emptyset$
v_5	$\$$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\$$	$\emptyset$	$\emptyset$
v_6	$\$$	$\$$	$\$$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

مرحله دوم:

$\emptyset$	۱	۷	∞	∞	∞
۱	$\emptyset$	۸	۴	۲	∞
۷	۸	$\emptyset$	∞	۲	∞
∞	۴	∞	$\emptyset$	∞	۱
∞	۲	۲	∞	$\emptyset$	۳
∞	∞	∞	۱	۳	$\emptyset$

$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	S	S
$\emptyset$	$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	$\emptyset$	S
$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	S	$\emptyset$	S
S	$\emptyset$	S	$\emptyset$	S	$\emptyset$
S	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$	$\emptyset$
S	S	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

مرحله سوم:

$\emptyset$	۱	۷	۵	۳	∞
۱	$\emptyset$	۸	۴	۲	∞
۷	۸	$\emptyset$	۱۲	۲	∞
۵	۴	۱۲	$\emptyset$	۶	۱
۳	۲	۲	۶	$\emptyset$	۳
∞	∞	∞	۱	۳	$\emptyset$

$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	v_2	v_2	S
$\emptyset$	$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	$\emptyset$	S
$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	$v_1 v_2$	$\emptyset$	S
v_2	$\emptyset$	$v_2 v_1$	$\emptyset$	v_2	$\emptyset$
v_2	$\emptyset$	$\emptyset$	v_2	$\emptyset$	$\emptyset$
S	S	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

مرحله چهارم:

$\emptyset$	۱	۷	۵	۳	∞
۱	$\emptyset$	۸	۴	۲	∞
۷	۸	$\emptyset$	۱۲	۲	∞
۵	۴	۱۲	$\emptyset$	۶	۱
۳	۲	۲	۶	$\emptyset$	۳
∞	∞	∞	۱	۳	$\emptyset$

$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	v_2	v_2	S
$\emptyset$	$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	$\emptyset$	S
$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	$v_1 v_2$	$\emptyset$	S
v_2	$\emptyset$	$v_2 v_1$	$\emptyset$	v_2	$\emptyset$
v_2	$\emptyset$	$\emptyset$	v_2	$\emptyset$	$\emptyset$
S	S	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

مرحله پنجم:

$\emptyset$	۱	۷	۵	۳	۶
۱	$\emptyset$	۸	۴	۲	۵
۷	۸	$\emptyset$	۱۲	۲	۱۳
۵	۴	۱۲	$\emptyset$	۶	۱
۳	۲	۲	۶	$\emptyset$	۳
۶	۵	۱۳	۱	۳	$\emptyset$

$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	v_2	v_2	$v_2 v_2$
$\emptyset$	$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	$\emptyset$	v_1
$\emptyset$	v_1	$\emptyset$	$v_1 v_2$	$\emptyset$	$v_1 v_2 v_2$
v_2	$\emptyset$	$v_2 v_1$	$\emptyset$	v_2	$\emptyset$
v_2	$\emptyset$	$\emptyset$	v_2	$\emptyset$	$\emptyset$
$v_2 v_2$	v_2	$v_2 v_2 v_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

مرحله ششم:

$\emptyset$	۱	۵	۵	۳	۶
۱	$\emptyset$	۴	۴	۲	۵
$\emptyset$	۵	۴	۸	۲	۵
۵	۴	۸	$\emptyset$	۶	۱
۳	۲	۲	۶	$\emptyset$	۳
۶	۵	۵	۱	۳	$\emptyset$

$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{v_2 v_5}$	v_2	v_2	$v_2 v_2, v_2 v_5$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{v_5}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$v_2 v_5$
$\boxed{v_5 v_2}$	v_5	$\emptyset$	$v_5 v_2$	$\emptyset$	v_5
v_2	$\emptyset$	$\boxed{v_2 v_5}$	$\emptyset$	$\boxed{v_2}$	$\emptyset$
v_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{v_2}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$v_2 v_2, v_5 v_2 \quad v_2, v_5 \quad v_5 \quad \emptyset \quad \emptyset$					

مرحله نهایی:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$v_2 v_5$	v_2	v_2	$v_2 v_2, v_2 v_5$
v_2	$\emptyset$	$\emptyset$	v_5	$\emptyset$	$\emptyset$	v_2, v_5
v_3	$v_5 v_2$	v_5	$\emptyset$	$v_5 v_5$	$\emptyset$	v_5
v_4	v_2	$\emptyset$	$v_5 v_5$	$\emptyset$	v_6	$\emptyset$
v_5	v_2	$\emptyset$	$\emptyset$	v_6	$\emptyset$	$\emptyset$
v_6	$v_2 v_2, v_5 v_2$	v_2, v_5	v_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	$\emptyset$	۱	۵	۵	۳	۶
v_2	۱	$\emptyset$	۴	۴	۲	۵
v_3	۱	$\emptyset$	۴	۴	۲	۵
v_4	۵	۴	۶	$\emptyset$	۴	۱
v_5	۳	۲	۲	۲	$\emptyset$	۳
v_6	۶	۵	۵	۱	۳	$\emptyset$

دو ماتریس حاصل در مرحله‌ی نهایی همان ماتریسهای موردنظر هستند که یکی طول مسیرهای بهینه و دیگری خود مسیرهای بهینه را در خود دارند، مثلاً بین دو گره‌ی v_6, v_1 گره‌های $v_2 v_4, v_2 v_5$ موجود می‌باشند و دو مسیر بهینه $v_6 v_5 v_2 v_1, v_6 v_4 v_2 v_1$ را می‌دهند و طول مسیر بهینه نیز برابر 6 می‌باشد.

الگوریتم Dijkstra

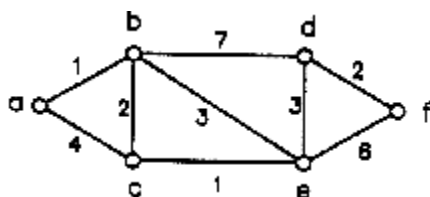
$G = (V, E, \varphi)$ یک گراف وزن دار است که در آن φ تابعی از E به مجموعه‌ی اعداد حقیقی و مثبت است، که این اعداد حقیقی و مثبت وزن لبه‌های گراف می‌باشند.

در صورتی که هدف یافتن کوتاهترین مسیر را از a به z ($a, z \in V$) در گراف G باشد تعیین این مسیر بهینه طی مراحل زیر انجام می‌گیرد:

- 1- ابتدا $T = V - \{a\}$ و برای هر $w(a, t), t \in T$ کوتاهترین مسیر (وزن) بین گره‌های $a, t, l(t)$ در $P = \{a\}$ در نظر گرفته می‌شوند.
- 2- $x \in T$ گرهی است که دارای کوچکترین وزن از مجموعه‌ی P است که تعیین می‌گردد.
- 3- اگر x گرهی باشد که کوتاهترین مسیر تا آن مدنظر است، الگوریتم خاتمه می‌یابد، در غیر این صورت دو مجموعه‌ی جدید $T' = T - \{x\}, P' = P \cup \{x\}$ تعریف می‌شوند و برای هر $l'(t), t \in T'$ مجدداً بعنوان کوتاهترین مسیر تا این مرحله از رابطه‌ی $l'(t) = l(t) + w(x, t)$ محاسبه می‌شود.

4- مراحل 2 و 3 با P' به جای P ، و T' بجای T ، $l'(t)$ بجای $l(t)$ تکرار می‌شوند.

بعنوان مثال گراف غیرجهت دار زیر مفروض است:



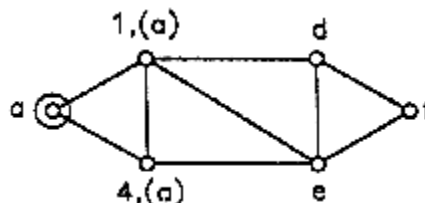
نمونه‌ای از گراف برای تعیین کوتاهترین مسیر

در مراحل مختلف P , T , $l(t)$ تغییر می کنند که تغییرات آنها بصورت زیر می باشند:

$$P = \{a\}$$

$$T = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$l(t) = 0$$

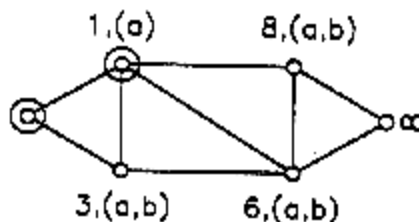


مرحله ی اول:

$$P = \{a, b\}$$

$$T = \{c, d, e, f\}$$

$$l(t) = 1$$

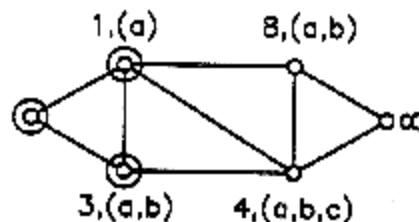


مرحله ی دوم:

$$P = \{a, b, c\}$$

$$T = \{d, e, f\}$$

$$l(t) = 3$$

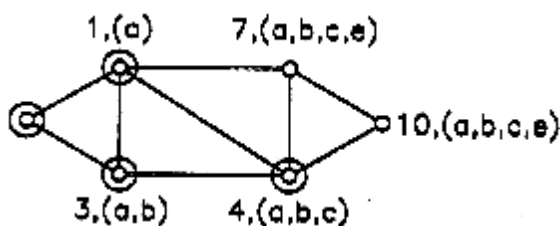


مرحله ی سوم:

$$P = \{a, b, c, e\}$$

$$T = \{d, f\}$$

$$l(t) = 4$$

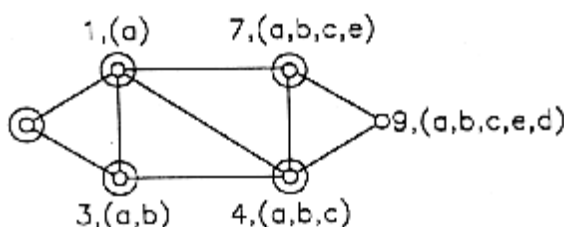


مرحله ی چهارم:

$$P = \{a, b, c, e, d\}$$

$$T = \{f\}$$

$$l(t) = 7$$



مرحله پنجم

و در مرحله ی نهایی $l(t) = 9$, $T = \emptyset$, $P = V$ می شود که مسیر بهینه را نیز همزمان با طول بهینه می توان بدست آورد که در این

مثال بصورت $\{(a, b), (b, c), (c, e), (e, d), (d, f)\}$ می باشد.

رنگ آمیزی گراف

هدف از ارائه این مفهوم، این است که چگونه می توان در یک گراف از مجاورت غیرمجاز (همسایگی) دو گره جلوگیری بعمل آورد. رنگ آمیزی گراف به مفهوم نسبت دادن رنگهای مختلف به گره های یک گراف است به گونه ای که مجاورت بعضی از رنگها تحت شرایط خاصی ممکن باشد.

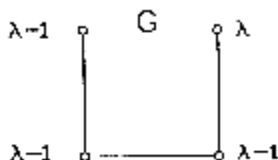
رنگ آمیزی proper: گراف بدون جهت G بصورت Proper رنگ آمیزی شده است اگر هیچ دو گره ی مجاور هم رنگ نباشند.

عدد کروماتیک (Chromatic): حداقل تعداد رنگهای مورد نیاز برای رنگ آمیزی یک گراف «عدد کروماتیک» (عدد قامی) نامیده می شود و با $X(G)$ یا $\lambda_{\min}$ نمایش داده می شود.

چند جمله ای کروماتیک

در گراف $G(V, E)$ ، تابع $P(G, \lambda)$ که تعداد رنگ آمیزی های متمایز گراف G را با توجه به تعداد رنگ مشخص می نماید معرف «چند جمله ای کروماتیک» یا «چند جمله ای رنگ» است.

بعنوان مثال در یک گراف مانند $G(V, E)$ با تعداد $|V|$ گره و تعداد رنگ در دسترس λ با توجه به اینکه هر گره رنگ می تواند بخود بگیرد (در حالت عادی بدون وجود شرط خاصی در رنگ آمیزی)، تعداد رنگ آمیزی متمایز $\lambda^{|V|}$ خواهد بود و حداقل تعداد رنگ مورد نیاز برابر یک است $(\lambda_{\min} = 1)$ با گذاشتن شرط یکسان نبودن رنگ گره های مجاور با توجه به شکل تعداد رنگ آمیزی های متمایز محدودتر می شود و بعنوان نمونه برای رنگ گراف شکل مقابل، بصورت زیر است:



$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$$

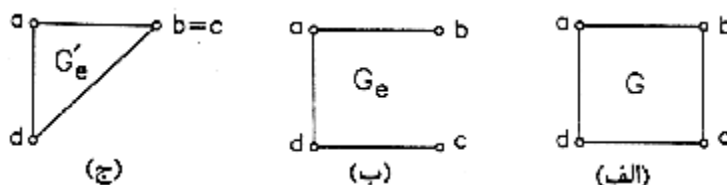
قضیه (9-27) برا هر گراف $G(V, E)$ ، اگر G_e معرف گرافی باشد که با حذف لبه $e \in E$ از گراف G بدست آید و نیز G'_e گرافی باشد که از انطباق دو انتهای لبه ی حذف شده در گراف G_e حاصل شود، آنگاه رابطه ی زیر بین چند جمله ای های کروماتیک سه گراف برقرار است:

$$P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda)$$

بعنوان مثال از گراف G در شکل الف دو گراف G_e ، G'_e در شکل ب و شکل ج را می توان تولید نمود و بصورت زیر تعداد رنگ آمیزی های متمایز با توجه به تعداد رنگ قابل دسترس (λ) با شرط هم رنگ نبودن گره های مجاور بدست می آید:

$$P(G, \lambda) = P(G_e, \lambda) - P(G'_e, \lambda)$$

$$\Rightarrow P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow P(G, \lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda$$

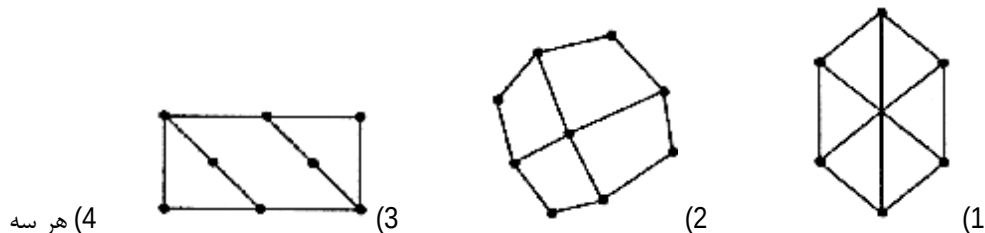


گراف اصلی و دو گراف تولید شده برای به دست آوردن چند جمله ای رنگ

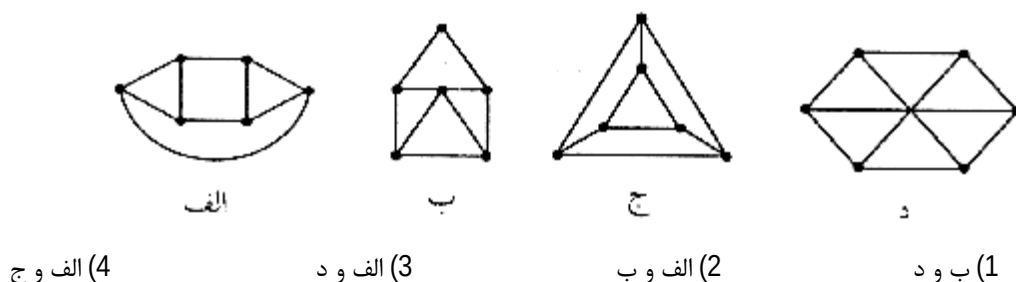
که با توجه به $P(G, \lambda)$ بدست آمده، کمترین مقدار لازم برای (عدد کروماتیک)، عدد 2 می باشد که حاصل $P(G, \lambda)$ را مثبت می کند.

تست‌های گراف

۱- کدام یک از گراف‌های مشخص شده دو قسمتی است؟



۲- کدام یک از گراف‌های زیر یک ریخت (Isomorphic) می‌باشند؟



۳- فرض کنید G گرافی با n راس و e یال باشد. اگر $n \leq e$ آنگاه G

- (1) همبند است.
- (2) اویلری است.
- (3) راس درجه یک دارد
- (4) شامل حداقل یک دور است.

۴- فرض کنید G یک گراف n راسی است؛ به طوری که G با مکملش یکرخت (ایزومورف) است. در این صورت n برابر کدامیک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

- (1) 19
- (2) 31
- (3) 30
- (4) 21

۵- فرض کنید رئوس گراف G نظیر زیر مجموعه‌های ۲ عضوی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشند. دو راس در این گراف با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر مجموعه‌های ۲ عضوی نظیر آن دو راس اشتراکشان تهی باشد. کدام گزاره صحیح نیست؟

- (1) گراف G دو بخشی است.
- (2) گراف G 10 رأس دارد.
- (3) گراف G شامل 15 یال است.
- (4) گراف G همبند است.

۶- کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله درجات رئوس یک گراف ساده است؟ (کدام n تایی گرافیکسال است؟)

- (1) 4, 3, 2, 1, 1
- (2) 3, 3, 3, 1
- (3) 6, 6, 5, 3, 3, 3, 1
- (4) 7, 6, 4, 3, 3, 3, 1, 1

۷- کدامیک از دنباله‌های زیر دنباله درجات گراف ساده است؟

- (1) 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2
- (2) 5, 4, 4, 4, 2, 1
- (3) 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1
- (4) 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1, 1

۸- اگر G گرافی ۱۶ رأسی فاقد مثلث باشد آنگاه حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با

- (1) 63 (2) 62 (3) 64 (4) 60

۹- چند دور چهار رأسی (C_4) در گراف دو بخشی $K_{7,7}$ به عنوان زیر گراف ظاهر شده است؟

- (1) 441 (2) 686 (3) 931 (4) 1001

۱۰- فرض کنید گراف ساده n - رأسی G ، دقیقاً n یال داشته باشد. کدام گزاره همیشه برقرار است؟

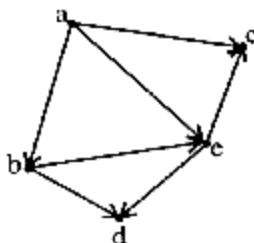
- (1) G یک رأس با درجه‌ی ۲ دارد. (2) G حداقل یک دور است.
(3) G همبند است. (4) G دو بخشی است.

۱۱- فرض کنید زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, K, n\}$ ($n \geq 1383$)، نظیر رئوس گراف G باشند و دو رأس در گراف G به

یکدیگر متصل هستند، اگر اشتراک مجموعه‌های نظیر تهی باشد، کدام گزاره صحیح است؟

- (1) گراف همبند است. (2) گراف همیلتنی است. (3) گراف دو بخشی است. (4) گراف منظم است.

۱۲- گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر یک پایگاه رأس برای این گراف می‌باشد؟

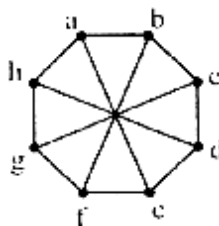


- (1) $\{a, e\}$ (2) $\{a, f\}$ (3) $\{a, e, f\}$ (4) $\{a, b, f\}$

۱۳- در نگاره‌ای با ۸ راس که درجه تمام رئوس ۳ باشد، چند نگاره متقابل غیرهمشکل (غیرایزومورف) وجود دارند.

یک مثال در شکل دیده می‌شود.

Non-isomorphic, 8 vertex, 3-regular graph



- (1) 3 تا (2) 4 تا (3) 5 تا (4) 6 تا

۱۴- کدام گزاره نادرست است؟

(1) گراف کامل دو بخشی $K_{3,4}$ مسطح نیست.

(2) اگر $G = (V, E)$ گرافی بدون حلقه و همبند بوده $|E| > \frac{|V|^2}{4}$ ، آنگاه G دو بخشی نیست.

(3) اگر G دوره‌ای بر روی n راس بوده و مکمل آن $\bar{G}$ با G یکریخت (ایزومورف) باشد، آنگاه $n = 5$.

(4) گراف بدون حلقه، همبند و بدون جهتی با ۸ راس وجود دارد که درجه رئوس آن ۱, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7 است.

۱۵- اگر G یک گراف ساده ۱۰۰ راسی و ۱۰۰ یالی باشد، کدام گزاره نادرست است؟

- (1) G دقیقاً یک دور یکتا دارد.
 - (2) تعداد دورهای G همواره بزرگتر یا مساوی یک است.
 - (3) G حداقل یک راس از درجه بزرگتر یا مساوی 2 دارد.
 - (4) تعداد رئوس با درجه فرد در G زوج است.
- ۱۶- گراف G روی مجموعه‌ی رئوس $\{1, 2, 3, K, 9\}$ به این صورت ساخته شده است که $\{x, y\}$ یال G است اگر و فقط اگر حاصل ضرب $x \times y$ مضرب ۳ باشد. کدام گزاره نادرست است؟

- (1) گراف G هامیلتونی نیست. (2) تعداد یال‌های G ، 21 تا است.
 - (3) G مسطح است.
 - (4) گراف G دو بخشی نیست.
- ۱۷- دنباله درجه‌ای یک گراف ساده ۶ راسی به ترتیب نزولی به صورت $5, 4, x, y, 2$ است. کدام گزاره نادرست است؟
- (1) تعداد یال‌های گراف حداقل 11 است.
 - (2) این گراف لزوماً مسطح نیست.
 - (3) لزوماً $x = y$ است.
 - (4) حاصل ضرب $x \times y$ حتماً زوج است.

۱۸- گراف دارای ماتریس همسایگی (adjacency matrix) زیر:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) یک گراف مسطح، غیرمتصل و با دور است.
 - (2) یک گراف مسطح، متصل و بدون دور است.
 - (3) یک گراف مسطح، غیرمتصل و بدون دور است.
 - (4) یک گراف مسطح، متصل و با دور است.
- ۱۹- کدام گزاره برای گراف همبند G با فقط یک دور همواره صحیح است؟
- (1) بین هر دو رأس G حداکثر یک مسیر وجود دارد.
 - (2) تعداد رئوس درجه یک G حداقل $2 - \Delta(G)$ است.
 - (3) گراف G ، با دور n - رأسی (C_n) یکرخت است.
 - (4) تعداد یال‌های G اکیداً بیش از تعداد رأس‌های آن است.
- ۲۰- کدام گزاره صحیح است؟

- (1) برای هر $n \geq 2$ گرافی n رأسی وجود دارد که هم هامیلتونی و هم اویلری است.
 - (2) هر گرافی که هم اویلری و هم هامیلتونی باشد حتماً منظم است.
 - (3) هر گراف 3- منظم اویلری است.
 - (4) هر گراف 3- منظم هامیلتونی است.
- ۲۱- فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G) = \{A \mid A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |A| = 2\}$ باشد. دو رأس A ، B متصل هستند اگر $A \cap B = \emptyset$. گراف G چند مثلث دارد؟

۲۲- گراف ساده G با ۱۰ رأس و ۱۵ یال داده شده است که ۵ رأس آن درجه‌ی یک هستند کدام گزینه صحیح نیست؟

(1) ماکزیمم درجه گراف بزرگتر یا مساوی پنج است. (2) گراف G ، دوازده دور پنج‌تایی دارد.

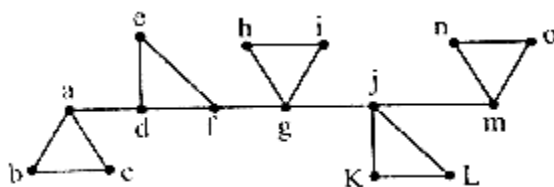
(3) گراف G ، ده دور سه‌تایی دارد. (4) گراف G ، شانزده دور چهارتایی دارد.

۲۳- فرض کنید G_n یک گراف n -رأس با ماتریس مجاورت $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ، که در آن (پیمانه ۲) $a_{ik} = i + j$ داده شده باشد. کدام گزاره نادرست است؟

(1) G_n دو بخشی است. (2) G_n مسطح است. (3) G_n منظم است. (4) G_n هامیلتونی است.

۲۴- عدد کروماتیک و عدد کروماتیک یال (edge chromatic number): (حداقل تعداد رنگ برای رنگ کردن یال‌های

یک گراف به قسمتی که دو یال که در یک رأس مشترک هستند، هم‌رنگ نباشند) گراف زیر چند است؟



(2) عدد کروماتیک: 4

(1) عدد کروماتیک: 3

عدد یال: 3

عدد یال: 4

(4) عدد کروماتیک: 3

(3) عدد کروماتیک: 4

عدد یال: 3

عدد یال: 3

۲۵- در گراف کامل K_9 اگر از یک رأس شروع کنیم، چند سیکل (دور) همیلتنی مختلف وجود دارد؟

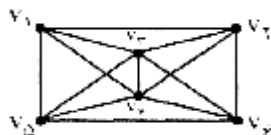
(4) $\frac{9!}{18}$

(3) $\frac{9!}{8}$

(2) $\frac{9!}{16}$

(1) $8!$

۲۶- گراف زیر مفروض است:



(1) گراف همیلتنی و اولری است.

(2) همیلتنی است و حداقل یک مسیر اولری دارد.

(3) اولری است و حداقل یک مسیر همیلتنی دارد.

(4) اولری است ولی همیلتنی نیست.

۲۷- فرض کنید k_{16} یک گراف غیرجهت‌دار باشد. کدامیک از عبارات زیر در مورد k_{16} صادق است؟

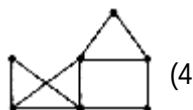
(2) نه مدار اولری دارد و نه مدار همیلتنی.

(1) هم مدار اولری دارد و هم مدار همیلتنی.

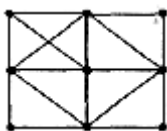
(4) مدار اولری دارد ولی همیلتنی ندارد.

(3) مدار همیلتنی دارد ولی اولری ندارد.

۲۸- گراف همیلتنی نیست.



(4)



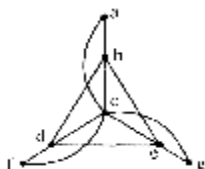
(3)

(2) گراف دو بخش $K_{7,8}$

(1) گراف کامل K_{10}

۲۹- گراف $G(V, E)$ نشان داده شده در شکل زیر مفروض است. کدامیک از عبارتهای زیر در مورد

گراف مزبور صادق است؟



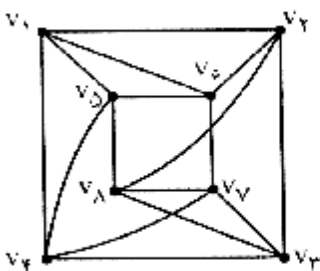
(1) G هم دارای مدار اولری است و هم دارای مدار همیلتنی.

(2) G مدار اولری دارد؛ ولی شامل مدار همیلتنی نیست.

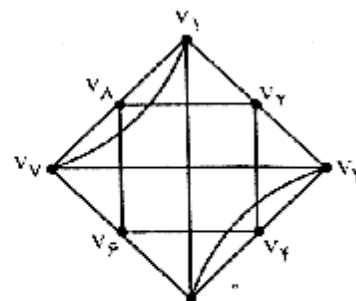
(3) G مدار همیلتنی دارد؛ ولی شامل مدار اولری نیست.

(4) G نه دارای مدار اولری است و نه مدار همیلتنی.

۳۰- گرافهای G_1, G_2 مطابق شکل زیر داده شده‌اند: کدام گزینه صحیح است؟



G_1



G_2

(1) G_1, G_2 ایزومورف هستند.

(3) G_1 اولری و G_2 مسطح است.

(2) G_1 مسطح و G_2 اولری است.

(4) G_1 همیلتنی و G_2 دو بخشی است.

۳۱- تعداد دورهای همیلتونی در گراف دو بخشی کامل $(n \geq k_{n,n})$ برابر است با

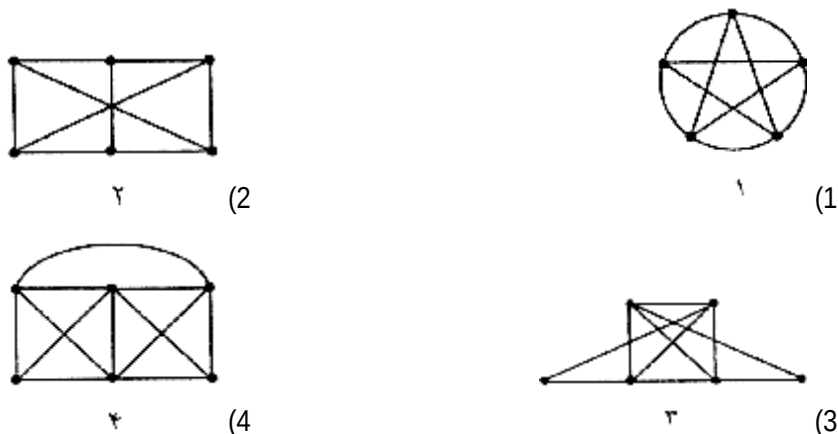
(4) $(n+1)n!$

(3) $\frac{1}{2}(n-1)n!$

(2) $n!(n-1)!$

(1) $\frac{n!}{2}$

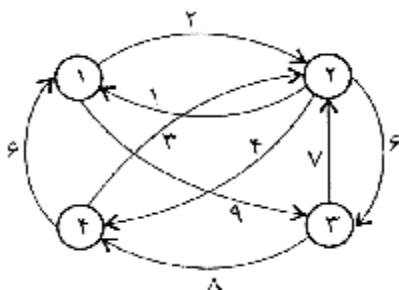
۳۲- کدام گراف هامنی (مسطح) است؟



۳۳- گراف دو بخشی کامل $K_{7,7}$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم ۴ یال انتخاب کنیم که هیچ دو تایی به هم متصل نباشند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

(1) $4 \binom{14}{8}$ (2) $4! \binom{14}{8}$ (3) $4!^2 \binom{7}{4}$ (4) $4! \binom{7}{4}^2$

۳۴- دیاگراف وزن دار زیر مفروض است. سیکل بهینه همیلتنی در این دیاگراف که از گره شماره ۱ شروع می‌شود دارای کدامیک از اوزان زیر می‌باشد؟



(1) 21 (2) 22 (3) 26 (4) 12

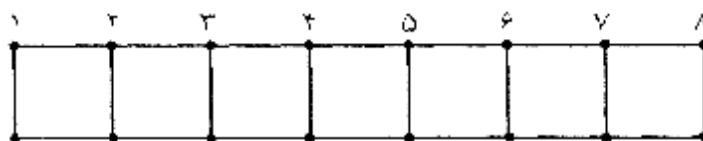
۳۵- اگر M ماتریس اتصال (adjacency) گراف G بوده و $M^k = [x_{ik}]$ ، آنگاه

- (1) x_{ij} تعداد مسیرهای بین رأس i و رأس j که از رأس k می‌گذرند.
- (2) x_{ij} تعداد مسیرهای به طول k از رأس i به رأس j است.
- (3) x_{ij} تعداد راهپای (walk) به طول k از رأس i به رأس j است.
- (4) x_{ij} تعداد راهپای (walk) بین رئوس i و j است که از رأس k می‌گذرند.

۳۶- تعداد تطابقهای کامل گراف کامل هشت رأسی K_8 برابر است با

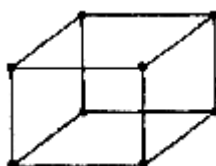
(1) 105 (2) $8!$ (3) $7!$ (4) 100

۳۷- تعداد تطابق‌های کامل گراف زیر چندتا است؟



- 32 (1) 33 (2) 34 (3) 35 (4)

۳۸- تعداد تطابق‌های کامل در مکعب ۳ بعدی برابر است با:



- 6 (1) 9 (2) 12 (3) 24 (4)

۳۹- فرض کنید گرافی ۲۱ رأسی داریم که ۱۹ رأس درجه‌ی ۴ و ۲ رأس درجه‌ی ۳ دارد. مینیمم تعداد رنگی که لازم است تا بالهای گراف را رنگ آمیزی کنیم به طوری که هر دو یال متصل رنگهای متفاوت داشته باشند برابر است با:

- 2 (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4)

۴۰- مجموعه رئوس گراف G تمام زیر مجموعه‌های مجموعه ۳ عنصری $\{a, b, c\}$ است که رأس A به B وصل است، اگر و فقط اگر اندازه تفاضل متقارن $A \Delta B$ برابر یک باشد ($|A \Delta B| = 1$) کدام گزاره نادرست است؟

- (1) G اویلری نیست. (2) G 3 منظم است. (3) G مسطح نیست. (4) G همیلتنی است.

۴۱- گراف G روی مجموعه رئوس $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ به این صورت ساخته شده است که $\{X, Y\}$ یال G است اگر و تنها اگر $x - y$ به پیمانه ۷ یکی از اعضای $\{2, 3, 4, 5\}$ باشد. کدام گزاره نادرست است؟

- (1) G گراف دو بخشی است. (2) G گرافی 4-منظم است. (3) G گرافی ساده است. (4) G گرافی همبند است.

۴۲- در گرافی ۳-منظم n راسی و m یالی داریم $2m + 6n = 90$ در این صورت تعداد رئوس برابر است با:

- 6 (1) 8 (2) 10 (3) 12 (4)

۴۳- اگر G گرافی ۱۳۸۶ راسی باشد و دو راس u و v موجود باشند که فاصله‌شان ۱۳۸۵ باشد در این صورت تعداد بالهای G برابر است با:

- 1385 (1) 1386 (2) 1387 (3) 1388 (4)

۴۴- اگر G گرافی ساده ۱۳۸۵ راسی باشد و $\Delta(\bar{G}) = 1385$ کدام گزاره صحیح است؟ (توجه: $\bar{G}$ تکمیل گراف G است. Δ بزرگترین درجه راس گراف می‌باشد.)

- (1) G ناهمبند است. (2) G مسطح است. (3) G همیلتنی نیست. (4) G حداقل یک دور دارد.

۴۵- فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی بدن جهت با n راس و e یال باشد. قرار می‌دهیم

$$\Delta = \max_{v \in V} \{\deg(v)\}, \delta = \min_{v \in V} \{\deg(v)\}$$

$$(1) \delta \leq (e/n) \leq \Delta \quad (2) \delta \leq 2(e/n) \leq \Delta \quad (3) 2\delta \leq (e/n) \leq 2\Delta \quad (4) 3\delta \leq 2(e/n) \leq 4\Delta$$

۴۶- چند جمله‌ای رنگی گراف G که آن را با λ نشان می‌دهیم بیان‌کننده تعداد روش‌های رنگ زدن رئوس

گراف G با استفاده از λ رنگ متفاوت است به طوری که هیچ دو راس همسایه‌ای هم‌رنگ نباشند. کدام یک از چند

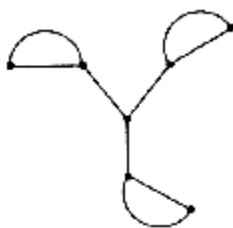
جمله‌ای‌های زیر می‌تواند چند جمله‌ای رنگی یک گراف باشد؟

$$(1) 3\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda \quad (2) \lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda$$

$$(3) \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda \quad (4) \lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 3$$

۴۷- به چند طریق می‌توان رئوس‌های گراف مقابل را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری

هم‌رنگ نباشند.



$$(1) 3 \times 2^3 \quad (2) 3 \times 2^6 \quad (3) 3^3 \quad (4) 2^6$$

۴۸- در یک سمینار علمی ۳۷ نفر حضور دارند که در ابتدا هر مدعو با تک تک بقیه مدعوین به طور دلخواه یا دست

می‌دهد یا دست نمی‌دهد. کدام گزاره صحیح است؟

(1) در این جلسه تعداد کسانی که به تعداد زوج دست داده‌اند، زوج است.

(2) حداقل دو نفر در این جلسه هستند که به تعداد مساوی دست داده‌اند.

(3) در این جلسه تعداد کسانی که به تعداد فرد دست داده‌اند، فرد است.

(4) هیچ‌کدام

۴۹- در یک کارگاه آموزشی ۳۷ نفر از شرکت‌کنندگان هر روز پشت یک میز دایره‌ای شکل تشکیل جلسه می‌دهند.

آنها مایل هستند یکدیگر را بهتر بشناسند. لذا هر نفر مجاور دو نفر تنگه در روزهای قبل نشسته است نمی‌نشیند

برای چند روز باید به این طریق عمل شود قبل از این که دو نفر برای بار دوم مجاور هم نشسته باشند؟

$$(1) 37 \text{ روز} \quad (2) 19 \text{ روز} \quad (3) 36 \text{ روز} \quad (4) 18 \text{ روز}$$

پاسخنامه تست‌های گراف

1- گزینه (4) صحیح است.

چون گزینه‌های 1، 2 و 3 را می‌توان با دو رنگ کرد.

2- گزینه (4) صحیح است.

(د) مسطح نیست ولی بقیه مسطح‌اند. (ب) راس درجه 4 دارد ولی (الف) و (ج) ندارند.

3- گزینه (4) صحیح است.

$n \leq e$ شرط وجود دور است. سایر گزینه‌ها را می‌توان با مثال نقض، رد کرد.

4- گزینه (4) صحیح است.

باید k_n دارای زوج یال باشد. k_{21} دارای زوج یال است ولی k_{19}, k_{31}, k_{30} خیر.

5- گزینه (1) صحیح است.

این گراف دارای $\binom{5}{2} = 10$ راس است و هر راس با $\binom{3}{2} = 3$ راس دیگر مجاور است. یعنی درجه رئوس 3 می‌باشد پس جمع

درجات 30 می‌باشد و بنابراین 15 یال دارد. گراف این تست همان گراف پترسن می‌باشد. گراف پترسن دارای دور به طول فرد است و دو بخشی نیست.

6- گزینه (4) صحیح است.

در گزینه‌های 1 و 3 تعداد رئوس درجه فرد، فرد است. گزینه 2 نیز امکان‌پذیر نیست.

7- گزینه (3) صحیح است.

گزینه (1) غلط است. زیرا تعداد رئوس از درجه فرد باید زوج باشد. گزینه‌های 2 و 4 نیز امکان ندارد. برای تشخیص درست بودن یک دنباله می‌توان بزرگترین عدد دنباله را حذف کرده (مثلاً x) و از هر یک از x عدد غیرصفر بعدی، یک واحد کم کنیم سپس در دنباله جدید این عمل را تکرار کنیم. اگر به بن‌بست رسیدیم و این عمل امکان‌پذیر نبود، آن دنباله نمی‌تواند یک گراف ساده باشد. مثلاً حذف

$$4, 3, 3, 1, 1, 0, 0 \Rightarrow 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1, 1 \text{ گزینه 4}$$

$$\Rightarrow 2, 2, 0, 0 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

حذف حذف

8- گزینه (3) صحیح است.

گراف $k_{8,8}$ می‌باشد و دارای 64 یال است.

9- گزینه (1) صحیح است.

هر دور 4 راسی باید از هر بخش 2 راس انتخاب کند: $\binom{7}{2} \binom{7}{2} = 21 \times 21 = 441$

10- گزینه (2) صحیح است.

مشابه تست 3

11- گزینه (1) صحیح است.

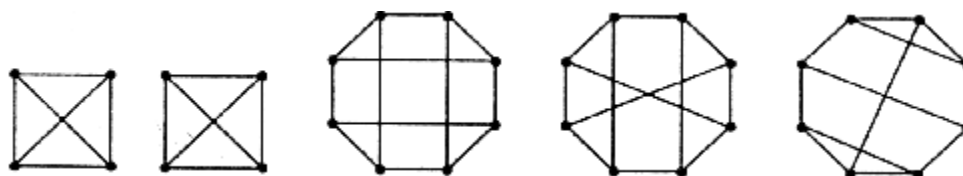
این مجموعه دارای 2^n زیر مجموعه است. پس گراف دارای 2^n راس است. یکی از این زیر مجموعه‌ها تهی ($\emptyset$) می‌باشد که با همه مجاور است پس گراف همبند است. گراف همبندنی نیست چون راس $\{1, 2, K, n\}$ با مجاور است و درجه‌اش یک است. گراف منظم نیست چون درجه رئوس یکسان نیست. گراف دو بخشی نیست چون دور به طول فرد مثلاً مثلث می‌توان در گراف یافت:



12. گزینه (2) صحیح است.

پایگاه راس، مجموعه رئوسی هستند که بتوان از آنها به تمام رئوس دسترسی داشت به طوریکه هیچ زیرمجموعه آن این خاصیت را نداشته باشد. چون a, f ورودی ندارند، پایگاه راس هستند.

13. گزینه (4) صحیح است.



14. گزینه (4) صحیح است.

گراف $k_{3,4}$ مسطح نیست چون دارای زیر گرافی همریخت با $k_{3,3}$ است.

- گراف دو بخشی که $|V|$ راس دارد حداکثر $\frac{|V|}{2} \times \frac{|V|}{2}$ یعنی $\frac{|V|^2}{4}$ یال دارد پس اگر $|E| > \frac{|V|^2}{2}$ باشد گراف دو بخشی نیست.

- C_n دارای n راس و n یال است و $\bar{C}_n$ دارای $\frac{n(n-1)}{2} - n$ یال است و برای آنکه $\bar{C}_n$ یکیزومورف باشد $\frac{n(n-1)}{2} - n = n$

در نتیجه $n=5$

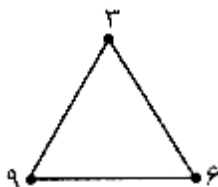
دنباله 1 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 7 نمی‌تواند گراف ساده باشد چون اگر 7 را حذف کنید و 7 راس بعدی یک واحد کم کنید دنباله 4,3,2,1,0,0,0 حاصل می‌شود که در این دنباله جدید اگر 4 را حذف کنید، 4 راس غیرصفر وجود ندارد.

15. گزینه (1) صحیح است.

ممکن است گراف بیش از یک دور داشته باشد مثلاً 2 سیکل 50 راسی را تصور کنید.

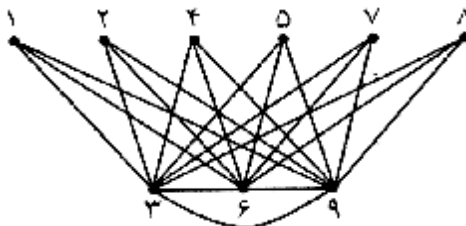
16. گزینه (3) صحیح است.

همه رئوس با 3 و 6 و 9 مجاورند و 3 و 6 و 9 با خودشان نیز مجاورند. بنابراین این گراف دو بخشی نیست چون مثلث دارد:



این گراف مسطح نیست چون زیر گراف همریخت $k_{3,3}$ دارد.

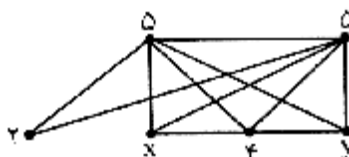
این گراف دارای $6 \times 3 + 3 = 21$ یال است.



این گراف همیلتونی نیست.

17- گزینه (4) صحیح است.

دو رأس x و y یا هر دو درجه 3 هستند و یا اگر بین آنها یال رسم کنیم درجه‌شان 4 می‌شود.

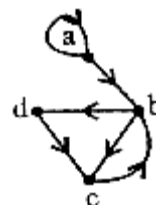


اگر x و y درجه 3 باشند گراف دارای 11 یال می‌باشد و در ضمن مسطح است و ضرب $x \times y$ فرد می‌شود.

اگر x و y درجه 4 باشند گراف دارای 12 یال می‌باشد و مسطح نیست و ضرب $x \times y$ زوج می‌باشد.

18- گزینه (4) صحیح است.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



ماتریس متقارن نیست پس گراف جهت‌دار است. با توجه به شکل گراف گزینه 4 صحیح است.

19- گزینه (2) صحیح است.

گزینه 1 نادرست است زیرا در گرافی که دور دارد بین برخی از رئوس بیش از یک مسیر وجود دارد. گزینه 3 نادرست است زیرا



محداد

گزینه 4 نادرست است مثلاً در گراف



ست،

یکریخت نیست. گزینه 4 نادرست است مثلاً در گراف



مثلاً

رئوس و یالها مساوی است لازم به ذکر است که $\Delta(G)$ ماکزیمم درجه گراف است.

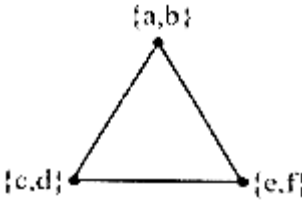
20- گزینه (1) صحیح است.

البته گزینه 1 به ازای $n > 2$ صحیح است مثلاً C_n هم هامیلتونی است و هم اولیری. سایر گزینه‌ها مثال نقض دارند.

21- گزینه (1) صحیح است.

تعداد رئوس گراف G برابر است با: $\binom{6}{2} = 15$ و هر رأس با $\binom{4}{2} = 6$ رأس دیگر مجاور است.

یعنی گراف 6- منظم است. می توان نشان داد تعداد مثلثها در چنین گرافی 15 است:



تعداد مثلثها

$$= \frac{1}{3!} \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 15$$

(مثلث وقتی ایجاد می شود که 6 عضو A را به 3 دسته مجزای 2 عضوی افراز کنیم که 15 حالت دارد)

22- گزینه (4) صحیح است.

5 راس درجه 1 و 5 یال را حذف می کنیم 5 رأس و 10 یال باقی می ماند.

گراف با 5 رأس و 10 یال، کامل است و:

$$K_n \text{ تعداد دورهای به طول } m \text{ در گراف } = \frac{(m-1)!}{2} \binom{n}{m}$$

$$K_5 \text{ تعداد دورهای به طول 5 در } = \frac{(5-1)!}{2} \binom{5}{5} = \frac{4!}{2} = 12$$

$$3 \text{ تعداد دورهای به طول 3} = \frac{(3-1)!}{2} \binom{5}{3} = 10$$

$$4 \text{ تعداد دورهای به طول 4} = \frac{(4-1)!}{2} \binom{5}{4} = 15$$

23- گزینه (2) صحیح است.

گزینه 1 صحیح است زیرا در این گراف، رؤس با شماره فرد یک بخش و رؤس با شماره زوج یک بخش هستند. گزینه 3 به شرطی

درست است که n زوج باشد. گزینه 4 نیز به شرطی درست است که n زوج باشد. ولی گزینه 2 هیچگاه درست نیست.

24- گزینه (1) صحیح است.

رؤس را می توان با 3 رنگ، رنگ کرد. ولی یالها 4 رنگ می خواهند زیرا به راس g یا z، 4 یال برخورد کرده است.

25- گزینه (4) صحیح است.

$$\text{تعداد دورهای همیلتنی } \frac{(n-1)!}{2} \text{ می باشد یعنی } \frac{8!}{2} \text{ که گزینه 4 صحیح است.}$$

26- گزینه (2) صحیح است.

درجه همه رؤس زوج نیست. پس گراف مدار اولری ندارد و چون تنها دو گره از درجه فرد دارد، دارای مسیر اولری است. پس

گراف اولری نیست.

برای هر دو گره x و y داریم: $\deg(x) + \deg(y) \geq n-1$ پس دارای مسیر همیلتنی است و همچنین $\deg(x) + \deg(y) \geq n$

تعداد گرهها) پس مدار همیلتنی نیز دارد.

27- گزینه (3) صحیح است.

چون k_{16} درجه همه رئوسش 15 و فرد است. پس گراف اولری نیست (مدار اولری ندارد). k_n به ازای $n \geq 3$ یک گراف همیلتنی است (مدار همیلتنی دارد).

28- گزینه (2) صحیح است.

گراف دو بخشی که $m \neq n$ باشد نمی تواند همیلتونی باشد.

29- گزینه (2) صحیح است.

دارای مدار اولری است. چون درجه همه رئوس زوج است - دور همیلتنی ندارد. چون با هر پیمایش راس c دو بار ملاقات می شود.

30- گزینه (1) صحیح است.

G_2, G_1 اولری و همیلتنی هستند ولی هیچ یک دو بخشی و مسطح نیستند.

31- گزینه (3) صحیح است.

تعداد انتخاب در هر بخش $n!$ پس $n!n!$ حالت وجود دارد ولی مشابه مسئله دستبند جواب $\frac{1}{2} \frac{n!n!}{n}$ می باشد.

32- گزینه (3) صحیح است.

33- گزینه (4) صحیح است.

باید از 7 رأس از هر بخش 4 رأس انتخاب کنیم و به 4! طریق به هم متصل کنیم.

34- گزینه (1) صحیح است.

سیکل بهینه همیلتنی، سیکل یا مداری است که از همه گره های گراف، فقط یک بار عبور کند و حداقل وزن را داشته باشد.

$$1 \xrightarrow{9} 3 \xrightarrow{8} 4 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{1} 1$$

$$21 = \text{وزن}$$

35- گزینه (3) صحیح است.

به متن درس مراجعه کنید.

36- گزینه (1) صحیح است.

$$(8-1)(8-3)(8-5)(8-7) = 105$$

37- گزینه (3) صحیح است.

38- گزینه (2) صحیح است.

39- گزینه (4) صحیح است.

40- گزینه (3) صحیح است.



می دانیم مکعب مسطح است.

شکل این گراف مکعب است

41- گزینه (1) صحیح است.



دو راس x و y در صورتی مجاورند که $|x - y|$ برابر 2 یا 3 یا 4 یا 5 باشد بنابراین این گراف دو بخشی نیست چون مثلث دارد



گراف ساده است چون بین دو راس حداکثر یک یال هست و طوقه نیز ندارد.

گراف همبند است چون بین همه رئوس مسیر هست: $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 5$

درجه همه رئوس این گراف 4 است چون هر راس با 4 راس دیگر مجاور است:

$$1: \{3, 4, 5, 6\}$$

$$2: \{4, 5, 6, 7\}$$

$$3: \{5, 6, 7, 1\}$$

$$4: \{6, 7, 1, 2\}$$

$$5: \{7, 1, 2, 3\}$$

$$6: \{1, 2, 3, 4\}$$

$$7: \{2, 3, 4, 5\}$$

42- گزینه (3) صحیح است.

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 2m + 6n = 90 \end{cases} \Rightarrow 9n = 90 \rightarrow \boxed{n=10}$$

43- گزینه (1) صحیح است.

فاصله یعنی کوتاهترین فاصله پس از u به v ، 1385 یال وجود دارد تعداد یالها نمی تواند بیش از 1385 باشد چرا که در این صورت فاصله کمتر از 1385 می شود.

44- گزینه (4) صحیح است.

چون $\Delta(\bar{G})$ برابر 1382 است پس $\delta(G) = 2$ یعنی کمترین درجه گراف 2 است پس حداقل یک دور دارد.

45- گزینه (2) صحیح است.

جمع درجات $2e$ می باشد و میانگین درجات $\frac{2e}{n}$ است و می دانیم

$$\delta \leq \frac{2e}{n} \leq \Delta \Rightarrow \text{ماکسیمم} \leq \text{میانگین} \leq \text{مینیمم}$$

46- گزینه (3) صحیح است.

در گزینه 1 ضریب بزرگترین درجه، یک نیست. در گزینه 2 به ازای $\lambda = 1$ حاصل صفر نمی شود.

در گزینه 4 به ازای $\lambda = 0$ حاصل صفر نمی شود.

47- گزینه (2) صحیح است.

برای رنگ آمیزی شکل داده شده معادل شکل زیر است:



این شکل درخت 7 راسی است و 3×2^6 حالت رنگ آمیزی با 3 رنگ دارد.

48- گزینه (2) صحیح است.

اگر این فرض در نظر گرفته شود که همگی دست داده اند و هیچ دو نفری به تعداد مساوی دست نداده باشد، فرد اول حداکثر 36 دست، فرد دوم 34 مرتبه و ... فرد سی و ششم یک مرتبه دست داده است. بنابراین فرد سی و هفتم بین 1 تا 36 مرتبه دست داده است (لانه کبوتر).

گزینه 3 نادرست است چون در هر گراف، تعداد رئوس درجه فرد، زوج است.

گزینه 1 نیز هیچ دلیلی ندارد.

49- گزینه (4) صحیح است.

تعداد دورهای همیلتنی برای k_{37} که هیچ یال مشترکی ندارند، جواب این سوال است:

$$\left\lfloor \frac{37-1}{2} \right\rfloor = 18$$

فصل ششم: درخت‌ها

درخت‌ها حالت خاصی از گراف‌ها هستند. اگر $G(V, E)$ گراف بی سو و بی حلقه باشد، G را درخت گوییم اگر G_1 همبند بوده و دارای هیچ دوری نباشد اما هر کدام از مؤلفه‌های آن یک درخت باشد آن را جنگل می‌گوییم. اگر G یک درخت باشد با T نمایش داده می‌شود.

قضیه: اگر a, b دو رأس از یک درخت با $|V| > 1$ باشد آنگاه حداقل یک رأس در V وجود دارد که درجه‌ی آن مساوی یک است.

قضیه: اگر $T(V, E)$ یک درخت باشد در این صورت داریم $|E| = |V| - 1$

مثال: اگر $T(V, E)$ یک درخت با $|V| > 2$ باشد آنگاه دست کم دو رأس از درجه یک دارد.

اثبات: فرض

$$|V| = n \rightarrow \sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2$$

داریم $\deg(V_i) \geq 2, i = 2, \dots, n$ تنها یک رأس از درجه 1 داریم

$$\sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 1 + \sum_{i=2}^n \deg(V_i) \geq 1 + 2n - 1 \rightarrow -2 \geq -1$$

قضیه: اگر دو رأس غیرمجاور درخت T را با هم جمع کنیم در گراف حاصل یک دور ایجاد می‌شود.

قضیه: گراف $G(V, E)$ یک درخت است اگر و تنها اگر دارای دوری نباشد و $|E| = |V| - 1$

اثبات: یعنی از قضیه که توسط استقرار ثابت می‌شود. حال می‌خواهیم نشان دهیم اگر گراف G دارای دور $|E| = |V| - 1$ آنگاه همبند است.

اگر $G_1, G_2, \dots, G_K$ مؤلفه‌های همبند باشند و $G_i(V_i, E_i)$ هر کدام از مؤلفه‌های یک درخت است زیرا همبند است و دور ندارد و از آنجا که $K=1$ است پس فقط یک مؤلفه‌ی همبند داریم.

$$|E_i| = |V_i| - 1 \quad |E| = \sum_{i=1}^K |E_i| = |V| - K$$

قضیه: عبارات زیر در مورد گراف بی سو و بی حلقه‌ی $G(V, E)$ هم‌ارزند:

(الف) G یک درخت است.

(ب) G همبند است و $|E| = |V| - 1$

(ج) G شامل هیچ دوری نیست و $|E| = |V| - 1$.

(د) G همبند است ولی حذف هر یال آن را به دو درخت تقسیم می‌کند.

(ه) G شامل هیچ دوری نیست ولی اگر دو رأس غیرمجاور آن را به هم وصل می‌کنیم دقیقاً یک دور خواهد داشت.

درخت ریشه‌دار:

گراف سودار $G(V, E)$ یک درخت سودار است هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت یال‌ها درخت باشد. درخت سودار $T(V, E)$ را ریشه‌دار گوئیم هرگاه راس منحصر به فرد r موجود باشد به طوری که $\deg^-(V) = 0$ و برای هر راس $\deg^-(V) = 1$.

در یک درخت ریشه‌دار راسی مانند V که $\deg^+(V) = 0$ است برگ یا راس خارجی (گره خارجی) نامیده می‌شود و باقی رئوس راس داخلی (گره داخلی) یا شاخه نامیده می‌شوند.

اگر طول مسیر از ریشه به راسی x باشد می‌گوئیم آن راس در تراز x واقع شده است.

برای یال (n, s) که جهت از n به s است n پدر و s فرزند نامیده می‌شوند.

هرگاه از a به b مسیری موجود باشد a نیای b گوئیم و b را نواده‌ی a .

رئوسی که پدر مشترک داشته باشند برادر یا خواهر نامیده می‌شوند.

اگر راس V_1 یک راس از درخت باشد آنگاه زیر درخت به ریشه V_1 مساوی زیر گراف القا شده به وسیله V_1 و همه‌ی نواده‌های آن در صورت وجود است.

درخت ریشه‌دار مرتب شده:

1- ریشه را با صفر برچسب می‌زنیم.

2- رئوس تراز یک را از چپ به راست با 1 و 2 و 3 و ... برچسب می‌زنیم.

3- اگر V راس داخلی با تراز بزرگتر مساوی یک باشد و با a برچسب بخورد به فرزندانش برچسب 1, 2, 3, ... زده می‌شود.

این روش به سیستم نشانی عمومی معروف است و هر راس که به صورت $a_1, a_2, \dots, K, a_n$ برچسب خورده باشد در تراز n است.

اگر u, v دو راس با نشانی a_1, K, a_m و a_1, K, a_n باشد گوئیم $c = a_1, K, a_n$ باشد گوئیم $b < c$ اگر:

(الف) $m < n$ (ب) a_m, a_n

یک درخت ریشه‌دار را یک درخت ریشه‌دار دو رویی گوئیم هرگاه به ازای هر راس V درجه‌ی خروجی آن صفر، یک، یا دو باشد.

در کامپیوتر درخت‌های دو رویی که به ازای هر $\deg^+(V) = 0$ or $\deg^+(v) = 2$ برای نمایش عملیات دودویی استفاده

می‌شوند. $|V| > 1$ با فرض T_k, K, T_1

نماد (prefin) پیشوندی به افتخار ابداع‌کننده‌ی آن نماد لهستانی گفته می‌شود و مزیت آن این است که علیرغم به کار نرفتن

پرانتز هیچ‌گونه ابهامی ندارد. اگر درخت را از بالا به پایین و از چپ به راست بخوانیم این نماد به دست می‌آید و نماد میانوند

(inf in) a^b به صورت ab خواهد بود.

ترتیب در درخت‌ها اهمیت زیادی دارد. چند روش سیستماتیک برای مرتب‌سازی درخت داریم از جمله: مرتب‌سازی پیش ترتیب

(preorder) و مرتب‌سازی پس ترتیب (postorder) که به صورت بازگشتی زیر تعریف می‌شوند: اگر T درختی با ریشه r باشد و فقط

همین ریشه را داشته باشد خود ریشه‌های پیش ترتیب و سپس ترتیب را تشکیل می‌دهد و اگر $|V| > 1$ با فرض T_k, K, T_1 زیر

درخت‌های T از چپ به راست داریم:

(الف) پیمایش پیش ترتیب، نخست ریشه r سپس رئوس T_1 را به صورت پیش ترتیب آنگاه T_2 الی T_K را به همین ترتیب ملاقات می‌کند.

(ب) پیمایش پس ترتیب، نخست رئوس T_K, K, T_1 را به ترتیب به صورت پس ترتیب و سپس ریشه را ملاقات می‌کند. اگر درخت ریشه‌دار دودویی باشد پیمایش میان ترتیب هم به صورت بازگشتی تعریف می‌شود:

اگر $|V|=1$ ریشه به تنهایی یک پیمایش میان ترتیب خواهد بود و اگر $|V|>1$ $T_R, T_2, \dots, T_R$ درخت‌های چپ و راست باشند، نخست T_L به صورت میان ترتیب سپس ریشه و سپس T_R به صورت میان ترتیب پیمایش می‌شود.

نکته: 1- زیر درخت چپ یا راست می‌تواند تهی باشد. 2- اگر $\deg^+(v)=1$ و w فرزند باشد باید بین فرزند چپ و راست تمایز قائل شد.

درخت‌های پوشا

زیر گراف H از گراف $G(V, E)$ را یک درخت پوشا برای G می‌گوییم هرگاه:

(الف) H یک درخت باشد.

(ب) همه‌ی رئوس V را شامل می‌شود.

نکته: درخت پوشایی که سودار باشد درخت پوشای سودار نامیده می‌شود.

اگر گراف G همبند باشد تعداد یال‌هایی که باید برای بدست آوردن درخت پوشا از G حذف کرد برابر $|E|-|V|+1$ است. این عدد را رتبه‌ی مداری G می‌گوییم. (یال‌هایی که حذف می‌شوند از هر دور گراف انتخاب می‌شوند)

قضیه: گراف بی‌سوی $G(V, E)$ همبند است اگر و تنها اگر شامل درخت پوشا باشد. (این الگوریتم کارا نیست چون زمان پیدا کردن دورها بسیار زیاد است).

دو الگوریتم کارا برای پیدا کردن یک درخت پوشا با یک گراف همبند الگوریتم‌های جستجو نخست در سطح (BFS) و جستجو نخست در عمق (DFS) می‌باشند. در BFS رئوس واقع در یک تراز پیش از رفتن به تراز بعدی ملاقات می‌شوند و در DFS ابتدا رئوس با ترازهای بیشتر پردازش می‌شوند.

الگوریتم DFS:

ورودی: گراف بی‌سو و همبند $G(V, E)$ که رئوس آن به ترتیب $V_1, V_2, \dots, V_n$ اولویت‌بندی شده‌اند.

خروجی: درخت پوشای ریشه‌دار و سودار $T = (V_1, E_1)$

1- $V_1 \leftarrow V_1, V_1 \in \{V_1\}$ ریشه درخت T ملاقات شد $E_1 = \emptyset$

2- $2 \leq i \leq n$ کوچکترین اندیسی است که $\{V, V_i\} \in E$ رأس V_i قبلاً ملاقات نشده است. اگر این اندیس وجود نداشت به مرحله 3 برو. در غیر این صورت:

(الف) $\{V, V_i\} \in E_1 \cup V_1$ ، $V_1 = V_1 \cup V_i$ ملاقات شد.

(ب) $V_i \leftarrow V$

(ج) برو به مرحله 2

3- اگر $V = V_1$ درخت پوشای ریشه‌دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می‌یابد.

4- اگر $V_1 \neq \bar{V}$ ، اگر a درخت V باشد $u \leftarrow V$ و برو به مرحله 2

الگوریتم BfS

ورودی: گراف بی سوی همبند $G(V, E)$ که رئوس آن به ترتیب V_1, K, V_n اولویت بندی شده اند.

خروجی: درخت پوشای ریشه دار و سودار $T = (V_1, E_1)$

1- V را درج و $V_1 = V_1, E_1 = \emptyset$ ملاقات شد.

2- اگر صف خالی است T درخت پوشای ریشه دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می یابد، در غیر این صورت راس V را از

سر صف بردار، برای راس V راس $V_i, 2 \leq i \leq n$ را بررسی کن. اگر V_i ملاقات نشده است و $\{V, V_i\} \in E$ در این صورت:

الف) $V_1 = V_1 \cup \{V_i\}, E_1 = E_1 \cup \{V, V_i\}$

ب) راس V_i ملاقات شده و در آخر صف Q درج می شود.

ج) برو به مرحله 2

درخت های پوشای مینیمم:

در گراف های وزن دار درخت پوشای مینیمم درخت پوشایی است که $\sum_{i=1}^m C_i$ آن مینیمم است. برای یافتن این درخت ها دو

الگوریتم کراسکال و پریم موجود است.

الگوریتم کراسکال:

ورودی: گراف همبند بی سود و وزن دار $G(V, E)$ که در آن برای هر $C \in E$ یک عدد حقیقی $C(e) > 0$ منسوب شده است.

خروجی: درخت پوشای T با هزینه ی مینیمم

1- $i=1$ فرض $C_i \in E$ یالی (غیر از حلقه) از G با $C(e)$ مینیمم

2- برای $1 \leq i \leq n-2$ اگر یال های e_1, n, e_i قبلاً انتخاب شده اند از میان بقیه یال ها e_{i+1} را به گونه ای انتخاب می کنیم که:

الف) $C_i + 1$ مینیمم باشد.

ب) زیر گراف تشکیل شده تشکیل هیچ دوری ندهد.

3- $i+1 \leftarrow i$ ، اگر $i = n-1$ زیر گراف حاصل همبند، دارای n راس و $n-1$ یال بوده و درخت پوشای مینیمم است پس الگوریتم

خاتمه می یابد.

اگر $i < n-1$ برو به 2.

قضیه: فرض کنید $G(V, E, C)$ یک گراف همبند بی سو است اگر T درخت تولید شده با الگوریتم کراسکال باشد T یک درخت

پوشای مینیمم است.

الگوریتم پریم:

ورودی: گراف همبند بی سو و وزن دار $G(V, E)$ که در آن برای هر $e \in E$ یک عدد حقیقی $C(e) > 0$ منسوب شده است.

خروجی: درخت پوشای T با هزینه مینیمم.

1- $T = \emptyset, W \leftarrow V - \{V_1\}, V_1 \in V$ که $p \leftarrow \{V_i\}, i \leftarrow 1$

2. برای $1 \leq i \leq n-1$ فرض $N = V - P, T = \{e_1 K e_{i-1}\}, p = \{V_1, K, V_i\}$ به T یال دارای کمترین هزینه را که راسی مثل $x \in p$ را به راسی مثلاً $y = (V_{i-1})$ باشد.

درخت‌ها

یک گراف جهت دار و بدون حلقه، یک «درخت» نامیده می‌شود، اگر همبند بوده و دارای هیچ دوری نباشد.

قضیه: اگر a, b دو گره از درخت $T = (V, E)$ باشند، در این صورت یک مسیر منحصر به فرد بین a, b وجود دارد.

قضیه: اگر $T = (V, E)$ یک درخت با تعداد گره‌ی بزرگتر از یک باشد، آنگاه حداقل یک گره در V وجود دارد که درجه‌ی آن برابر یک است.

قضیه: اگر $T = (V, E)$ یک درخت باشد، آنگاه $|E| = |V| - 1$ تعداد لبه‌ها و $|V|$ تعداد گره‌های درخت می‌باشند.

قضیه: اگر $T(V, E)$ یک درخت با تعداد گره‌ی بزرگتر یا مساوی 2 باشد، آنگاه T حداقل دو گره از درجه‌ی یک دارد.

نکته: اگر دو گره غیرمجاور در درخت T به یکدیگر متصل شوند در گراف حاصل یک دور ایجاد خواهد شد.

قضیه: گراف $G = (V, E)$ یک درخت است، اگر دارای هیچ دوری نباشد و $|E| = |V| - 1$

زیر درخت

یک زیر گراف از یک درخت که خود یک درخت باشد، «زیر درخت» نامیده می‌شود.

درخت جهت‌دار (Directed tree)

یک درخت «جهت‌دار» نامیده می‌شود هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت لبه‌ها یک درخت باشد.

درخت ریشه‌دار: درخت جهت‌داری است که دارای گره‌ی منحصر بفردی به نام «ریشه» می‌باشد که درجه‌ی ورودی آن صفر است و برای هر گره‌ی دیگر در این درخت درجه‌ی ورودی یک می‌باشد.

برگ (گره‌ی انتهایی - گره‌ی خارجی): در یک درخت ریشه‌دار، گره‌ی که دارای درجه‌ی خروجی صفر است، «برگ» یا «گره‌ی انتهایی» نامیده می‌شود.

گره‌ی شاخه‌ای (گره‌ی داخلی - Branch Node): در یک درخت ریشه‌دار، همه‌ی گره‌ها بجز گره‌های انتهایی «گره‌ی داخلی» یا «گره‌ی شاخه‌ای» نامیده می‌شوند.

سطح گره: طول مسیر از ریشه‌ی یک درخت تا هر گره «سطح گره» نامیده می‌شود.

نسل گره: در یک درخت جهت‌دار هر گره که از گره‌ای مانند v دسترس‌پذیر باشد، «نسل گره‌ی v » نامیده می‌شود.

فرزند گره: در یک درخت جهت‌دار گره‌ی که با یک لبه از گره‌ی v قابل دسترسی باشد، «فرزند گره‌ی v » نامیده می‌شود.

درخت مرتب شده (Ordered tree): درختی که برای گره‌های واقع در یک سطح آن ترتیبی منظور شود، «درخت مرتب شده» نامیده می‌شود.

درخت m -ary: درخت جهت‌داری که در آن هر گره دارای درجه‌ی خروجی کوچکتر یا برابر m باشد، «درخت m -ary» نامیده می‌شود.

درخت دودویی (Binary Tree): درخت جهت‌داری که در آن هر گره دارای درجه‌ی خروجی کوچکتر یا برابر 2 باشد، «درخت

دودویی» نامیده می‌شود.

درخت دودویی پر (Full Binary Tree): یک درخت دودویی که در آن بجز برگها، همه‌ی گره‌ها دارای درجه‌ی خروجی 2 باشند.

نکته: در یک درخت جهت‌دار همه مسیرها از نوع «اصلی» یا «ابتدایی» می‌باشند.

نکته: یک گره‌ی منفرد یک درخت جهت‌دار محسوب می‌شود.

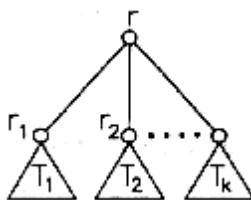
پیمایش درخت‌ها

پیمایش: مرتب‌سازی گره‌های یک درخت، به گونه‌ای که موقعیت هر گره نسبت به بقیه مشخص شود، «پیمایش درخت» گفته می‌شود.

پیمایش درخت‌ها به سه روش می‌تواند صورت پذیرد:

الف) پیش ترتیب (Preorder) ب) میان ترتیب (Inorder) ج) پس ترتیب (Postorder)

الف) پیش ترتیب: در این روش پیمایش با توجه به شکل زیر ابتدا ریشه‌ی r و به دنبال آن به ترتیب زیر درختهای $T_1, T_2, \dots, T_k$ به ترتیب از چپ به راست پیمایش می‌شوند و هر کدام از زیر درختها نیز بصورت پیش ترتیب پیمایش می‌گردند. اگر عمل پیمایش با علامت P نمایش داده شود، پیمایش درخت T بصورت بازگشتی به شکل روبرو است:



$$P(T) = r, P(T_1), P(T_2), \mathbf{K}, P(T_k)$$

ب) میان ترتیب: در این روش با توجه به شکل ابتدا زیر درخت T_1 سپس ریشه و بعد از آن به ترتیب زیر درختهای $T_1, T_2, \dots, T_k$ دسترسی می‌شوند:

$$P(T) = P(T_1), r, P(T_2), \mathbf{K}, P(T_k)$$

ج) پس ترتیب: در این روش تمام زیر درختهای $T_1, T_2, \dots, T_k$ پیمایش می‌شوند و بعد از آنها ریشه دسترسی می‌شود:

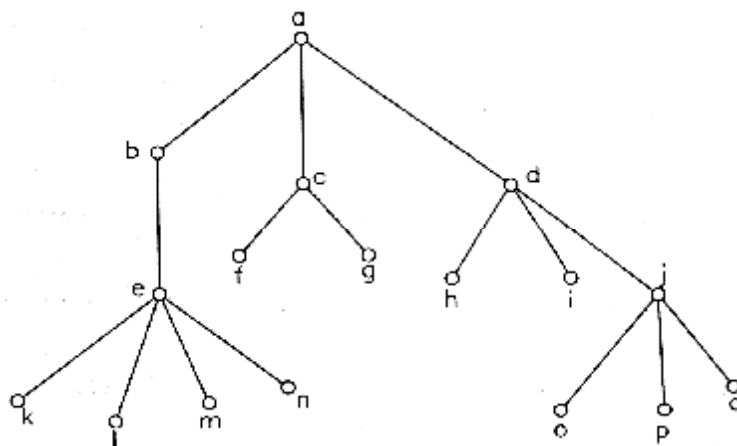
$$P(T) = P(T_1), r, P(T_2), \mathbf{K}, P(T_k), r$$

بعنوان مثال در درخت شکل زیر پیمایش در سه روش بصورت زیر است:

پیش ترتیب: a, b, e, kl, m, n, c, f, g, d, h, i, j, o, p, q

میان ترتیب: k, e, l, m, n, b, a, f, c, g, h, d, i, o, j, p, q

پس ترتیب: k, l, m, n, e, b, f, g, c, h, i, o, p, q, j, d, a



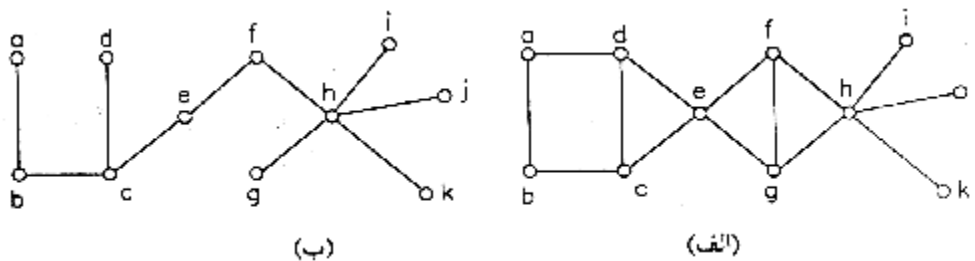
درخت پوشای مینیمال

درخت‌های پوشا

زیر گراف H از گراف $G = (V, E)$ یک «درخت پوشا» برای G نامیده می‌شود اگر H یک درخت بوده و شامل همه‌ی گره‌های مجموعه‌ی V نیز باشد.

درخت پوشای جهت‌دار: درخت پوشایی که جهت‌دار نیز باشد، «درخت پوشای جهت‌دار» نامیده می‌شود.

شکل زیر یک گراف و درخت پوشای آن را نشان می‌دهد.



(الف) گراف و (ب) درخت پوشاننده‌ی آن

قضیه: گراف غیر جهت‌دار $G = (V, E)$ همبند است اگر و تنها اگر شامل یک درخت پوشا باشد.

الگوریتم DFS برای یافتن درخت پوشا

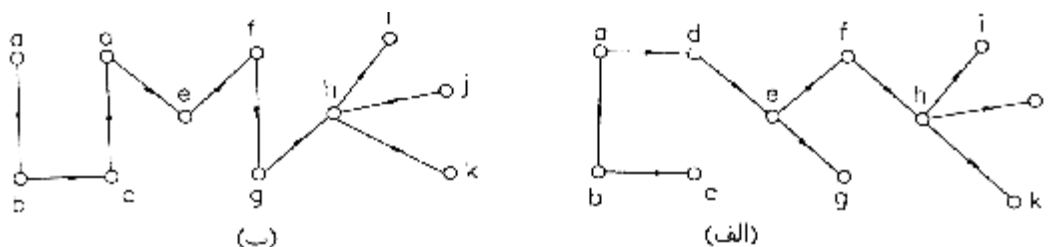
الگوریتم DFS (Depth First Search) بصورت زیر پیاده می‌شود:

اگر برای گراف غیر جهت‌دار همبند $G = (V, E)$ گره‌ها بصورت $v_1, v_2, \dots, v_n, K$ اولویت‌بندی شده باشند، برای یافتن درخت پوشای جهت‌دار ریشه‌دار $T = (V', E')$ کار از گره v_1 شروع می‌شود. برای هر گره v_i اگر بین گره‌های v_2 تا v_n (همه‌ی گره‌ها بجز گره‌ی شروع) گره‌ای مانند v_j وجود داشته باشد به طوری که v_j کوچکترین اندیسی باشد که گره‌ی مربوط به آن (v_j) قبلاً انتخاب نشده است، لبه‌ی (v_i, v_j) به E' نیز به V' اضافه می‌گردد و اگر گره‌ی ملاقات نشد در این حالت پدر v_j (گره‌ای که v_i فرزند آن است)

جایگزین v_i شده و عملیات فوق تکرار می‌گردد و اگر گره‌ی ملاقات نشده‌ای یافت نشد و $v_i = v_1$ باشد، کار خاتمه یافته و درخت $T = (V', E')$ درخت پوشا است.

الگوریتم BFS برای یافتن درخت پوشا

الگوریتم BFS (Breadth First Search) برای بدست آوردن $T = (V', E')$ بعنوان یک درخت پوشای جهت‌دار و ریشه‌دار از گراف غیر جهت‌دار و همبند $G = (V, E)$ که گره‌های آن اولویت‌بندی شده‌اند بکار می‌رود. اولویت گره‌ها بصورت $v_1, v_2, \dots, v_n, K$ می‌باشد. ابتدا گرهی v_1 در صف Q قرار می‌گیرد و نیز به مجموعه اضافه می‌گردد. برای هر گرهی i که از صف برداشته می‌شود، کلیه گره‌های انتخاب نشده v_j از بین $v_1, v_2, \dots, v_n$ البته به ترتیب اولویت بررسی می‌گردند تا اگر $(v_i, v_j) \in E$ آنگاه v_j به V', E' نیز به اضافه می‌شود و گرهی j به آخر صف اضافه می‌شود و سپس عنصر بعدی از ابتدای صف برداشته شده و عملیات فوق تکرار می‌گردد. هنگام خالی شدن صف درخت T بدست آمده درخت پوشای موردنظر است. شکل زیر نمونه‌هایی از درخت‌های پوشای بدست آمده از گراف شکل الف را نشان می‌دهد که اولویت گره‌ها به ترتیب حروف الفباست.



درخت‌های پوشای بدست آمده از الگوریتم (الف) BFS و (ب) DFS

درخت پوشای مینیمال

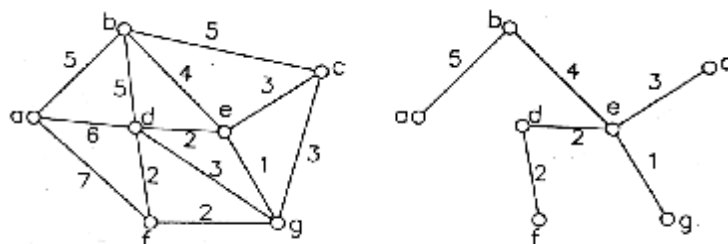
در یک گراف غیر جهت‌دار همبند وزن‌دار، درخت پوشایی که برای آن مجموع وزن لبه‌ها کمترین مقدار باشد، «درخت پوشای مینیمال» گفته می‌شود.

الگوریتم کراسکال برای یافتن درخت پوشای مینیمال

در این الگوریتم برای بدست آوردن درخت پوشای T مینیمال از گراف همبند غیر جهت‌دار و وزن‌دار G بصورت زیر عمل می‌شود: ابتدا لبه‌ی با کمترین وزن در صورتی که حلقه نباشد انتخاب می‌شود (در صورتی که چند لبه با وزن یکسان کمترین وزن را داشته باشند یکی به دلخواه انتخاب می‌شود)، سپس مکرراً لبه‌هایی که انتخاب نشده‌اند و کمترین وزن را دارند و انتخاب آنها در زیر گراف تشکیل شده دوری ایجاد ننماید، انتخاب می‌شوند تا جایی که تعداد لبه‌های زیر گراف بدست آمده یک واحد کمتر از تعداد گره‌های گراف گردد، در این حالت زیر گراف حاصل همبند، دارای n گره و $n-1$ لبه است و درخت پوشای مینیمال می‌باشد. بعنوان مثال در گراف شکل زیر لبه‌های زیر به ترتیب انتخاب می‌شوند.

$(e, g), (e, d), (d, f), (e, c), (e, b), (b, a)$

که درخت پوشای نشان داده شده را بعنوان مینیمال تشکیل می‌دهند.



نمونه‌ای از درخت پوشای مینیمال

الگوریتم پریم برای یافتن درخت پوشای مینیمال

این الگوریتم نیز مانند کراسکال در یک گراف همبند غیرجهت‌دار و وزن‌دار $G = (V, E)$ درخت پوشای مینیمال $T = (V', E')$ را تولید می‌نماید. در این الگوریتم سه مجموعه‌ی P (مجموعه‌ی گره‌های درخت پوشا)، N (مجموعه‌ی گره‌های انتخاب نشده از گراف) و T (مجموعه لبه‌های درخت پوشا) منظور می‌گردند که T در ابتدا $\emptyset$ ، P عضو و حاوی یک گره از گراف و N حاوی همه گره‌های گراف بجز تک عضو P می‌باشند. برای همه‌ی عناصر P لبه‌های با کمترین هزینه که گره‌ای از P را به گره‌ای از N وصل می‌نماید انتخاب می‌شوند و به T اضافه می‌گردند و در این حالت گره‌ی اضافه شده نیز به P افزوده می‌گردد و از N حذف می‌شود. این عملیات تا جایی تکرار می‌شود که N برابر $\emptyset$ گردد و P حاوی همه‌ی گره‌های گراف شود و در نهایت لبه‌های درخت پوشای مینیمال در T وجود دارند.

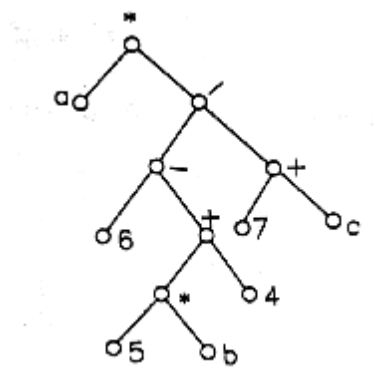
نمایش عبارت جبری

برای نمایش عملیاتهای دودویی می‌توان از درختهای دودویی استفاده کرد و دو عملوند را بعنوان دو گره‌ی فرزند گره‌ی عملگر دوتایی فرض نمود. در چنین حالتی با پیمایش درخت به روشهای گوناگون، عبارت جبری بصورت‌های مختلف ارائه می‌گردد که معمولترین آن پیمایش پیش ترتیب برای بدست آوردن «نماد لهستانی» عبارت جبری است در نماد لهستانی، عبارت جبری نیازی به پرانتز ندارد، از راست به چپ محاسبه می‌شود و عملگر بر روی دو عملوند سمت راستش عمل می‌نماید. شکل زیر درخت دودویی معادل عبارت جبری $(c+7) / (4+5b-6) \times a$ را نشان می‌دهد با پیمایش پیش ترتیب این درخت نماد لهستانی

عبارت بصورت زیر بدست می‌آید: $a \times -6 + 5b4 + 7c$

که براحتی قابل محاسبه است.

نکته: درخت نمایش دهنده ی یک عبارت جبری هنگام استفاده از عملگرهایی که خاصیت جابجایی ندارند باید درخت Position باشد.



درخت نمایش دهنده ی عبارت جبری



تست های درخت

۱- گراف بدون جهت $G(V, E)$ را می توان با K رنگ، رنگ کرد، اگر بتوان به هر راس یکی از رنگهای ۱ تا k را نسبت داد، به طوری که هیچ دو راس مجاور هم رنگ نباشند، کدام گزینه غلط است؟
توضیح: گراف دو بخشی گرافی است که در آن V به دو مجموعه A ، B افراز شده و هر یال گراف لزوماً یک سر در A و یک سر در B داشته باشد.

(1) هر درخت را می توان با دو رنگ، رنگ کرد.

(2) هر گراف کامل را با $|V|$ رنگ می توان رنگ کرد.

(3) هیچ گراف دارای دور (سیکل) را نمی توان با 2 رنگ، رنگ کرد.

(4) هر گراف دو بخشی را می توان با 2 رنگ، رنگ کرد.

۲- گراف ساده، غیر جهت دار و بدون حلقه $G(V, E)$ از ده مولفه همبند که هر کدام یک درخت است، تشکیل شده است. اگر مجموع درجه های رئوس گراف G برابر صد باشد، در این صورت تعداد رئوس گراف برابر است با

(1) 10 (2) 60 (3) 50 (4) 40

۳- با سه رنگ آبی، زرد، سبز به چند طریق می توان رئوس یک درخت ۲۰ راسی را رنگ آمیزی نمود؛ به طوری که هیچ دو راس مجاور هم رنگ نباشند؟

(1) 3×2^{20} (2) 3×2^{19} (3) 2×3^{19} (4) 2×3^{20}

۴- درخت T به گونه ای است که درجه هر راس آن یا دقیقاً برابر ۴ است و یا یک. اگر درخت مزبور دارای n راس از درجه ۴ باشد. در این صورت تعداد رئوس از درجه یک آن برابر است با:

(1) $2n+2$ (2) $2n-2$ (3) $n+1$ (4) $n-1$

۵- درخت T دارای ۱۰ راس است. تعداد مسیرهای موجود در T با طول حداقل یک چیست؟

(1) 55 (2) 100

(3) به نوع درخت بستگی دارد. (4) 45

۶- تعداد زیر درخت های فراگیر گراف کامل ۱۰ رأسی (K_{10}) برابر است با:

(1) $10!$ (2) 10^7 (3) $9!$ (4) 10^8

۷- از گراف کامل K_6 حداکثر چند ضلع می توان حذف کرد به طوریکه حاصل همچنان همبند باقی بماند؟

(1) 7 ضلع (2) 8 ضلع (3) 9 ضلع (4) 10 ضلع

۸- تعداد درختهای برجسبدار با n گره چه تعدادی می باشد (فرمول مقدار T_n پیدا کنید؟ برای مثال برای $n=5$ تعداد درختها ۱۲۵ است که برخی از آنها در شکل مقابل نشان داده شده است. در ضمن مسیر تهی نیز وجود دارد

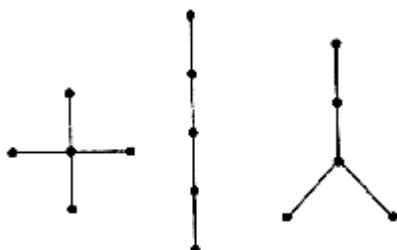
$$(T_0 = 1)$$

$$T_n = n^{n-2} \quad (1)$$

$$T_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \quad (2)$$

$$T_n = 1 + \binom{n}{2} + n + \binom{n}{4} \quad (3)$$

$$T_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + K + \binom{n}{2k}, n \geq 2k \quad (4)$$



۹- فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت دار با k مؤلفه $|V| = n$, $|E| = m$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$(1) \quad M = n - k \quad (2) \quad M \leq n - k \quad (3) \quad M \geq n - k \quad (4) \quad \text{هیچکدام}$$

۱۰- در یک درخت دودویی T ، برای هر برگ x که در عمق d قرار دارد، تعریف می کنیم $W(x) = 2^{-d}$ کدام یک از

گزینه های زیر مجموع $W(x)$ های هر درخت T را برای همه برگ های آن نشان می دهد؟

$$(1) \quad \sum_{\text{برگ } x} W(x) \leq 1 \quad (2) \quad \sum_{\text{برگ } x} W(x) = 1 \quad (3) \quad \sum_{\text{برگ } x} W(x) < 1 \quad (4) \quad \sum_{\text{برگ } x} W(x) > 1$$

۱۱- تعداد برگ های یک درخت دودویی ۱۵۰ است. حداکثر ارتفاع این درخت چقدر است؟

$$(1) \quad 8 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 50 \quad (4) \quad 75$$

۱۲- یک درخت دودویی با ۹ گره به نام T وجود دارد. اگر پویش درخت به شکل preorder و inorder به شکل زیر

باشد: کدام گزینه پویش به شکل Postorder خواهد بود؟

Preorder: G B Q A C P D E R

Inorder: Q B C A F P E D R

$$(1) \quad Q C A B E R D P G \quad (2) \quad C E R Q A D B P G$$

$$(3) \quad G B P Q A D C E R \quad (4) \quad R D E P G A C B Q$$

۱۳- عبارت $c * (e - a) * (a / (b - c + d))$ داده شده است. نشانه گذاری Postfix (معکوس لهستانی RPN) عبارت کدام

است؟

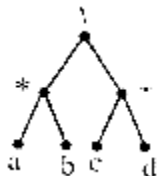
$$(1) \quad ab / c - de * + ac * - \quad (2) \quad - + - / abc * de * ae \quad (3) \quad abc - d + / ea - * c * \quad (4) \quad \text{هیچکدام}$$

۱۴- اگر acdfbeg پیمایش preorder یک درخت دودویی باشد، کدام گزینه نمی تواند پیمایش inorder آن درخت

باشد؟

$$(1) \quad cdbfage \quad (2) \quad cabfged \quad (3) \quad fdcebag \quad (4) \quad fdbcage$$

۱۵- درخت یک عبارت جبری در شکل مقابل نشان داده شده است. نمایش لهستانی (Polish notation) این عبارت کدام یک:



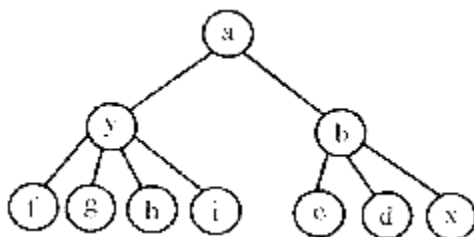
/*ab+cd (4

/*+ab cd (3

ba*/cd+ (2

ab*cd+/ (1

۱۶- درخت غیرباینری زیر را به روش inorder پیمایش کنید. رشته حاصل از این پیمایش چه خواهد بود؟ (قواعد استاندارد تبدیل به درخت باینری لازمست رعایت شوند).



facbdxyghi (4

fghiycdxba (3

fgyhiacbx d (2

fgyhicbdx (1

۱۷- فرض کنیم T یک درخت کامل m تایی (m -ary) با ارتفاع h باشد. این درخت «پر» نامیده می‌شود اگر همه برگ‌های آن در سطح h باشند. اگر T یک درخت m تایی پر با ارتفاع h باشد و 279936 برگ باشد، چند راس داخلی در T وجود دارد؟

44324 (4

40236 (3

55987 (2

53456 (1

۱۸- تعداد درخت‌های فراگیر شکل مقابل کدام است؟



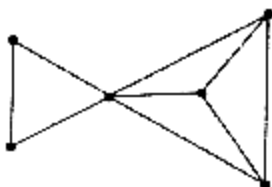
81 (4

54 (3

16 (2

12 (1

۱۹- تعداد درخت‌های پوشای گراف مقابل چند تا است؟



48 (4

36 (3

24 (2

16 (1

۲۰- گرافی با ۱۰ رأس در نظر می‌گیریم که گراف کامل است و رأس‌های آن از یک تا ده شماره‌گذاری شده‌اند. اگر وزن هر یال از تابع زیر به دست آید، مجموع وزن‌های یال‌های درخت فراگیر مینیمال این گراف کدام است؟

$$W_{ji} = W_{ij} = \begin{cases} i+j, i+j \geq 5 \\ i^2 + j^2, i+j < 5 \end{cases}$$

65 (4)

66 (3)

75 (2)

76 (1)

۲۱- فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بی‌جهت و M یک درخت فراگیر مینیمم برای G باشد، کدام عبارت درست است؟

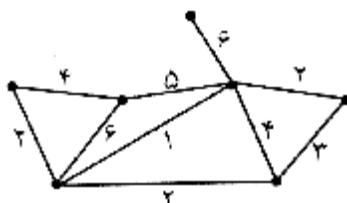
(1) مسیر M بین هر جفت رأس V_2, V_1 کوتاهترین مسیر است.

(2) مسیر M بین هر جفت رأس V_2, V_1 کوتاهترین مسیر نیست.

(3) تمام مسیرهای موجود در M کوتاهترین مسیر می‌باشند.

(4) بین تمام رئوس در M مسیر وجود ندارد.

۲۲- وزن مینیمم درخت فراگیر را در گراف زیر بیابید به طوری که درجه هر رأس از درخت بیشتر از ۲ نباشد؟



21 (4)

19 (3)

17 (2)

16 (1)

۲۳- وزارت نفت در نظر دارد با استفاده از لوله‌های گاز خطوط ارتباطی گازرسانی بین شهرهای A و B و C و E و F و G برقرار نماید. با توجه به جدول زیر که فواصل بین شهرها به کیلومتر داده شده است، مینیمم مقدار لوله گاز موردنیاز (به کیلومتر) برای ارتباط بین کلیه شهرها برابر است با:

	B	C	D	E	F	G
A	670	758	427	581	211	369
B		361	252	132	492	680
C			232	493	690	759
D				357	394	431
E					391	650
F						521

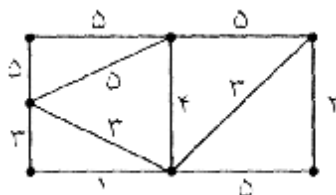
1587 (4) کیلومتر

1687 (3) کیلومتر

1580 (2) کیلومتر

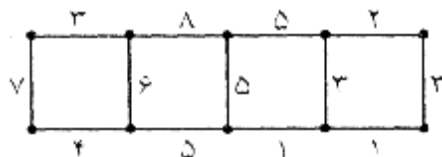
1681 (1) کیلومتر

۲۴- گراف زیر را با وزنهای یالی داده شده در نظر بگیرید. کمترین وزن یک زیر درخت فراگیر برابر است با:



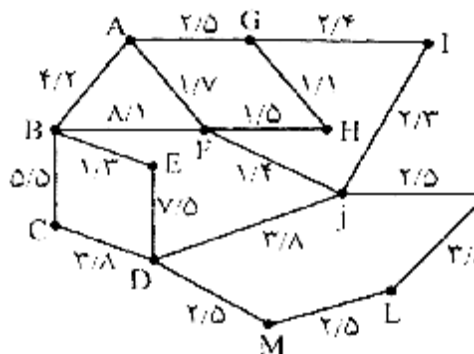
- 17 (1) 19 (2) 18 (3) 20 (4)

۲۵- گراف وزن دار G را در نظر بگیرید. فرض کنید با استفاده از این گراف بخواهید یک شبکه کامپیوتری LAN را در دانشگاه ایجاد نموده که گره‌ها نشان‌دهنده ساختمانها در دانشگاه و لبه‌ها نمایش‌دهنده زوج ساختمان‌هایی هستند که مستقیماً بوسیله کابل در ارتباط می‌باشند. هزینه اتصال هر دو ساختمان به وسیله وزن هر لبه داده شده است. کمترین هزینه برای ایجاد شبکه کامپیوتری را محاسبه نمایید.



- 30 (1) 35 (2) 25 (3) 33 (4)

۲۶- گراف وزن دار زیر مفروض است. کمترین وزن یک درخت پوشا برای این گراف برابر است با:



- 28/6 (1) 26/9 (2) 30/2 (3) 29/9 (4)

۲۷- تعداد زیر درخت‌های فراگیر گراف رو به رو برابر است با:



- 21 (1) 23 (2) 25 (3) 35 (4)

۲۸- کد پیشوندی (prefixcode) یک درخت $\{0,1,10,111\}$ می‌باشد. طول بزرگترین مسیر اصلی در این درخت چقدر است؟

- 3 (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4)

پاسخنامه تست‌های درخت

1- گزینه (3) صحیح است.



گراف را می‌توان با 2 رنگ، رنگ کرد پس گزینه 3 صحیح نیست.

2- گزینه (2) صحیح است.

$$2|E_1| + 2|E_2| + K + 2|E_{10}| = 100$$

$$2(|V_1| - 1) + 2(|V_2| - 1) + K + 2(|V_{10}| - 1) = 100$$

$$\Rightarrow 2(|V_1| + |V_2| + K + |V_{10}|) - 20 = 100 \Rightarrow v = 60$$

به طور کلی در یک جنگل که m درخت دارد می‌توان نوشت $v = e + m$ که v تعداد رئوس و e تعداد یالهاست.

3- گزینه (2) صحیح است.

یک راس دلخواه را با 3 رنگ و سایر رئوس را با 2 رنگ می‌توان رنگ کرد. پس 3×2^{19} می‌توان حالت داشت.

4- گزینه (1) صحیح است.

اگر n تعداد رئوس از درجه 4 و m تعداد رئوس از درجه یک باشد:

$$1) \sum \deg(v) = 2|E| \Rightarrow 4n + m = 2|E|$$

از طرفی در یک درخت تعداد رئوس یکی بیشتر از تعداد یالهاست. پس:

$$2|E| = |V| - 1 = m + n - 1 \quad (2)(1) \Rightarrow 4n + m = 2m + 2n - 2 \Rightarrow 2n + 2 = m$$

5- گزینه (4) صحیح است.

$$\text{در درخت } n \text{ راسی تعداد همه مسیرها برابر } \binom{n}{2} \text{ می‌باشد} \Leftrightarrow \binom{10}{2} = 45$$

نکته: در درخت n راسی داریم:

$$2 \text{ تعداد مسیرهای به طول حداقل } 2 = \binom{n}{2} - (k^n - 1)$$

6- گزینه (4) صحیح است.

تعداد درخت‌های پوشای K_n برابر n^{n-2} می‌باشد.

7- گزینه (4) صحیح است.

$$\text{گراف همبند با 6 راس در صورتی درخت است که 5 یال داشته باشد و چون } k_6 \text{ دارای } \frac{6(6-1)}{2} = 15 \text{ یال است. پس } 15 - 5 = 10$$

یال حذف است.

8- گزینه (1) صحیح است.

9- گزینه (3) صحیح است.

اگر $m = n - k$ آنگاه، هر مؤلفه درخت است و بنابراین $m \geq n - k$

10- گزینه (1) صحیح است.

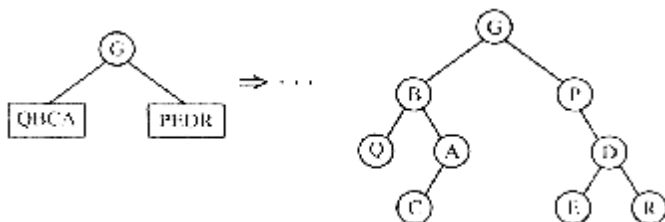
در حالت درخت دودویی پر این مجموع یک است در بقیه حالات کمتر از یک. (سطح ریشه را صفر گرفته ایم)

11- گزینه (1) صحیح است.

اگر $h \geq \lceil \log_2 L \rceil = 8$ کلمه حداکثر با حداقل جایگزین شود، گزینه 1 صحیح است. در غیر این صورت با توجه به تعریف، درخت دودویی هر ارتفاعی می تواند داشته باشد.

12- گزینه (1) صحیح است.

با توجه به پیمایش Pre، G ریشه است و با توجه به پیمایش in، QBCA سمت چپ ریشه و PEDR راست ریشه هستند. حال در زیر درخت چپ یعنی QBCA با توجه به Pre، B ریشه است پس Q چپ و CA راست آن است. به همین ترتیب در هر زیر درخت با توجه به Pre ریشه را می یابیم و با توجه به in چپ و راست ریشه مشخص می شوند:



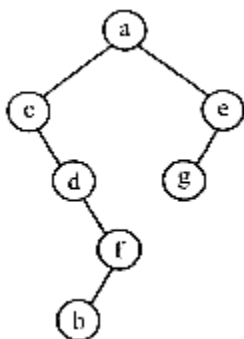
13- گزینه (3) صحیح است.

جواب $abc-d+ea-*c*$ می باشد (با توجه به اولویت عملگرها را بعد از عملوندشان بنویسید)

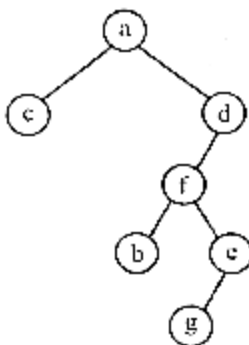
14- گزینه (3) صحیح است.

Pre:acdfbeg

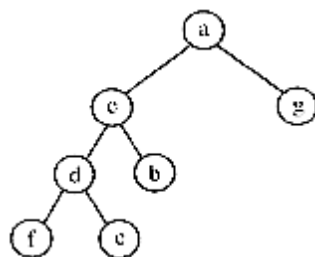
گزینه 1 In: cdbfage



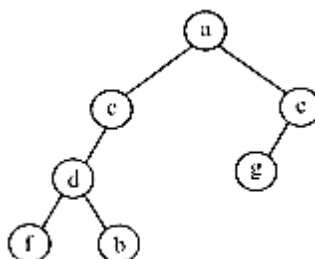
گزینه 2 In: cabfged



3 گزینه in: fdecbag



4 گزینه in: fdbcbage



15- گزینه (4) صحیح است.

فرم لهستانی یعنی Prefix

16- گزینه (3) صحیح است.

درخت را با الگوریتم فرزند چپ - برادر راست، دودویی می‌کنیم و یا می‌توان درخت عمومی را Postorder پیمایش کرد، زیرا پیمایش Postorder درخت غیردودویی با inorder درخت دودویی معادل آن یکسان است:

Post: fghiycdxba

17- گزینه (2) صحیح است.

ریشه را صفر فرض می‌کنیم:

$$L = m^7 = 279936 \Rightarrow \boxed{m=6}$$

$$\text{تعداد برگ} = \frac{L-1}{m-1} = \frac{279935}{5} = 55987$$

18- گزینه (4) صحیح است.

4 گراف k_3 مشاهده می‌شود هر یک $3^{3-2} = 3$ درخت پوشا دارد پس $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ جواب است.

19- گزینه (4) صحیح است.

شکل از دو گراف k_4, k_3 تشکیل شده است.

تعداد درخت‌های پوشای
تعداد درخت‌های پوشای

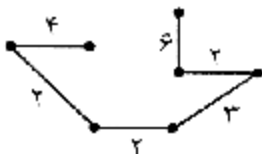
$$\begin{aligned} &= 3^{3-2} = 3 \\ &= 4^{4-2} = 16 \Rightarrow 3 \times 16 = 48 \end{aligned}$$

20- گزینه (3) صحیح است.

$$\text{وزن مینیمم} = W_{12} + W_{23} + W_{14} + W_{15} + W_{16} + W_{17} + W_{18} + W_{19} + W_{110} = 5 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$$

21. گزینه (2) صحیح است.

22. گزینه (3) صحیح است.



23. گزینه (4) صحیح است.

درخت پوشای مینیمم را رسم کنید: $132 + 211 + 232 + 252 + 369 + 391$

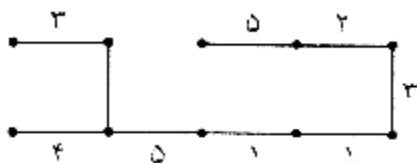
24. گزینه (3) صحیح است.

$$\min(w) = 5 + 3 + 3 + 4 + 2 + 1 = 18$$

25. گزینه (1) صحیح است.

درخت پوشای مینیمم حاصل عبارت است از:

→ هزینه = 30



26. گزینه (1) صحیح است.

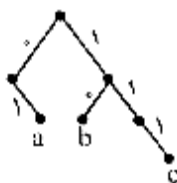
$GH \rightarrow BE \rightarrow FJ \rightarrow FH \rightarrow AF \rightarrow IJ \rightarrow JK \rightarrow ML \rightarrow DM \rightarrow LK \rightarrow CD \rightarrow AB$

$$\Rightarrow \text{هزینه مینیمم} = 1/1 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/7 + 2/3 + 2/5 + 2/5 + 3/8 + 3/8 + 4/2 = 28/6$$

27. گزینه (1) صحیح است.

28. گزینه (3) صحیح است.

درخت موردنظر عبارت است از:



طولانی‌ترین مسیر بین c , a برابر 5 است.

تست‌های IT

۱- تعداد درخت‌های فراگیر (پوشا) برای گراف کامل K_6 که هیچ کدام با دیگری یکرخت نباشند چند تا است؟

- 6 (1) 46656 (2) 1296 (3) 36 (4)

۲- چند مورد از عبارات زیر درست است؟

A. اگر گراف G همیلتونی باشد و دارای n راس باشد ($n \geq 3$) آنگاه درجه هر راس G حداقل $\frac{n}{2}$ است.

B. اگر گراف G همیلتونی و دارای n راس باشد ($n \geq 3$) آنگاه به ازای هر جفت از راس‌های غیرمجاور u, v داریم

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

C. گرافی که درجه‌ی تمام راس‌های آن زوج است همواره اویلری است.

D. اگر G یک گراف ساده مسطح همبند باشند پس درجه یک راس آن کمتر از ۵ است.

- 1 (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4)

۳- اگر a_n برابر دترمینان ماتریس مقابل باشد و p و q دو عدد غیرصفر و ثابت باشند. رابطه بازگشتی برای a_n کدام است؟

$$a_n = \begin{vmatrix} p & p-q & 0 & K & K & 0 \\ q & p & p-q & 0 & K & 0 \\ 0 & q & p & K & K & 0 \\ 0 & 0 & q & K & K & 0 \\ M & M & M & M & K & M \\ M & M & M & M & p & p-q \\ 0 & 0 & 0 & M & q & p \end{vmatrix}$$

$$a_n = pa_{n-1} - (p-q)qa_{n-2} \quad (2)$$

$$a_n = qa_{n-1} - (p-q)pa_{n-2} \quad (1)$$

$$a_n = -(p-q)qa_{n-1} + p^2a_{n-2} \quad (4)$$

$$a_n = (p-q)a_{n-1} - p.qa_{n-2} \quad (3)$$

۴- یک کتاب ۱۰۰۰ صفحه‌ای داریم که تعداد صفحات آن با شروع از عدد ۱ شماره‌بندی شده است ۲۲۵ برگ از این

کتاب را پاره می‌کنیم (توجه کنید که این برگ‌ها به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند). شماره صفحه‌های این ورق‌های

بریده شده را با هم جمع می‌کنیم و نامش را S می‌گذاریم. باقیمانده‌ی عدد s بر ۴ چقدر است؟

- 1 (1) 0 (2) 3 (3) 2 (4)

۵- اگر $k=1, 2, K, N$ و $k(N-k+1) \geq N$ باشد، کدام مورد درست است؟

$$(N-1) \log N = O(\log N!) \quad , \quad (N!) \geq N^{N-1} \quad (2)$$

$$N \log N = O(\log N!) \quad , \quad (N!) \geq N^N \quad (1)$$

$$N \log N = O(\log N!) \quad , \quad (N!)^2 \geq N^N \quad (4)$$

$$2 \log N = O(\log N), N < N^N \quad (3)$$

۶- فرض کنید $G(z)$ تابع مولد برای دنباله $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_0 = 4 \end{cases} \quad n \geq 1$ باشد، کدام رابطه صحیح می‌باشد؟

$$G(z)(1-3z) = \frac{4-5z}{1-z} \quad (4) \quad G(z)(2z-1) = \frac{4-3z}{1-z} \quad (3) \quad G(z)(1-z) = \frac{4-3z}{1-2z} \quad (2) \quad G(z)(1-2z) = \frac{4-5z}{1-z} \quad (1)$$



۷- فرض کنید A یک مجموعه ۸ عضوی و B یک مجموعه ۵ عضوی باشند. تعداد تمامی تابع‌های پوشا از A به B چند تا است؟

65610 (4)

126000 (3)

390625 (2)

2560 (1)

۸- پیمایش preorder درخت دودویی T (از چپ به راست) به صورت acbdhigef می‌باشد. همچنین می‌دانیم راس‌های a, d, b, f, i درخت T برگ هستند. پیمایش postorder درخت T کدام است؟

b d c i e f g h a (2)

b c d a i h e g f (1)

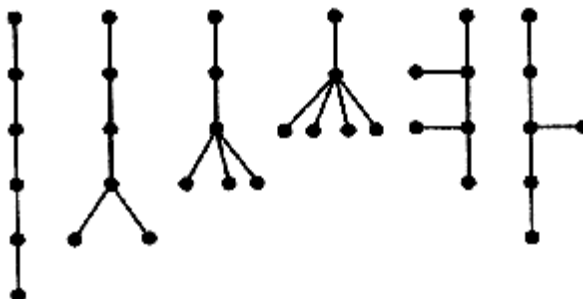
b c i h e f g d a (4)

b d c e f g i h a (3)

پاسخنامه تست های IT

1- گزینه (1) صحیح است.

در واقع تعداد درخت های آزاد 6 راسی خواسته شده است که 6 تاست.



2- گزینه (1) صحیح است.

A غلط است مثلاً گراف C_6 (سیکل n راسی) همیلتنی است ولی درجه رئوس آن $3 = \frac{6}{2}$ نیست.

B غلط است مثلاً گراف C_6 همیلتنی است ولی جمع درجات هر 2 راس آن 4 می شود که از 6 بیشتر یا مساوی نیست. دقت کنید که عکس B درست است.

C غلط است چون ممکن است گراف ناهمبند باشد.

3- گزینه (4) صحیح است.

روی سطر اول بسط می دهیم.

$$a_n = p \begin{vmatrix} p & p-q & 0 & K & 0 \\ q & p & & K & 0 \\ 0 & q & K & & 0 \\ M & & & p & p-q \\ 0 & 0 & K & q & p \end{vmatrix}_{n-1 \times n-1} - (p-q) \begin{vmatrix} q & p-q & 0 & K & 0 \\ 0 & p & K & & 0 \\ 0 & q & K & & 0 \\ & & & p & p-q \\ 0 & 0 & K & q & p \end{vmatrix}_{n-1 \times n-1}$$

حال دترمینان دوم را روی ستون دوم بسط می دهیم و داریم:

4- گزینه (1) صحیح است.

می توان فرض کرد صفحات 1 تا 225 پاره شده اند پس:

$$s = 1 + K + 225 = \frac{225 \times 226}{2} = 225 \times 113$$

$$225 \times 113 \equiv 1 \times 1 = 1$$



5- گزینه (1) صحیح است.

$$k=1 \Rightarrow N \geq N$$

$$k=2 \Rightarrow 2(N-1) \geq N$$

$$k=3 \Rightarrow 3(N-2) \geq N$$

$$k=N \Rightarrow N(1) \geq N$$

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N \times N(N-1)(N-2) \dots \times 1 \geq N^N$$

$$\Rightarrow (N!)^2 \geq N^N$$

6- گزینه (1) صحیح است.

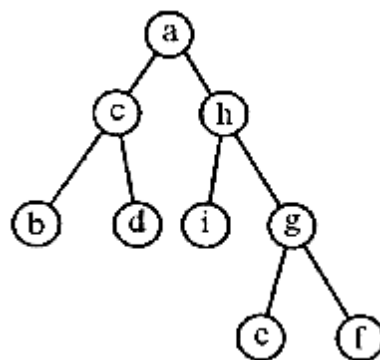
$$a_n Z^n = 2a_{n-1} Z^n - Z^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} Z^n - \sum_{n=1}^{\infty} Z^n$$

$$\Rightarrow G(z) - a_0 = 2ZG(z) - \frac{Z}{1-Z} \Rightarrow (1-2Z)G(z) = 4 - \frac{Z}{1-Z} = \frac{4-5Z}{1-Z}$$

7- گزینه (3) صحیح است.

$$5^8 - 5 \times 4^8 + \binom{5}{2} \times 3^8 - \binom{5}{3} \times 2^8 + \binom{5}{4} \times 1^8 = 126000$$

8- گزینه (4) صحیح است.



post = b d c i e f g h a

تست‌های مهندسی کامپیوتر

۱- اگر $s(r, n)$ نمایش دهنده تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در n جعبه نامتمایز باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای

خالی نباشد، کدام رابطه صحیح است؟

$$s(r, n) = s(r-1, n) + ns(r-1, n-1) \quad (1)$$

$$s(r, n) = s(r-1, n-1) + ns(r-1, n) \quad (2)$$

$$s(r, n) = s(r-1, n-1) + rs(r-1, n) \quad (3)$$

$$s(r, n) = s(r-1, n) + rs(r-1, n-1) \quad (4)$$

۲- اگر ساعت ۴ بعدازظهر روز چهارشنبه باشد، بعد از گذشت 47^{74} ساعت، چه روز و چه ساعتی خواهد بود؟

(1) یکشنبه ساعت ۳ بعدازظهر (2) شنبه ساعت ۵ بعدازظهر (3) شنبه ساعت ۳ بعدازظهر (4) یکشنبه ساعت ۵ بعدازظهر

۳- تابع کدگذاری $Z_2^5 \rightarrow Z_2^2$: نگه رشته‌های باینری دو بیتی را به رشته‌های ۵ بیتی کد می‌کند توسط ماتریس مولد

$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ توصیف شده است. ماتریس بررسی زوجیت (یا توازن) (H) برای رمزگشایی تابع کدگذاری فوق کدام است؟

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

۴- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, K, 600\}$ حاوی تمام اعداد طبیعی بین یک تا ۶۰۰ باشد، تعداد اعضای A که بر ۳ یا ۵ یا ۷

بخش پذیر نیستند چند تا است؟

$$405 \quad (4)$$

$$280 \quad (3)$$

$$270 \quad (2)$$

$$275 \quad (1)$$

۵- اگر گراف G در واقع دوری به طور ۴ باشد به چند روش مختلف می‌توان رؤس G را با استفاده از حداکثر ۸ رنگ

متفاوت، رنگ‌آمیزی کرد به گونه‌ای که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشد؟

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda \quad (4) \quad \lambda^4 + 4\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda \quad (3) \quad \lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 1 \quad (2) \quad 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 1 \quad (1)$$



پاسخنامه تست‌های مهندسی کامپیوتر

1- گزینه (2) صحیح است.

فرض کنید می‌خواهیم r شی متمایز $a_1, a_2, \dots, a_r, K$ را در n جعبه یکسان توزیع کنیم و تعداد حالات $s(r, n)$ است (استرلینگ نوع دوم)، دو حالت وجود دارد: یا a_r در یک جعبه تنهاست که $r-1$ شی دیگر باید در $n-1$ جعبه دیگر توزیع شوند. $(s(r-1, n-1))$ یا شی a_r با دیگران در یک جعبه است که در این حالت $r-1$ شی دیگر در n جعبه دارای $s(r-1, n)$ حالت هستند و a_r می‌تواند در هر یک از n جعبه قرار گیرد پس $s(r, n) = s(r-1, n-1) + ns(r-1, n)$

2- گزینه (4) صحیح است.

$$47^{74} \equiv (-1)^{74} = 1 \Rightarrow \text{ساعت 5 بعد از ظهر}$$

(یک ساعت از ساعت 4 بعد از ظهر گذشته است). بررسی روز را به خواننده وا می‌گذاریم.

3- گزینه (3) صحیح است.

برای مطالعه به کتاب گریمالدی فصل 16 رجوع کنید.

4- گزینه (1) صحیح است.

$$A = \{1, 2, 3, K, 600\}$$

$$B = 3 \text{ مضارب } 3 \Rightarrow 3 \leq 3k \leq 600 \Rightarrow 1 \leq k \leq 200 \Rightarrow |B| = 200$$

$$C = 5 \text{ مضارب } 5 \Rightarrow 5 \leq 5k \leq 600 \Rightarrow 1 \leq k \leq 120 \Rightarrow |C| = 120$$

$$D = 7 \text{ مضارب } 7 \Rightarrow 7 \leq 7k \leq 600 \Rightarrow 1 \leq k \leq 85 \Rightarrow |D| = 85$$

$$B \cap C = 15 \text{ مضارب } 15 \Rightarrow 15 \leq 15k \leq 600 \Rightarrow 1 \leq k \leq 40 \Rightarrow |B \cap C| = 40$$

$$B \cap D = 21 \text{ مضارب } 21 \Rightarrow 21 \leq 21k \leq 600 \Rightarrow 1 \leq k \leq 28 \Rightarrow |B \cap D| = 28$$

$$C \cap D = 35 \text{ مضارب } 35 \Rightarrow 35 \leq 35k \leq 600 \Rightarrow 1 \leq k \leq 17 \Rightarrow |C \cap D| = 17$$

$$B \cap C \cap D = 105 \text{ مضارب } 105 \Rightarrow 105 \leq 105k \leq 600 \Rightarrow 1 \leq k \leq 5 \Rightarrow |B \cap C \cap D| = 5$$

$$|\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}| = |s| - |B| - |C| - |D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| - |B \cap C \cap D| = 600 - 200 - 120 - 85 + 40 + 28 + 17 - 5 = 275$$

5- گزینه (4) صحیح است.

گزینه‌های 1 و 2 و 3 چند جمله‌ای کروماتیک نیستند زیرا در گزینه 1 و 2 به ازای $\lambda = 0$ و در گزینه 3 به ازای $\lambda = 1$ حاصل صفر نمی‌شود.

تست‌های علوم کامپیوتر

۱- فرض کنید G گرافی ۵ رأس و ۷ یالی باشد و دنباله درجات آن به صورت نزولی مرتب شده باشند:

$(4, 4, 2, 2, x)$

کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

- (1) G اویلری است. (2) G همبند است. (3) G مسطح است. (4) G همپلتونی است.

۲- کدام گزاره صحیح است؟

- (1) گراف 4 رأسی وجود ندارد که مکمل آن با خودش یکرخت باشد.
 (2) گراف 5 رأسی وجود ندارد که مکمل آن با خودش یکرخت باشد.
 (3) دقیقاً دو گراف 1388 رأسی وجود دارد که شامل دو رأس با فاصله 1387 است.
 (4) دقیقاً یک گراف 1388 رأسی وجود دارد که شامل دو رأس با فاصله 1387 است.

۳- اگر P, Q, R سه گزاره باشند در این صورت گزاره $Q \vee R \Rightarrow (Q \wedge (\sim P \wedge R)) \vee ((Q \wedge R) \vee (P \wedge R))$ با کدامیک از

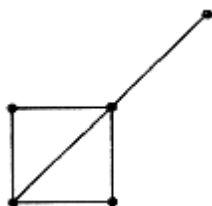
گزاره‌های زیر معادل است؟

- (1) T (درست) (2) F (نادرست) (3) Q (4) R

۴- کدام گزاره نادرست است؟

- (1) گراف اویلری می‌تواند یال برشی داشته باشد.
 (2) گرافی که مسیر اویلری دارد می‌تواند یال برشی داشته باشد.
 (3) یال‌های یک گراف اویلری را می‌توان به اجتماع دورها افراز کرد.
 (4) اگر بتوان گرافی همبند را به اجتماع دورها افراز کرد آنگاه گراف اویلری است.

۵- فرض کنید G گراف زیر باشد. به چند طریق می‌توان گراف را با k رنگ، رنگ آمیزی سره کرد؟



(1) $k(k-1)^3(2k-5)$

(2) $k^2(k-1)^2(k-2)$

(3) $k(k-1)^2(k-2)^2$

(4) $k(k-1)(k-2)^3$

۶- ضریب b^3 در عبارت $a^2b^2(a^{-1}+10b+2a)^7$ کدام است؟

- (1) 1680 (2) 2100 (3) 4200 (4) 8400

۷- تعداد زیر درختهای فراگیر گراف مقابل کدام است؟



144 (4)

81 (3)

64 (2)

36 (1)

۸- عدد رنگی رأس کدام دسته از گرافها با بقیه متفاوت است؟

(1) دورهای زوج

(2) درختهای با حداقل دو رأس

(3) گرافهایی که شامل مثلث نمی‌باشند.

(4) گرافهای دو بخشی با حداقل دو راسی

۹- فرض کنید $(a, b, b, b, c, c, c, c, c), a \geq b \geq c$ دنباله درجات یک درخت باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(1) a, b, c هر سه متمایزند.

(2) فاصله بین هر دو رأس در درخت حداکثر 4 است.

(3) $a \geq b + c$

(4) درختی با دنباله درجات داده شده وجود ندارد.

۱۰- تعداد دنباله‌های ۴ رقمی که می‌توان با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ساخت بطوریکه حاوی تعداد فردی ۱ باشد برابر است با:

100 (1)

110 (2)

120 (3)

256 (4)

۱۱- ۱۰۰ نقطه در صفحه داده شده‌اند که آنها را با اعداد ۱، ۲، ...، ۱۰۰ برچسب‌گذاری کرده‌ایم، چند درخت ۱۰۰ رأسی برچسب‌گذاری شده وجود دارد به طوری که رئوس آن این نقاط باشند و دقیقاً دو رأس درجه ۱ داشته باشند؟

99! (1)

100! (2)

100⁹⁶ (3)

100⁹⁷ (4)

۱۲- حداکثر چند زیر مجموعه زوج عضوی از $\{1, K, 20\}$ می‌توان انتخاب کرد به طوری که اشتراک هر دو زیر مجموعه تعداد زوجی عضو داشته باشد؟

2⁵ (1)

2⁸ (2)

2⁹ (3)

2¹⁰ (4)

۱۳- فرض کنید G یک گراف باشد و تعداد همسایه‌های مشترک هر دو رأس G فرد باشد، در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(1) درجه هر رأس G زوج است.

(2) تعداد رئوس G مضرب 3 است.

(3) تعداد رئوس G زوج است.

(4) گراف G تعداد فردی یال دارد.

۱۴- تعداد رابطه‌های غیرمتقارن روی $\{1, 2, K, 2n\}$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند، $\forall x, y \in \{1, 2, K, n\}$

$(x, y) \in R \Leftrightarrow (x + n, y + n) \in R$ برابر است با:

$$(1) \quad 2^{\frac{3n^2+n}{2}} \quad (2) \quad 2^{3n^2-2\frac{3n^2+n}{2}} \quad (3) \quad 2^{3n^2-2\frac{3n^2-n+2}{2}} \quad (4) \quad 2^{4n^2-3(2\frac{3n^2+n}{2})}$$

۱۵- تعداد ماتریس‌های 8×5 با درایه‌های $0, 1$ بیابید که در هر سطر دقیقاً یک درایه I و در هر ستون حداقل یک

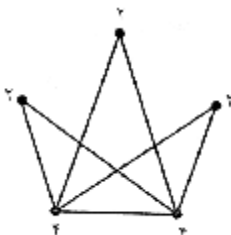
درایه I دارد؟

$$(1) \quad 5^8 \quad (2) \quad 8^5 \quad (3) \quad \sum_{i=0}^8 (-1)^i \binom{8}{i} (8-i)^5 \quad (4) \quad \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{5}{i} (5-i)^8$$

پاسخنامه تست‌های علوم کامپیوتر

1- گزینه (4) صحیح است.

$$e = 7 \Rightarrow \deg(v_i) = 14 \Rightarrow 4 + 4 + 2 + 2 + x = 14 \Rightarrow x = 2$$



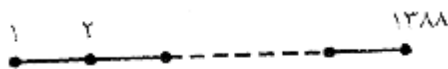
این گراف، همیلتونی نیست.

2- گزینه (4) صحیح است.

گزینه 1 نادرست است زیرا با مکملش ایزومورف است.

گزینه 2 نادرست است زیرا k_5 دارای 10 یال است می‌توان گراف 5 راسی ساخت که با مکملش ایزومورف باشد.

با 1388 راس، می‌توان یک زنجیر ساخت که دو راس انتهایی آن فاصله 1387 دارند.



3- گزینه (1) صحیح است.

$$(\bar{Q} \cdot (\bar{P} \cdot R)) + ((Q \cdot R) + (P \cdot R)) \Rightarrow Q + R$$

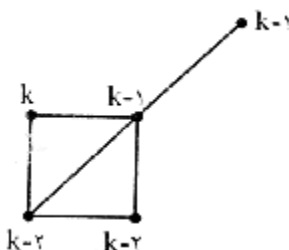
$$\equiv (\bar{P}\bar{Q} + P + Q)R \Rightarrow Q + R$$

$$\equiv R \Rightarrow Q + R \equiv T$$

4- گزینه (1) صحیح است.

گراف اوپلری یال برشی ندارد.

5- گزینه (3) صحیح است.



$$\Rightarrow k(k-1)^2(k-2)^2$$

6- گزینه (3) صحیح است.

در واقع باید ضریب $a^{-2}B$ را در عبارت $(a^{-1} + 10b + 2a)^7$ بیابیم:

$$(a^{-1})^4 (10b)^1 (2a)^2 \Rightarrow \text{جواب} = \frac{7!}{4!1!2!} \times 10^1 \times 2^2 = 4200$$

7- گزینه (4) صحیح است.

$$\text{جواب} = 3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$$

8- گزینه (3) صحیح است.

عدد رنگی دورهای زوج، درختهای با حداقل 2 رأس و گرافهای دو بخشی حداقل 2 رأسی، برابر 2 است، ولی گرافهایی که شامل مثلث نیستند چنین نیست مثلاً گراف C_5 دارای مثلث نیست و عدد رنگی آن 3 است.

9- گزینه (2) صحیح است.

$$a + 3b + 6c = 2e = 2(9) = 18$$

با توجه به تساوی فوق a باید مضرب 3 باشد و c باید 1 یا 2 باشد. اگر $c=1$ آنگاه $a + 3b = 12$ که می توان 1 یا 2 یا 3 باشد:

$$c=1, b=1, a=9$$



$$c=1, b=2, a=6 \Rightarrow$$



$$c=1, b=3, a=3 \Rightarrow$$



اگر $c=2$ آنگاه $a + 3b = 6$ که b می تواند 1 باشد که چون $a \geq b \geq c$ ، غیرممکن است.

10- گزینه (3) صحیح است.

$$108 = 3 \times 3 \times 3 \times 4 = \text{تعداد دنباله هایی که شامل یک 1 هستند.}$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = 120$$

$$12 = 4 \times 3 = \text{تعداد دنباله هایی که شامل سه 1 هستند.}$$

11- گزینه (2) صحیح است.

چنین درختی زنجیر 100 رأسی است که می توان به 100! حالت برچسب گذاری کرد. البته نصف حالات جواب است مثلاً برچسب 1 و 2 و ... و 100 با برچسب بر عکس آن، یکسان است که در گزینه ها نیست. نظر طراح گزینه 2 است.

12- گزینه (4) صحیح است.

13- گزینه (1) صحیح است.

گراف K_n که n فرد است این خاصیت را دارد.

14- گزینه (2) صحیح است.

15- گزینه (4) صحیح است.

منابع

1- ریاضیات گسسته، تالیف گریمالدی

2- ریاضی گسسته نوشته ترمبلی، گراسمن