Subject :
Year . Month . Date . ( )

«ساختمان گسسته»

آقای دکتر مکانتری

(۱)
کتاب معرفی شده: ریاضیات گسسته مقدماتی*
نویسنده: بالاگریشنان
ترجمه: رضوانی و شمس

(۲)
ریاضیات گسسته و ترکیباتی
تالیف: اگریمالری
ترجمه: رضوانی، شمس

مطالب: صفحه

۱- ترکیبات ۱
۲- توابع مولد ۱۴
۳- روابط بازگشتی ۲۰
۴- گراف ها ۲۶
۵- نظریه مجموعه ها و منطق .

نمره‌بندی:
تمرینات ← ۳ نمره
امتحان پایان ترم ← ۱۷ نمره

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

فصل اول - ترکیبیات

قاعده ضرب :

فرض کنیم r تا پیشامد $E_1, E_2, \ldots, E_r$ وجود داشته باشد به طوریکه

۱- E_1 بتواند به n_1 طریق رخ دهد.

۲- تعداد طرقی که یک پیشامد می تواند رخ دهد به چگونگی رخ دادن پیشامدهای قبل از آن بستگی نداشته باشد

آنگاه $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$ طریق برای رخ دادن همه ی پیشامدهای نامبرده وجود خواهد داشت

قاعده جمع :

فرض کنیم r پیشامد $E_1, E_2, \ldots, E_r$ وجود داشته باشد بطوریکه :

۱- پیشامد E_1 بتواند به n_1 طریق رخ دهد.

۲- هیچ دو پیشامدی نتوانند به طور همزمان رخ دهند.

آنگاه $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ طریق برای رخ دادن یکی از این r پیشامد وجود خواهد داشت.

مثال) در یک گروه جهانگردی ۸ اتریشی، ۵ برزیلی و ۶ کانادایی وجود دارند.

۱- چند طریق برای انتخاب یک اتریشی و یک برزیلی وجود دارد؟ $\frac{8}{E_1} \times \frac{5}{E_2} = \frac{40}{E_1}$

۲- " " " " " یک اتریشی و یک کانادایی " ؟ $\frac{8}{E_1} \times \frac{6}{E_2} = \frac{48}{E_2}$

۳- " " " " " یک برزیلی و یک کانادایی " ؟ $\frac{5}{E_1} \times \frac{6}{E_2} = \frac{30}{E_3}$

۴- چند طریق برای انتخاب زوجی از افراد با ملیت های مختلف وجود دارد؟

$40 + 48 + 30 = 118$

PAPCO

۵- انتخاب سه نماینده از بین این جانگردان به چند طریق ممکن است؟

$\frac{8}{E_1} + \frac{5}{E_2} + \frac{6}{E_3} = 19$

E_1: پیشنهاد انتخاب سه نماینده از بین اتریشی ها
E_2: " " " " " برزیلی ها
E_3: " " " " " " کانادایی ها

مثال: تعداد اعداد صحیح فرد بین ۰ تا ۹۹.

می توانیم تک تک اعداد را به صورت یک عدد دو رقمی نشان دهیم. ۰۱ - ۰۲ - ..... - ۰۹

دو پیشنهاد { E_1 پیشنهاد انتخاب رقم یکان
E_2 پیشنهاد انتخاب رقم دهگان

$\frac{10}{E_2} \times \frac{5}{E_1} = 50$

مثال: تعداد اعداد صحیح فرد بین ۰ تا ۹۹ که دارای ارقام مجزا باشند؟

$\frac{9}{E_2} \times \frac{5}{E_1} = 45$

E_1: پیشنهاد انتخاب رقم یکان E_2: پیشنهاد انتخاب رقم دهگان

جایگشت:

مجموعه ای مرتب از n شی متمایز مانند X را در نظر می گیریم.

یک r- جایگشت = آرایش مرتبی از r شی متعلق به X است.

ترتیب مهم است — تکرار نداریم

n- جایگشت از n جایگشت

مثال: اگر $X = \{a, b, c, d, e\}$ چند 4- جایگشت وجود دارد؟

abcd, dcb, becd, adec

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعداد r-جایگشت های یک مجموعه n عنصری را با $P(n,r)$ نمایش می دهند.

$X=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n عنصر متمایز

$$\frac{n}{E_1} \times \frac{n-1}{E_2} \times \frac{n-2}{E_3} \times \dots \times \frac{n-r+1}{E_r} \Rightarrow P(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$$\Rightarrow P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$ ← تعداد r-جایگشت ها

$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$ تعداد جایگشت های (n-جایگشت)

جایگشت های دارای تکرار

n امکان متمایز که با ترتیب خاصی از آن ها انتخاب اندازه r را تشکیل دهید.

1	2	3		n-1	n
a_1	a_2	a_3		a_{n-1}	a_n

می خواهیم r شی متمایز را به این خانه ها چنان تخصیص دهیم که در هر خانه حداکثر یک شی قرار بگیرد

به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

$X=\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$

$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) = P(n,r)$

جایگشت - تعمیم یافته:

مجموعه ای مرکب از n شی (نه لزوماً متمایز) را که متعلق به k گروه نامتهی متفاوت هستند، در نظر می گیریم.

به طور مثال، $X=\{a,a,a,b,b,c,c,c\}$ $X_1=\{a,a,a\}$ $X_2=\{b,b\}$ $X_3=\{c,c,c\}$

۱- اشیاء هر گروه با هم یکسان هستند.

۲- هیچ شیء ای از یک گروه با شیء از گروه دیگر یکسان نیست.

هر آرایش سطری این n شی را یک جایگشت تعمیم یافته X می نامند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه: تعداد جایگشت‌های تقسیم یافته n عنصری را با $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ و $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$ نمایش می‌دهیم که در آن

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\cdots(n_k!)}$$

n_i: تعداد عناصر گروه i ام است.

مسئله تخصیص:

اگر n شیئی یکسان در گروه i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ وجود داشته باشد و اگر r تعداد کل اشیا باشد یعنی $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = r \leq n$ این r شیئی را می‌توان به n^r طریق در این n خانه قرار داد

مثلاً می‌خواهیم حداکثر یک شیئی در یاخته نماید.

$X_1 = \{a, a\}$ $X_2 = \{b, b\}$ $X_3 = \{c, c, c\}$

$$\frac{10!}{2!\,2!\,3!\,3!}$$

$X_4 = \{d, d, d\}$

مثال: در یک نمایشگاه اتوبیل قرار است ۱۵ اتوبیل اسپرت، ۲۵ اتوبیل سواری، ۳۰ استیشن واگن و ۲۰ وانت برای نمایش پارک شوند. ۱۰۰ محل وجود دارد که از ۱ تا ۱۰۰ شماره گذاری شده‌اند.

$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_{100}\}$

$$\frac{100!}{10!\,20!\,30!\,25!\,15!}$$

ترکیب:

فرض کنیم X مجموعه‌ای از n شیئی متمایز باشد، هر زیرمجموعه r-تایی از X را یک r-ترکیب گوییم.

ترتیب مهم نیست

تکرار نداریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ترکیب و مسئله تخصیص:

فرض کنیم X مجموعه‌ای مرکب از n مکان متمایز باشد و با تعلم خاصی آرایش یافته‌اند، مجموعه‌ای مرتب از r شیء یکسان در نظر گیریم. به چند طریق می‌توان این r شیئ یکسان را به n مکان تخصیص داد به طوریکه هر مکان حداکثر یک شیء دریافت کند.

$$X=\{\underbrace{a,a,a,\dots,a}_{r}\}$$

$$\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \dots\ \overline{n-1}\ \overline{n}$$

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\Rightarrow \boxed{C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

شکل)

$$X=\{a,a,a,a\}$$

$$\overline{1}\ \overline{2}\ \underset{4!}{a}\ \overline{3}\ \underset{}{a}\ \underset{}{a}\ \underset{}{a}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ \overline{8}$$

$$t=4!\times P(8,4)\qquad t=\frac{P(8,4)}{4!}=\frac{P(n,r)}{r!}=C(n,r)$$

مسئله تخصیص و ترکیب های تقسیم یافته:

مجموعه‌ای مرکب از n شیئی (نه لزوماً متمایز) را که به k گروه متمایز تعلق دارند را در نظر می‌گیریم

$n=n_1+n_2+\dots+n_k$ مکان متمایز را در نظر می‌گیریم، n_1 شیئی گروه اول را می‌توان به $C(n,n_1)$ طریق بر این n مکان تخصیص داد طوریکه بیش از یک شیئی دریافت نکنند.

n_2 شیئی یکسان گروه دوم را می‌توان به $C(n-n_1,n_2)$ طریق به مکانهای باقیمانده چنان تخصیص داد که بیش از یک شیئی دریافت نکنند. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم که همه مکانها یک شیئی دریافت نمایند.

بنابر قاعده ضرب تعداد طرقی که می‌توان همه این n مکان را پر کرد عبارت است از (برابر است با)

$$C(n;n_1,n_2,\dots,n_k)=C(n,n_1)\times C(n-n_1,n_2)\times C(n-n_1-n_2,n_3)\times\dots\times C(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1},n_k)$$

PdPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$ (قضیه)

$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$

تا اینجا:

۲- جایگشت ، ترتیب مهم است ، تکرار نداریم $r \leq n$

۲- ترکیب ، ترتیب اهمیت ندارد ، تکرار نداریم $r \leq n$

۲- دنباله ، ترتیب مهم است ، تکرار داریم

۲- مجموعه ، ترتیب اهمیت ندارد ، تکرار داریم.

تعداد ۲- دنباله های یک مجموعه n عنصری چندتا است؟

۶- مجموعه $X = \{a, b, c, d, e\}$ $\{a, b, c, d, e, a, b\}$ $\{b, c, d, b, c, d, d\}$

قضیه) تعداد ۲- مجموعه های یک مجموعه n عنصری برابر است با $C(r+n-1, n-1)$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_n = r$

۲- مجموعه $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$U = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1} \quad \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2} \quad \underbrace{3, \ldots, 3}_{n_3} \quad \ldots \quad \underbrace{n, \ldots, n}_{n_n}]$

$V = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{y_1} \; 0 \; \underbrace{2, \ldots, 2}_{y_2} \; 0 \; \underbrace{3, \ldots, 3}_{y_3} \; 0 \; \ldots \; 0 \; \underbrace{n, \ldots, n}_{y_n}]$

$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = r$

$\frac{1}{1} \; \frac{1}{2} \; \frac{0}{3} \; \frac{2}{4} \; \frac{0}{5} \; \frac{0}{6} \; \frac{}{7} \; \ldots \; \frac{}{r+n-2} \; \frac{}{r+n-1}$

$C(\underbrace{r+n-1}_{\text{تعداد کفان}}, \underbrace{n-1}_{\text{تعداد اشیا میان}})$

قضیه

الف) تعداد جواب های صحیح نامنفی متمایز معادله خطی $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=r$ برابر است با

$$C(r+n-1, n-1)$$

ب) تعداد جواب های صحیح نامنفی متمایز نابرابر خطی $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n \leq r$ برابر است با $C(r+n, n)$

پ) تعداد جمله های بسط $\left(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n\right)^r$ برابر است با $C(r+n-1, n-1)$

مثال) در یک خوابگاه دانشجویی تعدادی دانشجوی سال های اول تا چهارم اسکان یافته اند. (الف) به چند طریق می توان یک دسته ۱۰ نفری از دانشجویان را برای نمایندگی خوابگاه انتخاب کرد؟

ب) به چند طریق می توان یک دسته ۱۰ نفری را چنان انتخاب کرد که حداقل شامل یک دانشجوی سال اول یک دانشجوی سال دوم و دو دانشجوی سال چهارم باشند.

الف) $p+q+r+s=10$ (دانشجویان سال اول، سال دوم، سال سوم، سال چهارم)

$$\text{جواب} = C(r+n-1, n-1) = C(13,3) = \frac{13!}{3!\,10!} = 286$$

$r=10$
$n=4$

ب) $p\geq 1, q\geq 1, r\geq 2, s\geq 2$ $\quad p'=p+1$ $\quad q'=q+1$ $\quad r'=r+2$ $\quad s'=s+2$

$$p'+q'+r'+s'=10 \Rightarrow p+1+q+1+r+2+s+2=10 \Rightarrow p+q+r+s=4 \Rightarrow \text{جواب} = C(7,3) = 35$$

$r=4$
$n=4$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

مسئله تخصیص :

به چند طریق می توان r شیئی یکسان را به n مکان متمایز تخصیص داد به طوریکه هر مکان بتواند هر تعداد شیئی که لازم است را دریافت کند.

$\underset{1}{n_1}$ $\underset{2}{n_2}$ $\underset{3}{n_3}$ ..... $\underset{n-1}{\quad}$ $\underset{n}{n_n}$

$$\begin{cases} n_1+n_2+\cdots+n_n=r \\ n_i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{جواب} = C(r+n-1, n-1)$$

مجموعه ای مرکب از r شیئی یکسان را می توان به $C(r-p+n-1, n-1)$ طریق به n مکان چنان تخصیص داد که مکان i ام حداقل p_i شیئی دریافت نماید

$$p = p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n$$

تعداد جمله های بسط $(n_1+n_2+\cdots+n_n)^r$ برابر است با $C(r+n-1, n-1)$

$$n_1^{n_1}\, n_2^{n_2} \cdots n_n^{n_n} \qquad n_1+n_2+\cdots+n_n=r$$

$$\underbrace{n_1 n_1 \cdots n_n}_{n_1} \quad \underbrace{n_2 n_2 \cdots n_2}_{n_2} \quad \underbrace{n_n n_n \cdots n_n}_{n_n}$$

اصل لانه کبوتر :

اگر $kn+1$ کبوتر یا بیشتر n لانه کبوتر را اشغال نمایند آنگاه در حداقل یکی از لانه ها بیش تر از k کبوتر وجود خواهد داشت

مثال) اگر فرض کنیم سر انسان حداکثر ۹۹۹۹۹ تار مو داشته باشد، در شهری که جمعیت آن بیشتر از ۴ میلیون است حداقل ۴ نفر وجود دارند که تعداد موی های سرشان یکسان است.

$\underset{0}{40}$ $\underset{1}{40}$ $\underset{2}{\overset{41}{40}}$ ..... $\underset{99999}{40}$

مثال) کیسه ای حاوی ۱۰ مهره قرمز، ۸ مهره آبی، ۶ مهره سفید، ۱۲ مهره سبز و ۷ مهره زرد است. حکایت است تعیین کمترین تعداد مهره هایی که باید انتخاب شود تا حداقل شش تا (۷ تا) هم رنگ باشند و احداقل ۹ مهره هم رنگ باشند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف) $\frac{3}{R}\ \frac{3}{B}\ \frac{3}{W}\ \frac{3}{G}\ \frac{3}{Y}$ $k=2$ $kn+1=14$
$n=5$

ب) $\frac{8}{R}\ \frac{8}{B}\ \frac{8}{W}\ \frac{8}{G}\ \frac{8}{Y}$ $n=5$ $(kn+1)-(8-5)-(8-7)$
$k=8$ $=41-3-1=37$

اگر m کبوتر را به n لانه کبوتر تخصیص دهیم آنگاه حداقل یکی از لانه ها بیشتر از k کبوتر خواهد داشت. $k=\left[\frac{m-1}{n}\right]$

قضیه) اگر $m=p_1+p_2+\cdots+p_n-n+1$ کبوتر را بین n لانه کبوتر بخش کنیم آنگاه

لانه اول حداقل p_1 کبوتر
لانه دوم حداقل p_2 کبوتر
⋮
لانه n ام حداقل p_n کبوتر خواهد داشت.

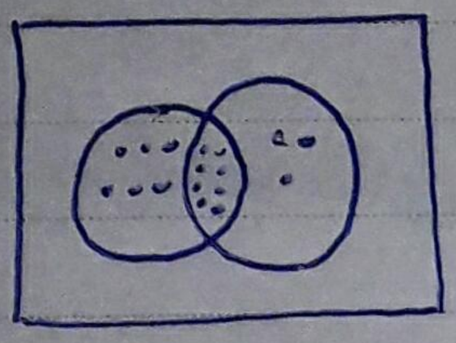
مثال) کیسه ای حاوی شش مهره قرمز، پنج مهره سفید، و هفت مهره آبی است. حداقل چند مهره باید انتخاب شوند تا مطمئن شویم که حداقل سه مهره قرمز یا حداقل چهار مهره سفید یا حداقل پنج مهره آبی انتخاب شده است.

تعداد لانه‌ها $n=3$ $p_1=3$ $p_2=4$ $p_3=5$

تعداد کبوتر‌ها $m=(3+4+5)-3+1=10$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

اصل شمول - طرد



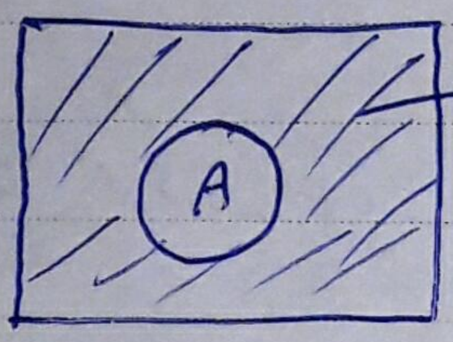
$N(A) = 15$

$N(B) = 12$

$N(A \cap B) = 9$

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 15 + 12 - 9 = 18$

$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - [N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C)] + N(A \cap B \cap C)$



N: تعداد عناصر مجموعه مرجع $N(A') = N - N(A)$

$N((A \cup B)') = N - N(A \cup B)$

$N(A' \cap B') = N - [N(A) + N(B)] + N(A \cap B) = N - S_1 + S_2 = N - S_1 + S_2 - S_3$

(S_1: $N(A) + N(B)$, S_2: $N(A \cap B)$)

$N(A' \cap B' \cap C') = N - [N(A) + N(B) + N(C)] + [N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C)] - N(A \cap B \cap C)$

(S_1: $N(A) + N(B) + N(C)$, S_2: $N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C)$, S_3: $N(A \cap B \cap C)$)

در حالت کلی، $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

$S_1 = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_n)$

$S_2 = N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3) + \dots$

$S_3 = N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots$

$S_n = N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$

$$N(A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n') = N - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n$$

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

تعریف پرشش:

پرشش یعنی هیچ عنصری سر جای اصلی خود قرار نداشته باشد، مثلاً اگر $X=\{a_1,a_2,a_3\}$ و ۳ خانه ۱، ۲، ۳ داشته باشیم به طوری که جای اصلی a_i خانه i باشد آنگاه $\frac{a_2}{1}\ \frac{a_3}{2}\ \frac{a_1}{3}$ یک پرشش محسوب می‌شود.

قضیه) تعداد کل پرشش‌های یک مجموعه n عنصری برابر است با

$$D_n = n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

A_i: مجموعه کلیه جایگشت‌هایی است که در آنها عنصر iام در خانه اصلی خود قرار داشته باشد.

$$X=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

$$\left.\begin{array}{l} N(A_1)=(n-1)! \\ N(A_2)=(n-1)! \\ \vdots \\ N(A_n)=(n-n)! \end{array}\right\} C(n,1) \quad S_1=N(A_1)+N(A_2)+\cdots+N(A_n)=C(n,1)(n-1)!$$

$$\left.\begin{array}{l} N(A_1\cap A_2)=(n-2)! \\ \vdots \\ N(A_1\cap A_n)=(n-2)! \end{array}\right\} C(n,2) \quad S_2=N(A_1\cap A_2)+N(A_2\cap A_3)+\cdots=C(n,2)(n-2)!$$

$$N=(A_1'\cap A_2'\cap\cdots\cap A_n')=n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!+\cdots+(-1)^n C(n,n)(n-n)!$$

$$=n!-\frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)!+\frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)!+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!(n-n)!}(n-n)!$$

$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

PAPCO

• حکلوب است تعیین تعداد جواب های صحیح معادله $a+b+c=25$ در صورتی که،

$2 \leq a \leq 4$
$3 \leq b \leq 6$
$4 \leq c \leq 8$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=r \quad x_i \geq p_i \quad p=p_1+p_2+\cdots+p_n \quad C(r-p+n+1, n-1)$

x

$0 \leq a-2 \leq 2$ $\quad a=x+2$ $\quad x+y+z=14$

$0 \leq \frac{b-3}{y} \leq 3$ $\quad b=y+3$ $\quad x \geq 3$ $\quad 0 \leq x \leq 2$ Not

$0 \leq \frac{c-4}{z} \leq 4$ $\quad c=z+4$ $\quad y \geq 4$ $\quad 0 \leq y \leq 2$ Not

$z \geq 0$ $\quad 0 \leq z \leq 4$ Not

N: مجموعه جواب های $x+y+z=14$

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$z \geq 0$

$n=3$
$r=14$

$C(13,2)$

X: مجموعه جواب های $x+y+z=14$

$x \geq 3$
$y \geq 0$
$z \geq 0$

$r=14$
$p=3$
$n=3$

$C(15,2)$

Y: مجموعه جواب های $x+y+z=14$

$x \geq 0$
$y \geq 4$
$z \geq 0$

$r=14$
$n=3$
$p=4$

$C(12,2)$

Z: مجموعه جواب های $x+y+z=14$

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$z \geq 5$

$r=14$
$n=3$
$p=5$

$C(12,2)$

$N(x' \cap y' \cap z')$ $\quad x'=x \leq 2$ $\quad y'=y \leq 3$ $\quad z'=z \leq 4$

$N=C(14+3-1,3-1)=C(16,2)$ $\quad N(x \cap y)=C(14-7+3-1,3-1)$

ξ_1 ξ_2

$N(x)=C(14-3+3,3-1)=C(14,2)$ $\quad N(x \cap z)=C(14-8+3-1,3-1)$

$N(y)=C(14-4+3-1,3-1)=C(12,2)$ $\quad N(y \cap z)=C(14-9+3-1,3-1)$

$N(z)=C(14-5+3-1,3-1)=C(11,2)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

S_3 $N(x \cap y \cap z) = C(14-12+3-1, 3-1)$ $N(x' \cap y' \cap z') = N - S_1 - S_2 - S_3 = 0$

تعریف: اگر r و n دو عدد صحیح مثبت باشند ($n \geq r$) عدد استرلینگ نوع دوم که با $S(r,n)$ نشان داده می‌شود،

عبارت است از: $n!\,S(r,n) = n^r - C(n,1)(n-1)^r + C(n,2)(n-2)^r - \cdots + (-1)^{n-1} C(n,n-1)$

قضیه) تعداد r- دنباله‌هایی که با استفاده از عناصر مجموعه N عنصری به گونه‌ای ساخته می‌شوند که در هر دنباله هر عنصر مجموعه

حداقل یکبار ظاهر می‌شود، برابر است با $n!\,S(r,n)$ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

A_i: مجموعه r- دنباله‌هایی که شامل عنصر x_i نیستند. $N(A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n')$

$$q_i = C(n,i)(n-i)^r$$

قضیه) تعداد طرق تخصیص r شیء متمایز به n مکان طوری‌که هر مکان حداقل یک شیء دریافت نماید برابر است با

A_i: مجموعه تخصیص‌هایی که در آن مکان iام هیچ شیئی دریافت نکند. $n!\,S(r,n)$

قضیه) تعداد افرازهای مجموعه r عنصری طوری‌که هر افراز دارای n مجموعه ناتهی باشد $S(r,n)$ است.

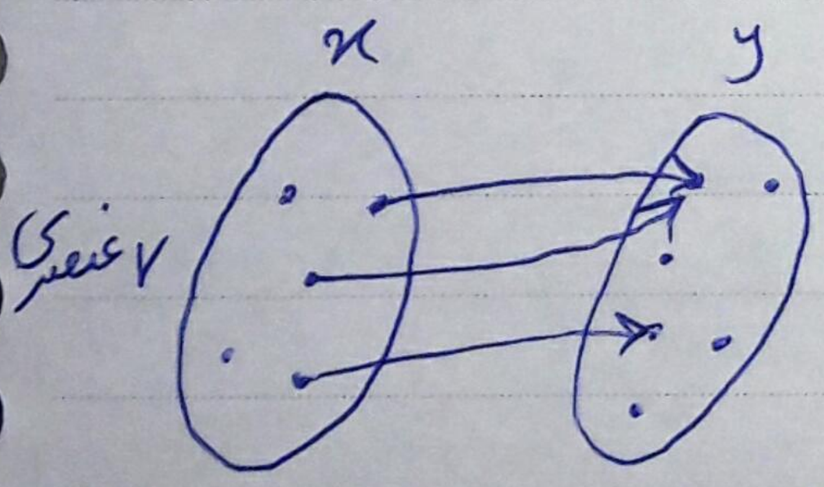
۲- تعداد افرازهای مجموعه‌ای r عنصری به طوری‌که هر افراز حداکثر n مجموعه ناتهی داشته باشد، برابر است با:

$S(r,n) + S(r,n-1) + \cdots + S(r,1)$

در یک از عناصر x و یک مکان در نظر می‌گیریم، تعداد توابع پوشا

برابر است با تعداد طرق تخصیص r شیئ به n مکان

طوری که هر مکان حداقل یک شیئ دریافت کند.



PAPCO

چند تابع می توان از A به B تعریف کرد؟ $n \times n \times \cdots \times n = n^r$

چند تابع یک به یک می توان تعریف کرد؟ (از A به B) $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = P(n,r)$

چند تابع پوشا از A به B می توان تعریف کرد؟ $n! \, S(r,n)$

توابع مولد (فصل دوم)

حکلوب است تعیین تعداد جواب های صحیح $a+b+c=10$ بطوریکه $2 \leq a \leq 4 \quad 3 \leq b \leq 4 \quad 2 \leq c \leq 4$

	a	b	c
$x^2x^4x^4$	۲	۴	۴
$x^3x^4x^3$	۳	۴	۳
$x^4x^3x^3$	۴	۳	۳
$x^2x^3x^4$	۲	۳	۴
$x^3x^4x^3$	۳	۴	۳
$x^4x^4x^2$	۴	۴	۲

$P_a = x^2 + x^3 + x^4$

$P_b = x^2 + x^3 + x^4$

$P_c = x^2 + x^3 + x^4$

$P = P_a \cdot P_b \cdot P_c = (\underbrace{x^2 + x^3 + x^4}_{a} \underbrace{)^3}_{b} = x^6 + 3x^7 + 6x^8 + 7x^9 + 6x^{10} + 3x^{11} + x^{12}$

$([x^2 + x^3] + x^4)^3$

تعریف:

الف) سری توانی، یک سری نامتناهی به صورت $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ که در آن a_i ها اعداد حقیقی هستند و x متغیر است.

ب) اگر $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r$ ، $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_r x^r$ دو سری توانی باشند، حاصل جمع این دو سری یک سری توانی است که در آن ضریب x^r برابر است با $a_r + b_r$

حاصل ضرب

Subject:
Year. Month. Date.

پ) اگر a_r جواب یک مسئله ترکیباتی باشد تابع مولد معمولی این مسئله ترکیباتی عبارت است از:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\to a_rx^r+\cdots$$

مثال: مطلوب است تعیین تابع مولد معمولی تعداد طرق انتخاب r عنصر از مجموعه‌ای n عنصری:

$$=(1+x)^n$$

$$a_r=C(n,r)\quad y(x)=C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots\cdots+C(n,r)x^r+\cdots\cdots+C(n,n)x^n$$

مطلوب است تعیین تابع مولد معمولی تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $2a+3b+5c=r$

$$A=2a=\{0,2,4,6,8,\cdots\cdots\}\qquad y(x)=(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots\cdots)$$

$$B=3b=\{0,3,6,9,\cdots\cdots\}\qquad (1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots\cdots)$$

$$C=5c=\{0,5,10,15,\cdots\cdots\}$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $a+b+c=4$

$$a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$$

$$g(x)=\frac{(1+x^5+x^{10}+x^{15})^3}{x^4}$$

اگر a_r عبارت باشد از تعداد طرق انتخاب r مهره از مجموعه‌ای مرکب از مهره‌های قرمز، آبی و سفید طوری که تعداد مهره‌های قرمز انتخاب شده حداکثر ۲، تعداد مهره‌های آبی انتخاب شده، حداکثر ۳ و تعداد مهره‌های سفید انتخاب شده، حداکثر ۴ باشد. آنگاه a_r ضریب x^r در $g(x)=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$ است.

a_r x^r

تعداد طرق انتخاب r مهره

مثال ۲ /

قضیه) فرض کنیم a_r ضریب x^r در $g(x)=(1+x+x^2+\cdots)^n$ آنگاه $a_r=C(r+n-1,n-1)$

ب) $(1-x^m)^n=1-C(n,1)x^m+C(n,2)x^{2m}-\cdots+(-1)^n x^{nm}$

پ) $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n=(1-x^m)^n(1+x+x^2+\cdots)^n$ } اثبات به عنوان تمرین

اثبات الف)

$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$, $x_i\geq 0$ } جواب $=C(r+n-1,n-1)$

ضریب x^r در $h(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^r)^n$ با ضریب x^r در $g(x)=(1+x+x^2+\cdots)^n$ برابر است

پس x^r در a_r ← جواب جمله ترکیبی

مطلوب است تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $a+b+c+d=27$

ضریب x^{27} در $g(x)$ جواب جمله خواسته برد.

تابع مولد $g(x)=(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$

$g(x)=\left(x^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\right)^4=x^{12}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$ $\Big|$ $h(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$

$m-1=5 \Rightarrow m=6$, $n=4$

ضریب x^{15} در $h(x)$ جواب جمله خواسته برد. طبق قضیه (ب)

$(1+x+x^2+\cdots+x^5)^4=(1-x^6)^4(1+x+x^2+\cdots)^4$

طبق قضیه (ب) $(1-x^6)^4=1-C(4,1)x^6+C(4,2)x^{12}+\cdots$

$(1+x+x^2+\cdots)^n=1+C(4,1)x+C(5,2)x^2+\cdots+C(12,9)x^9+\cdots$

PAPCO

تابع مولدنمایی،

مثال) مطلوب است تعیین تعداد طرق آرایش دادن ۱۵ مهره در یک ردیف با استفاده از مهره‌های دارای سه رنگ قرمز، آبی، سفید که در هر آرایش حداقل یک مهره از هر رنگ وجود داشته باشد و با این فرض که حداقل ۳ مهره از هر رنگ در اختیار داریم.

R	B	W	
۳	۱	۱	$\rightarrow \frac{۵!}{۳!۱!۱!}$
۱	۳	۱	$\rightarrow \frac{۵!}{۱!۳!۱!}$
۱	۱	۳	$\rightarrow \frac{۵!}{۱!۱!۳!}$
۲	۲	۱	$\rightarrow \frac{۵!}{۲!۲!۱!}$
۲	۱	۲	
۱	۲	۲	

$۲۰+۲۰+۲۰=۶۰$

$۳۰+۳۰+۳۰=۹۰$

$۹۰+۶۰=۱۵۰$ تعداد حالات مای ممکن

حل با استفاده از تابع مولدنمایی،

$g(x)=\left(\frac{x^۱}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}\right)^۳ \rightarrow$ دنبال ضریب $\frac{x^۵}{۵!}$

ضریب $\frac{x^۵}{۵!}$ در $g(x)$ با ضریب $\frac{x^۵}{۵!}$ در $h(x)=(x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\dots)^۳$ یکسان هستند.

$h(x)=(e^x-۱)^۳=e^{۳x}-۳e^{۲x}+۳e^x-۱$

$=۲^۵-۳(۲^۵)+۳(۱)-۱$

$=۲۴۳-۹۶+۳-۱=۱۴۹$

$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\dots+\frac{x^۵}{۵!}+\dots$

$e^{۲x}=۱+۲x+\frac{(۲x)^۲}{۲!}+\dots+\frac{(۲x)^۵}{۵!}+\dots$

$e^{۳x}=۱+۳x+\frac{(۳x)^۲}{۲!}+\dots+\frac{(۳x)^۵}{۵!}+\dots$

مثال) تابع مولد نمایی تعداد طرق آرایش r عنصر متمایز از مجموعه‌ای n عنصری را بدست آورید. $b_r = P(n,r)$

$$b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + b_r \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

$$= P(n,0) + P(n,1)\, x + P(n,2) \frac{x^2}{2!} + \cdots + P(n,r) \frac{x^r}{r!} + \cdots + P(n,n) \frac{x^n}{n!}$$

$$= C(n,0) + C(n,1)\, x + C(n,2)\, x^2 + \cdots + C(n,r)\, x^r + \cdots + C(n,n)\, x^n$$

مثال) مطلوب است تعیین تعداد طرق آرایش دادن r مهره در یک ردیف با استفاده از مهره‌های دارای سه رنگ متفاوت قرمز، آبی و سفید طوری که در هر آرایش حداقل یک مهره از هر رنگ را داشته باشیم و با این فرض که حداکثر سه مهره قرمز، ۲ مهره سفید و حداکثر دو مهره آبی در اختیار داشته باشیم.

ضریب $\frac{x^5}{5!}$ در تابع $g(x)$ = جواب $\quad g(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})(x + \frac{x^2}{2!})^2$

به دنبال ضریب $\frac{x^5}{5!}$ در تابع $h(x)$ می‌گردیم. $\Rightarrow$ ضریب $\frac{x^5}{5!}$ در تابع $g(x)$ با ضریب $\frac{x^5}{5!}$ در $h(x)$ با هم برابرند

$$h(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)(x + \frac{x^2}{2!})^2 = (e^x - 1)(x + \frac{x^2}{2!})$$

قضیه) فرض کنیم k دسته شی داریم

الف) اگر در هر یک از این دسته‌ها تعداد نامحدودی شیئ وجود داشته باشد آنگاه تعداد r - جایگشت‌های حاصل از به کارگیری اشیاء این k دسته عبارت است از ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در تابع مولد نمایی

$$g(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^k = e^{kx}$$

ب) اگر تعداد اشیاء دسته i ام حداکثر n_i باشد، آنگاه تعداد r - جایگشت‌ها عبارت خواهد بود از ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در

$$h(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!})(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}) \cdots (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!})$$

ب) ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در $(e^x-1)^n$ برابر است با $n!S(r,n)$

مثال) مطلوب است تعیین تعداد طرق جای دادن ۹ نفر در ۴ اتاق طوری که هیچ اتاقی بدون ساکن نباشد.

حداقل ۱ ← ○ ○ ○ ○ حداکثر ۶

۱ ۲ ۳ ۴

$$g(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^4}{4!})^4$$

جواب = ضریب $\frac{x^9}{9!}$

$$h(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^4=(e^x-1)^4=e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1$$

فصل سوم - روابط بازگشتی

حل معادلات بازگشتی:

معادلات بازگشتی ممکن $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$

t_i: مقادیری که به دنبال آنها هستیم a_i: ضرایب ثابت

$t_n = x^n \Rightarrow a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} = 0$

$n = k \Rightarrow a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \rightarrow$ فرض کنیم این ریشه‌ها متمایز باشند

این معادله k ریشه دارد، $r_1, r_2, \ldots, r_k$

$\Rightarrow t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$

مثال: فرض کنید معادله بازگشتی به صورت $t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$ شرایط $n \geq 2$ و $t_0 = 0$ ، $t_1 = 1$ مفروض است.

$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 4 \end{cases}$

$t_n = c_1(-1)^n + c_2(4)^n$ (1)

$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = -c_1 + 4c_2 \end{cases} \Rightarrow 1 = -(-c_2) + 4c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{5}$

$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -\frac{1}{5}}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \boxed{t_n = \frac{1}{5}\left[4^n - (-1)^n\right]}$

دنباله فیبوناچی:

$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad n \geq 2 \quad \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$

$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ c_2 = \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

$t_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

فرض می‌کنیم ریشه‌ها با هم متمایز بوده باشند (تکرار وجود ندارد)

مثال)

$$t_n = 5t_{n-1} + 8t_{n-2} + 4t_{n-3} \quad \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{t_n = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3 n(2)^n}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1 \\ c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_2 + 2c_2 + 2c_3 = 1 \\ -c_2 + 4c_2 + 8c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 + 2c_3 = 1 \\ 3c_2 + 8c_3 = 2 \end{cases} \xrightarrow{-3} \begin{cases} -3c_2 - 6c_3 = -3 \\ 3c_2 + 8c_3 = 2 \end{cases}$$

$$2c_3 = -1$$

$$\boxed{c_3 = -\frac{1}{2}}$$

$$c_2 + 2c_3 = 1 \Rightarrow c_2 + 2(-\tfrac{1}{2}) = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = 2}$$

$$c_1 = -c_2 \Rightarrow \boxed{c_1 = -2}$$

$$\boxed{t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2}$$

معادلات بازگشتی ناهمگن:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

b: عددی است ثابت $p(n)$: یک چند جمله‌ای برحسب n از درجه d

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n \times 1 \quad \begin{matrix} b=3 \\ p(n)=1 \end{matrix} \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$n = n+1$

$$t_{n+1} - 2t_n = 2^{n+1}$$

$\times 3$

$$3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$$

$$t_{n+1} - 5t_n + 6t_{n-1} = 0 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

مثال) تعداد حرکت های لازم در سئله برج هانوی

$$\begin{cases} t_n = 2t_{n-1} + 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases} \qquad t_n - 2t_{n-1} = 1^n \alpha \quad b=1 \quad p(n)=1 \qquad (n-2)(n-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$t_n = C_1 (1)^n + C_2 (2)^n$$

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n = 2^n - 1}$$

$$t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$$

$$t_0 = 0$$

$$t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n \Rightarrow t_n - 2t_{n-1} = 1^n \alpha n + 2^n \alpha 1 \Rightarrow (n-2)(n-1)^2(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 1 \\ r_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_n = C_1 (1)^n + C_2 n (1)^n + C_3 (2)^n + C_4 n (2)^n \\ t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 12, t_3 = 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_n = -2 - n + 2^{n+1} + n \cdot 2^n$$

تغییر متغیر:

مثال)

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

$n = 2^k$

$\Rightarrow T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k \Rightarrow t_k = 4t_{k-1} + 2^k$

$\Rightarrow t_k - 4t_{k-1} = 2^k \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \begin{cases} r_1 = 4 \\ r_2 = 2 \end{cases}$

$t_k = c_1(4)^k + c_2(2)^k \Rightarrow T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n \quad n > 1$

$n = 2^k$

$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k \cdot k \Rightarrow t_k = 2t_{k-1} + k2^k \Rightarrow t_k - 2t_{2k-1} = 2^k \cdot k$

$\Rightarrow (x-2)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 2 \end{cases}$ $\quad t_k = c_1(2)^k + c_2 k(2)^k + c_3 k^2(2)^k$

$\Rightarrow T(n) = c_1(n) + c_2 n\log n + c_3 n(\log n)^2$

$f_k(n) = a f(\frac{n}{b}) + c$

$f(1) = d$

$n = b^k$

$A = \frac{ad - d + c}{a-1} \qquad B = \frac{-c}{a-1}$

$f(n) = a f(\frac{n}{b}) + c = a\left[af(\frac{n}{b^2}) + c\right] + c$

$a^k = a^{\log_b^n} = n^{\log_b^n}$

$= a^2 f(\frac{n}{b^2}) + c(1+a)$

$\vdots$

$= a^k f(\frac{n}{b^k}) + c\left[1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1}\right]$

$\Rightarrow \boxed{f(n) = An^{\log_b^n} + B}$

$= a^k d + c\frac{a^k - 1}{a-1} = Aa^k + B$

PAPCO

$$f(n)=af(\frac{n}{b})+cn$$

$$n=b^k \ , \ f(1)=d$$

$$f(n)=a^k f(1)+cn\left[1+\frac{a}{b}+(\frac{a}{b})^2+\cdots\cdots+(\frac{a}{b})^{k-1}\right]$$

حالت اول: $a=b \Rightarrow f(n)=a^k d+cnk=b^k d+cnk=nd+cn\log_b^n$

حالت دوم: $a\neq b \Rightarrow f(n)=A.n^{\log_b^a}+Bn \quad A=\frac{bd-ad-bc}{b-a} \quad B=\frac{bc}{b-a}$

حل معادلات بازگشتی با استفاده از توابع مولد:

$a_n=2a_{n-1}$

می‌توانیم a_n را به عنوان ضریب x^n در یک سری توانی در نظر بگیریم که این سری توانی تابع مولد را بطور بازگشتی نمایندگی کند:

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$a_nx^n=2a_{n-1}x^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$a_1x=2a_0x$$
$$a_2x^2=2a_1x^2$$
$$\vdots$$
$$a_nx^n=2a_{n-1}x^n$$
$$\vdots$$
$$g(x)-a_0=2xg(x)$$

$$\frac{1}{1-2k}=1+2k+(2k)^2+\cdots\cdots+(2k)^n$$

$a_n = 2a_{n-1} - (\frac{n}{2})$

$a_0 = 1$

$g(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$a_n x^n = 2a_{n-1} x^n - (\frac{n}{2}) x^n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_1 x = 2a_0 x - \frac{1}{2} x$

$a_2 x^2 = 2a_1 x^2 - \frac{2}{2} x^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$g(x) - 1 = 2x g(x) - \frac{x}{2}(1 - 2x + 3x^2 + \cdots)$

$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$

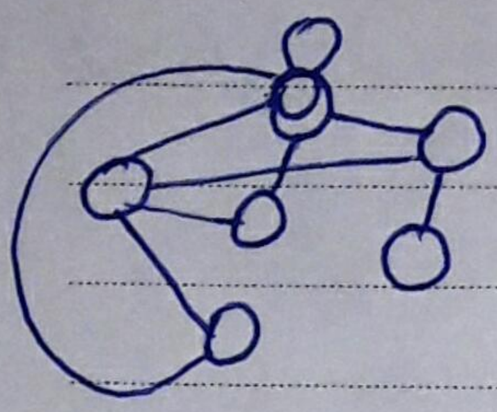
$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$

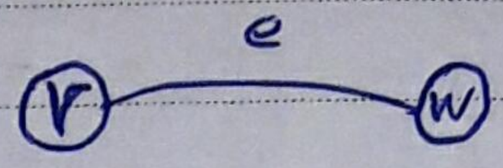
$g(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x}\right]$

$a_n = \frac{1}{2}\left[1 + (n+1) + 2^n\right]$

گراف ها

گراف ماننده $G=(V,E)$ ساختاری است مرکب از یک مجموعه متناهی ماننده V از رئوس (گره ها) و یک مجموعه متناهی از یال ها به طوریکه هر یال e به جفتی از رئوس مانند V و W وابسته شده است.

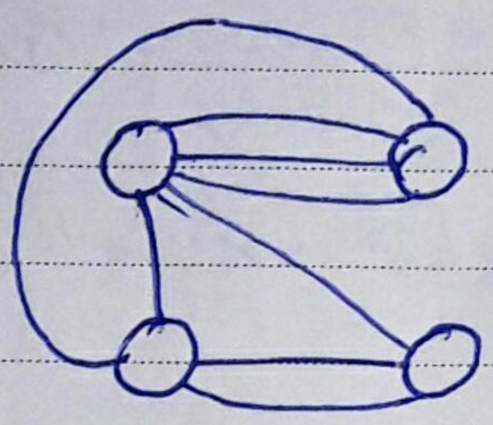




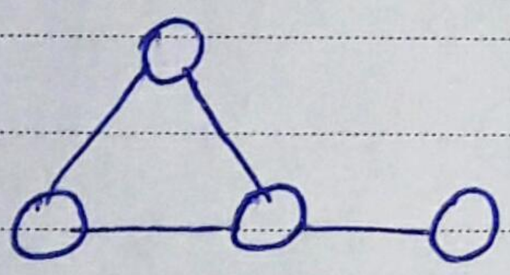
$e=\{V,W\}$

W و V رئوس مجاور هستند هم

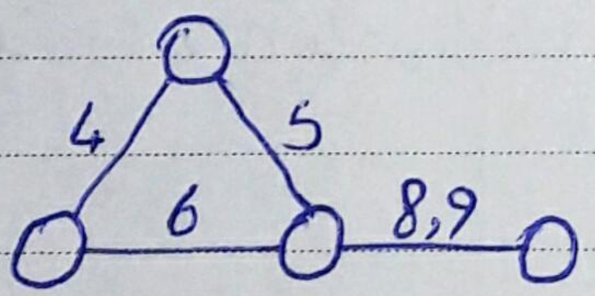
اگر بیش از یک یال جفت هایی از رئوس گرافی را به هم وصل کنند این گراف را گراف چندگانه گویند.



گرافی را ساده گویند هرگاه هیچ حلقه یا یال جداگانه نداشته باشد.



اگر به هر یال گراف عددی حقیقی نسبت دهیم آن گراف را گراف وزن دار یا شبکه می نامند.

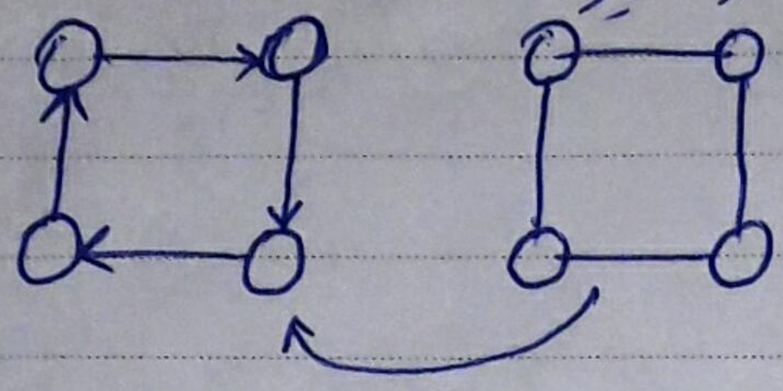


دو رأس را مجاور هم گویند هرگاه کمانی از سوی یکی به دیگری وجود داشته باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر به هر کمان عددی حقیقی نسبت دهیم به گراف حاصل، گراف جهت دار وزن دار و یا شبکه جهت دار می گوییم.

در یک گراف جهت دار اگر هر کمان را با یک بال جایگزین کنیم، ساختار حاصل را گراف زیربنای گراف جهت دار می نامند.

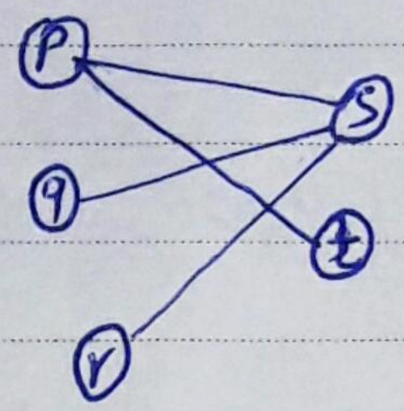


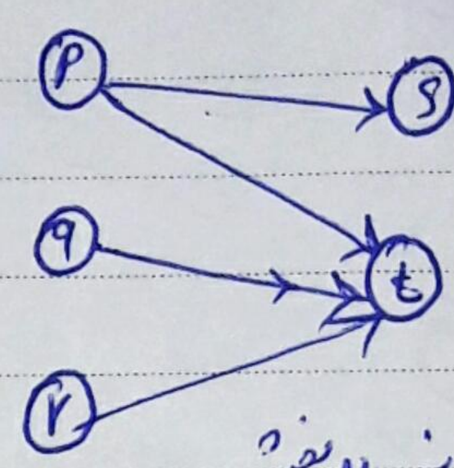
گراف دو بخشی:

ساختاری است به صورت $G=(V,W;E)$، V و W دو مجموعه متناهی از رئوس هستند و E مجموعه متناهی از یال ها است، طوری که هر یال e، یالی است بین گره از V و گره از W

$V=\{P,9,7,4\}$

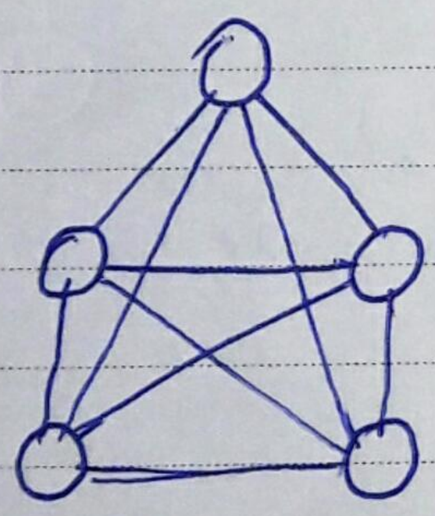
$W=\{S,t\}$





گراف دو بخشی جهت دار

گراف ساده n رأسی را کامل گوییم هرگاه بین هر جفت از رئوس آن یالی وجود داشته باشد.

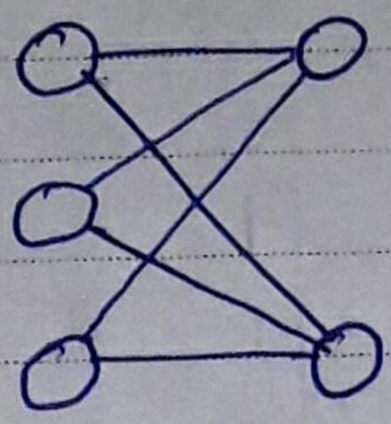


K_n

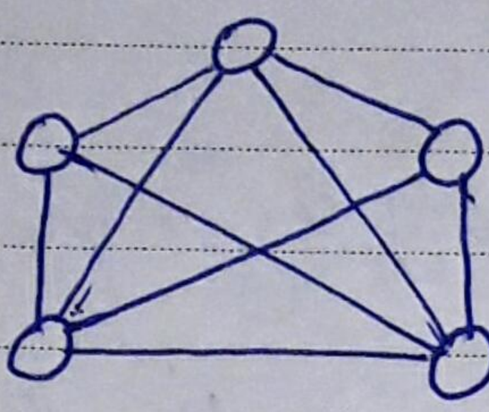
Subject:
Year. Month. Date. ( )

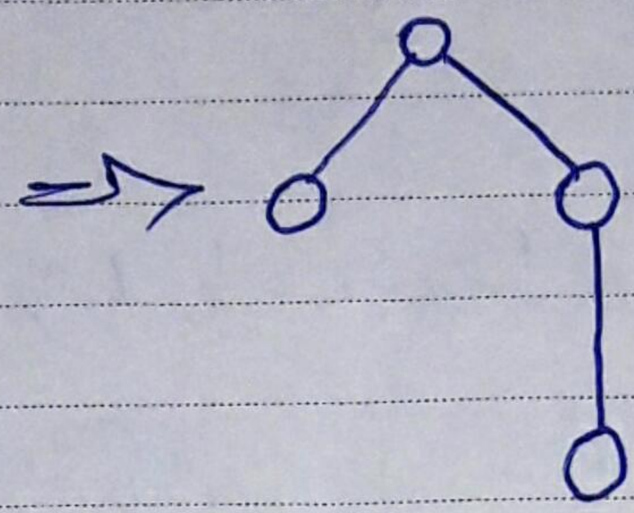
$|V|=p$ $K_{p,q}$

$|W|=q$ $K_{2,3}$



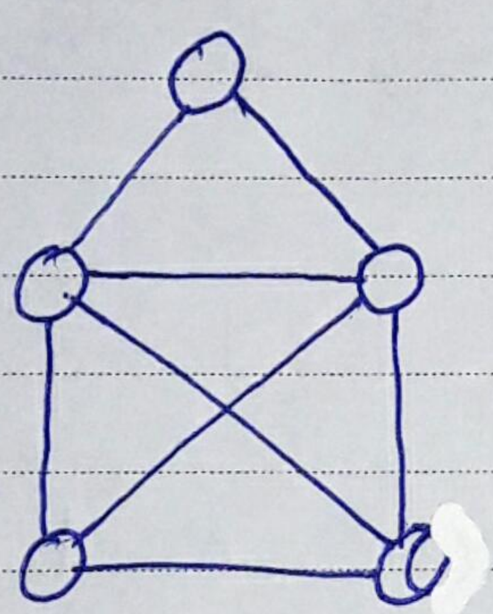
گرافی باشد $G'=(V',E')$ زیرگراف $G=(V,E)$ می‌نامند هرگاه $\begin{cases} V' \subseteq V \\ E' \subseteq E \end{cases}$



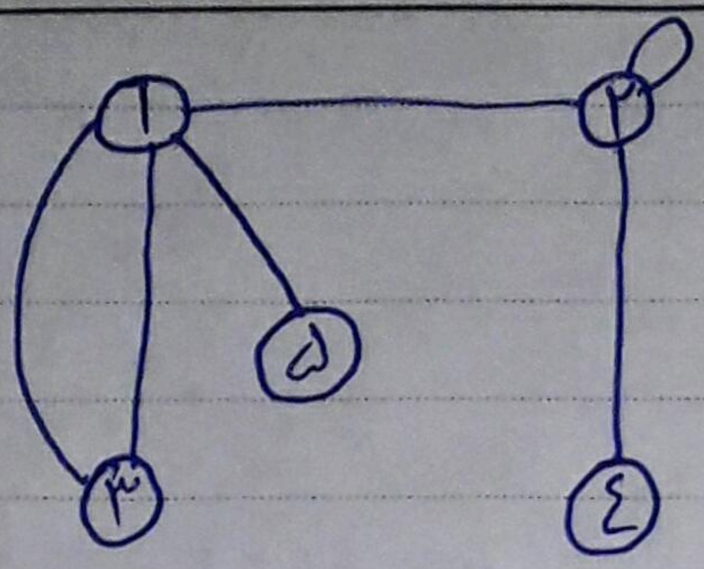


اگر $W \subseteq V$ زیرگراف القایی به وسیله W عبارت است از گراف $H=(W,F)$

$U,V \in W$



Subject:
Year. Month. Date. ( )



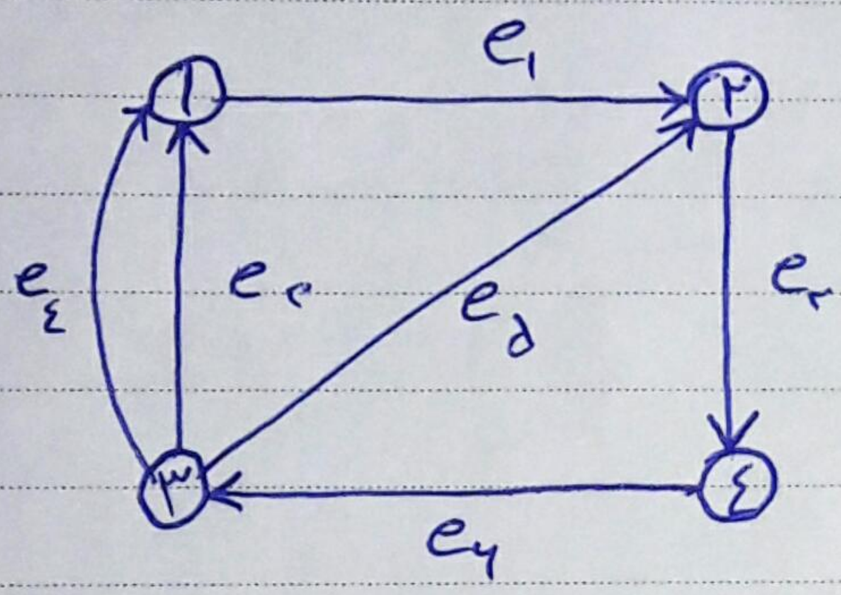
ماتریس وقوعی

$$B_z = \begin{array}{c} \\ H \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

در یک ماتریس وقوعی حاصل جمع عناصر سطر نا برابر است با درجه رأس آن

قضیه: اگر G گرافی چندگانه و فاقد حلقه و دارای m یال باشد، آنگاه حاصل جمع درجه‌های همه رئوس G برابر $2m$ است.

نتیجه: در هر گراف چندگانه فاقد حلقه تعداد رئوس فرد عددی زوج است.



ماتریس وقوعی گراف جهت دار:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس وقوع گراف جهت دار حاصل جمع همه عناصر سطح i برابر است با درجه ورودی گره I - درجه خروجی گره i

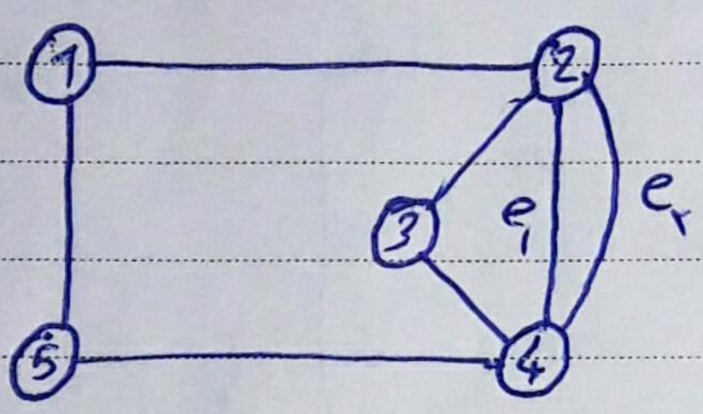
در یک گراف جهت دار حاصل جمع همه گره های خروجی برابر است با تعداد کل کمان ها که این نیز برابر است با

حاصل جمع همه درجه های ورودی

حسیر،

همدی بین ۲ - رأس V_1 و V_2 در یک گراف وزنی برای است با طولی از رئوس و یال ها به صورت زیر:

$V_1 \xrightarrow{e_1} V_2 \xrightarrow{e_2} V_3 \cdots\cdots \xrightarrow{e_{r-1}} V_r$



۵-۱-۲-۳-۲-۱-۳-۱

همیری بین گره ۱ و گره ۵

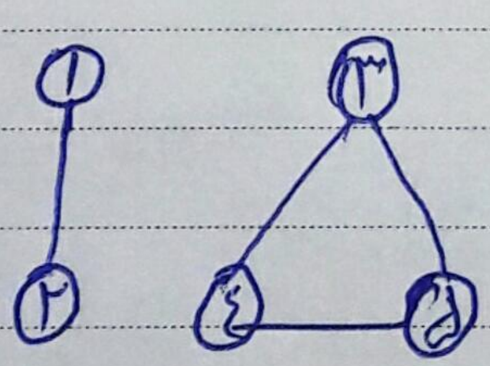
حسیر سازی:

همیری که همه رئوس آن متمایز باشد. ۵-۴-۳-۲-۱ (مثال

گراف هم بند:

گرافی را هم بند می گوییم هرگاه بین هر جفت از رئوس آن حسیری وجود داشته باشد مثل گراف بالا

مثال گراف ناهم بند



Subject:
Year. Month. Date. ( )

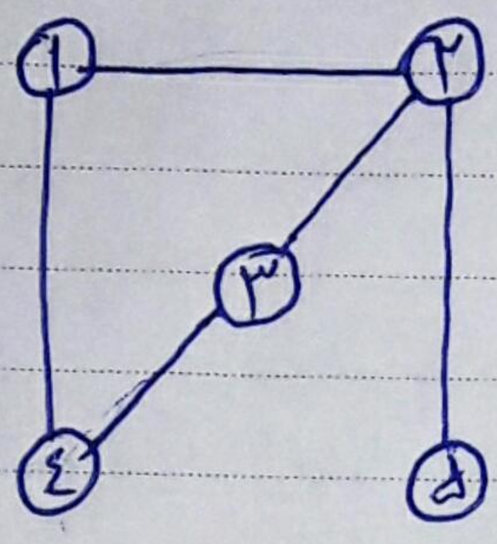
مسیر بسته، مسیری است بین یک رأس و خودش را بسته می نامند.

مدار: مسیری بسته که در آن همه یال ها متمایز باشند. ۲-۴-۲-۱-۵-۴-۳-۲

مداری که در آن همه رئوس متمایز باشد، دور نامیده می شود. ۲-۳-۴-۲

k- مسیر: مسیری که k یال دارد را k- مسیر می نامیم.

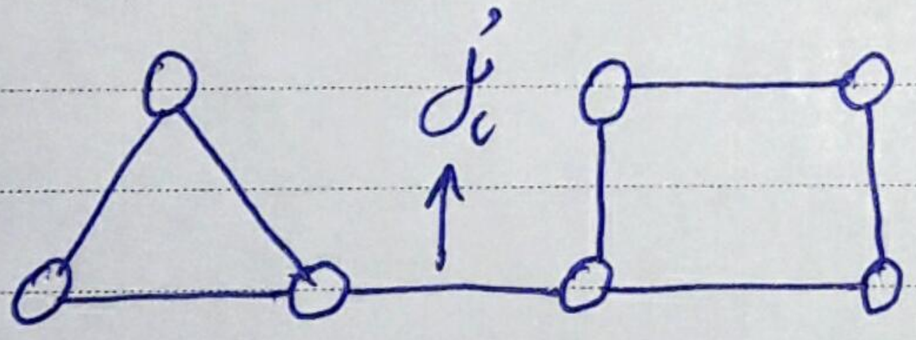
قضیه: اگر A ماتریس مجاورتی گرافی باشد، عنصر (i,j) در توان k ام (A^k) برابر است با تعداد k- مسیرهای بین رأس i و رأس j.



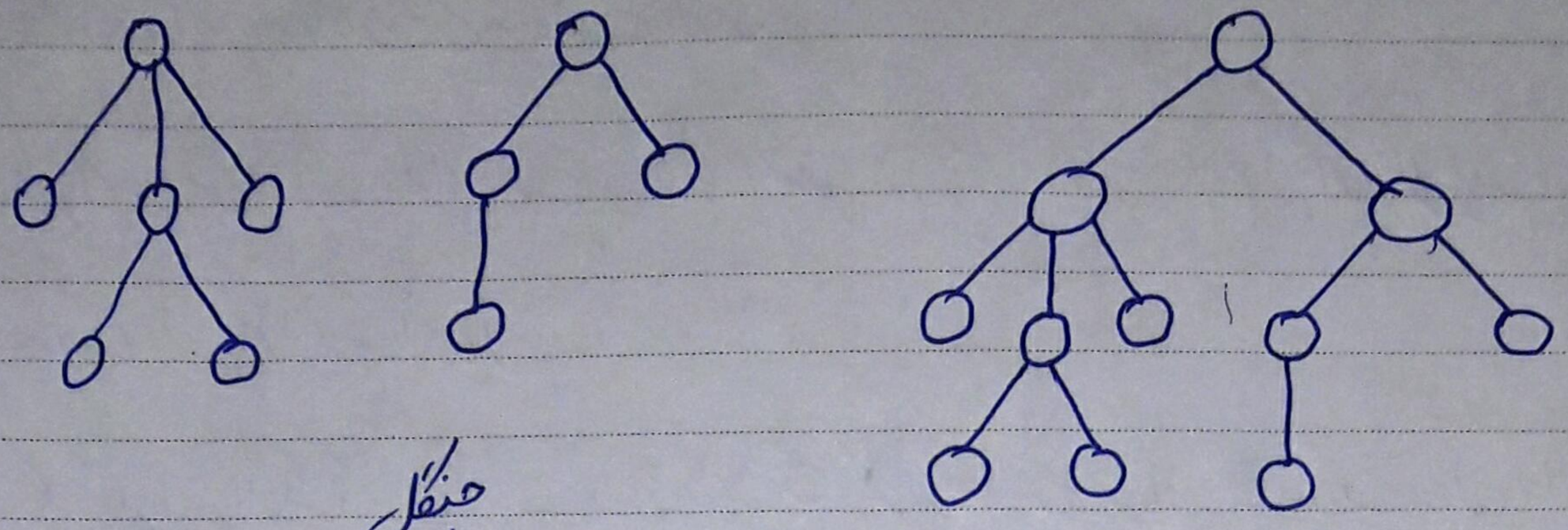
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} ۹ & ۱۳ & ۱۱ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۱۵ & ۷ & ۱۱ & ۸ \\ ۱۱ & ۷ & ۱۵ & ۳ & ۸ \\ ۱ & ۱۱ & ۳ & ۹ & ۶ \\ ۶ & ۸ & ۸ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

گرافی هم بند یک یال را پل می نامند. هرگاه حذف آن یال بدون حذف رئوس انتهایی آن گراف مورد نظر را نا هم بند سازد.



گرافی فاقد دور را گراف بی دور یا جنگل می نامند. جنگل هم بند را درخت می نامند.



جنگل

درخت

جنگل گراف جهت داری است که مسیر جهت دار بین دو رأس v_1 و v_2 در یک گراف دنباله‌ای است متناهی از رئوس و کمان‌ها به صورت

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \cdots\cdots \xrightarrow{e_{n-1}} v_n$$

اگر مسیری جهت دار از v به سمت w وجود داشته باشد، انگاه می‌گوییم v به w مرتبط شده است یا w از طریق v مرتبط شده است.

جفت قویاً مرتبط، جفتی از رئوس را قویاً مرتبط می‌نامند هرگاه هر یک به دیگری مرتبط شده باشد. اگر تمام یکی به دیگری مرتبط شده باشد، آن جفت را جفت مرتبط یکطرفه می‌نامند.

قویاً همبند، گرافی جهت دار را قویاً همبند گویند هرگاه هر جفت از رئوس آن جفت قویاً مرتبط باشد و آنرا همبند یکطرفه گویند هرگاه یک جفت از رئوس آن مرتبط یکطرفه باشد.

ضعیفاً همبند، گرافی جهت دار را ضعیفاً هم بند گویند، هرگاه گراف زیربنای آن هم بند باشد.

جنگل جهت دار بسته، جنگلی جهت دار از یک راس به سمت خودش را، جنگل جهت دار بسته می‌نامند.

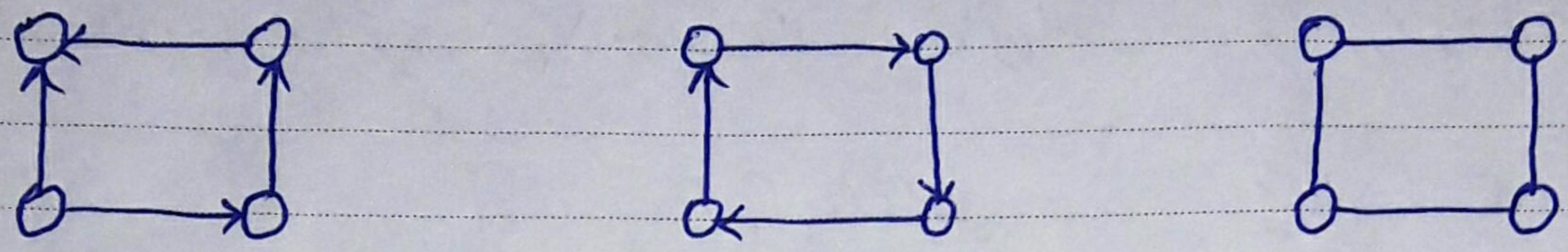
جنگل جهت دار را جنگل جهت دار بسته را جنگل جهت دار می‌نامند. هرگاه کمان‌های متمایز باشد و آن را

دور جهت داری نباشد، هرگاه رئوس متفاوت باشد.

قضیه) اگر A ماتریس مجاورت گرافی جهت دار باشد، عنصر (i,j) در توان k ام (A^k) برابر است با تعداد

۱- مسیرهای از رأس i به رأس j

اگر G یک گراف باشد، گراف جهت داری مانند G' که از تعویض هر یال G با یک کمان حاصل می شود، جهت دهی گراف G نامیده می شود.



گراف قویاً جهت پذیر G'' G' G

یک جهت دهی گرافی خاص را جهت دهی قوی آن گراف می نامند هرگاه گراف حاصل قویاً همبند باشد.

گرافی را قویاً جهت پذیر می نامند هرگاه یک جهت دهی قوی داشته باشد.

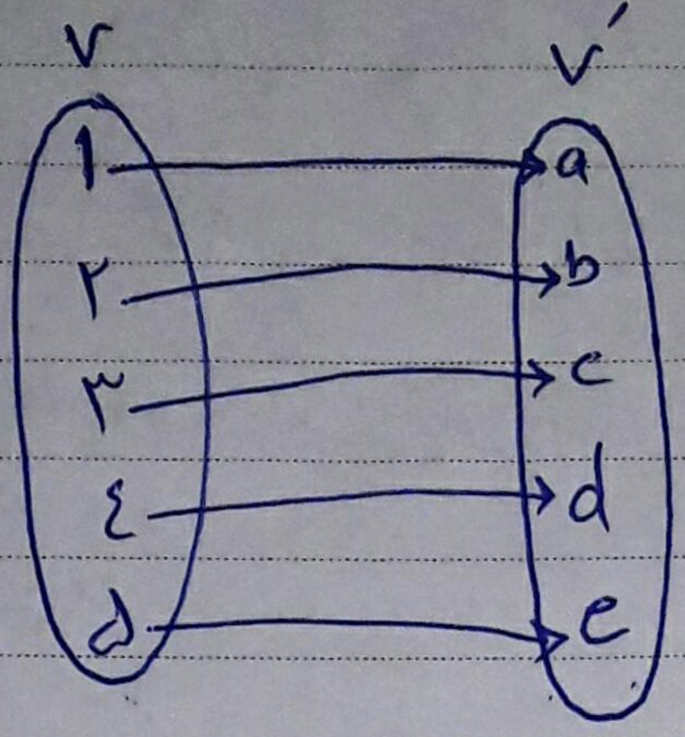
قضیه را بنویس:

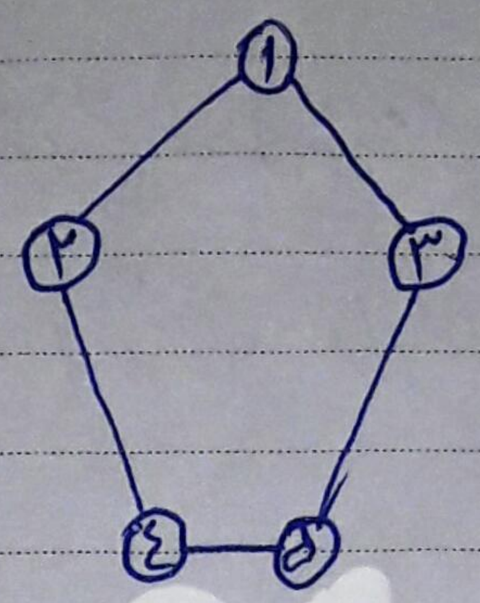
گرافی قویاً جهت پذیر است اگر و فقط اگر همبند و بی پل باشد.

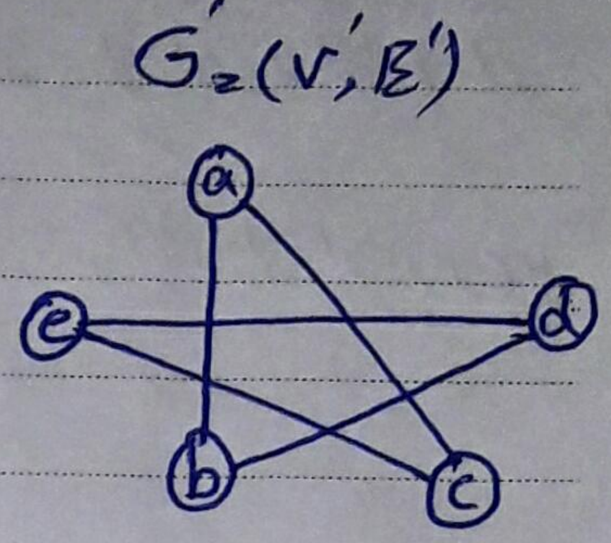
دو گراف G و H را ایزومورفیک (ایزومورف) می گوییم، اگر و فقط اگر تابعی دوسویی از V به V' وجود

$\{u,v\} \in E \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$ داشته باشد، به طوری که

Subject:
Year. Month. Date. ( )







$f(1)=a \quad f(2)=b \quad f(3)=c \qquad G=(V,E)$

$f(4)=d \quad f(5)=e$

اگر دو گراف G و H یکریخت باشند، یک شرط لازم آن است که درجات رئوس آن‌ها با هم برابر باشد.

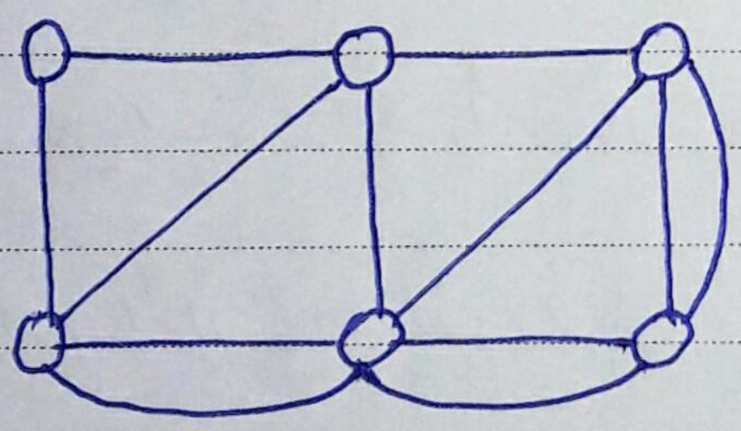
تعریف) ادیلری و نیمه ادیلری،

چیزی در گراف را چیزی ادیلری می‌گویند، هرگاه هر یال گراف یکبار در این چیز ظاهر شود.

هر چیز ادیلری بسته را چیز ادیلری می‌نامند.

گرافی را گراف ادیلری می‌نامند، هرگاه چیز ادیلری داشته باشد.

مثال)



قضیه) ↙

گراف همبند بی حلقه G ادیلری است اگر و فقط اگر درجه هر رأس آن زوج باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوریتم فلوری برای یافتن مدار اویلری:

الگوریتم به این صورت است که از رأس دلخواه شروع می‌کنیم هر یال را به محض پیمودن حذف می‌کنیم. اگر میان از کنار گذاشتن همه یال‌ها بهتر اینم به نقطه شروع بازگردیم، مدار اویلری است. باید تا حد ممکن از پیمودن پل‌ها خودداری کنیم.

قضیه) گراف غیر اویلری همبند (فاقد حلقه) دارای مسیری اویلری است اگر و فقط اگر دقیقاً دو رأس فرد داشته باشد.

قضیه) گراف جهت دار ضعیفاً همبند دارای مدار اویلری است اگر و فقط اگر درجه ورودی هر رأس برابر با درجه خروجی آن باشد.

قضیه) گراف جهت دار ضعیفاً همبند که هیچ مدار اویلری ندارد، دارای یک مسیر اویلری جهت دار است اگر و فقط اگر درجه ورودی هر رأس برابر با درجه خروجی آن باشد، جز برای دو رأس که یکی از آن‌ها درجه خروجی آن یک واحد بیشتر از درجه ورودی آن است و دیگری درجه ورودی آن یک واحد بیشتر از درجه خروجی آن است.

مسیرهای هامیلتونی و دورهای هامیلتونی:

مسیری بین دو رأس یک گراف را مسیر هامیلتونی گوییم هرگاه از هر رأس گراف دقیقاً یک بار بگذرد.

مسیری بسته که از هر رأس گراف دقیقاً یک بار بگذرد، دور هامیلتونی نامیده می‌شود.

گرافی را گراف هامیلتونی گوییم هرگاه دور هامیلتونی داشته باشد.

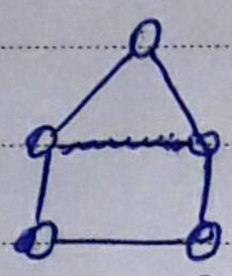
تعاریف حسابی برای گراف‌های جهت دار هم وجود دارد:

هر گراف کامل هامیلتونی است به عبارت دیگر گرافی که درجه هر رأس آن $n-1$ است هامیلتونی است.

PAPCO

هر مقدار درجه رئوس بزرگتر باشد، احتمال این که گراف مورد نظر هامیلتونی باشد، بیشتر است. از این رو این پرسش مطرح می‌شود که آیا عدد صحیح مثبتی مانند k وجود دارد $(k<n-1)$ طوری که هر گراف درجه هر رأس حداقل k باشد آنگاه گراف هامیلتونی باشد؟

قضیه) گرافی ساده با n رأس هامیلتونی است $(n\geq 3)$ هرگاه حاصل جمع درجه‌های هر جفت از رئوس غیر مجاور حداقل n باشد.



قضیه) گرافی ساده با n رأس هامیلتونی است هرگاه درجه هر رأس حداقل $\frac{n}{2}$ باشد.

~~قضیه) گرافی ساده با n رأس حداقل هامیلتونی دارد هرگاه حاصل جمع درجه‌های هر جفت از رئوس غیر مجاور حداقل $(n-1)$ باشد.~~

قضیه) گراف ساده با n رأس حداقل هامیلتونی دارد، هرگاه حاصل جمع درجه‌های هر جفت از رئوس غیر مجاور حداقل $(n-1)$ باشد.

برای گراف‌های جهت دار نیز یک سری شرایط کافی وجود دارد.

گراف همبند هامیلتونی:

گرافی را همبند هامیلتونی گوییم هرگاه بین هر جفت از رئوس آن حداقل یک مسیر هامیلتونی وجود داشته باشد.

مشخص است که هر گراف همبند هامیلتونی گر دارای سه رأس یا بیشتر باشد، الزاماً گرافی هامیلتونی است، اما عکس آن درست نیست.

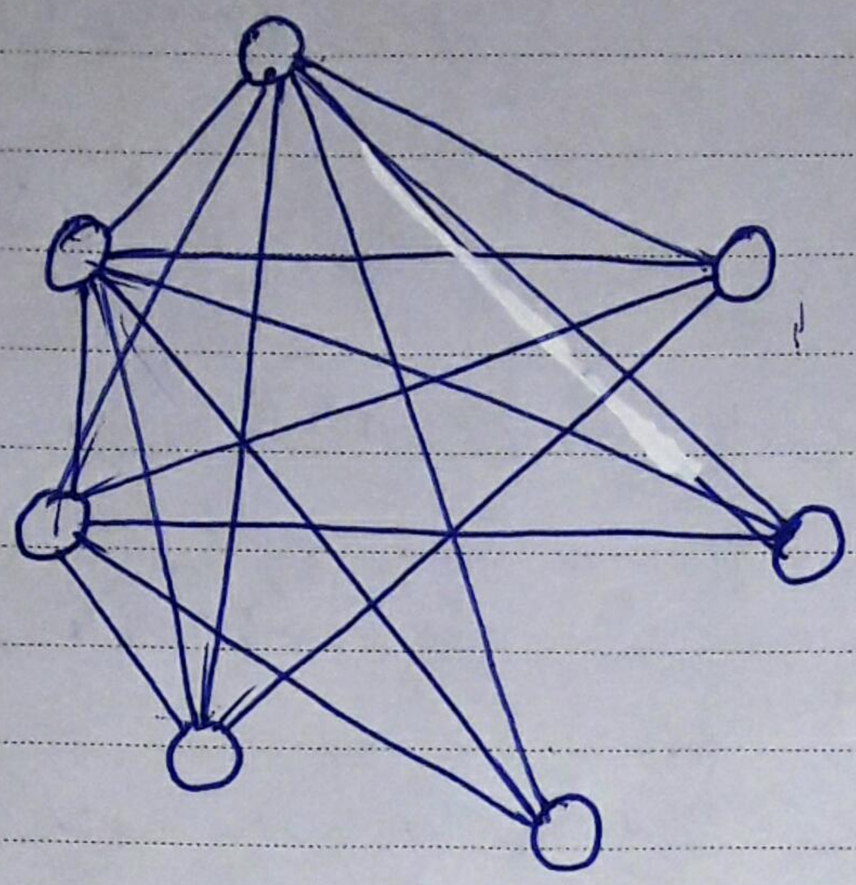
قضیه) اگر گراف ساده‌ای با n رأس $(n\geq 3)$ طوری باشد که به ازای هر دو رأس غیر مجاور متمایز نامانند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $\deg(i) + \deg(j) > n$ آنگاه G همیلتونی است.

حسنه فردشنده دوره گرد

$(n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = (n-1)!$



رنگ‌آمیزی گراف‌ها

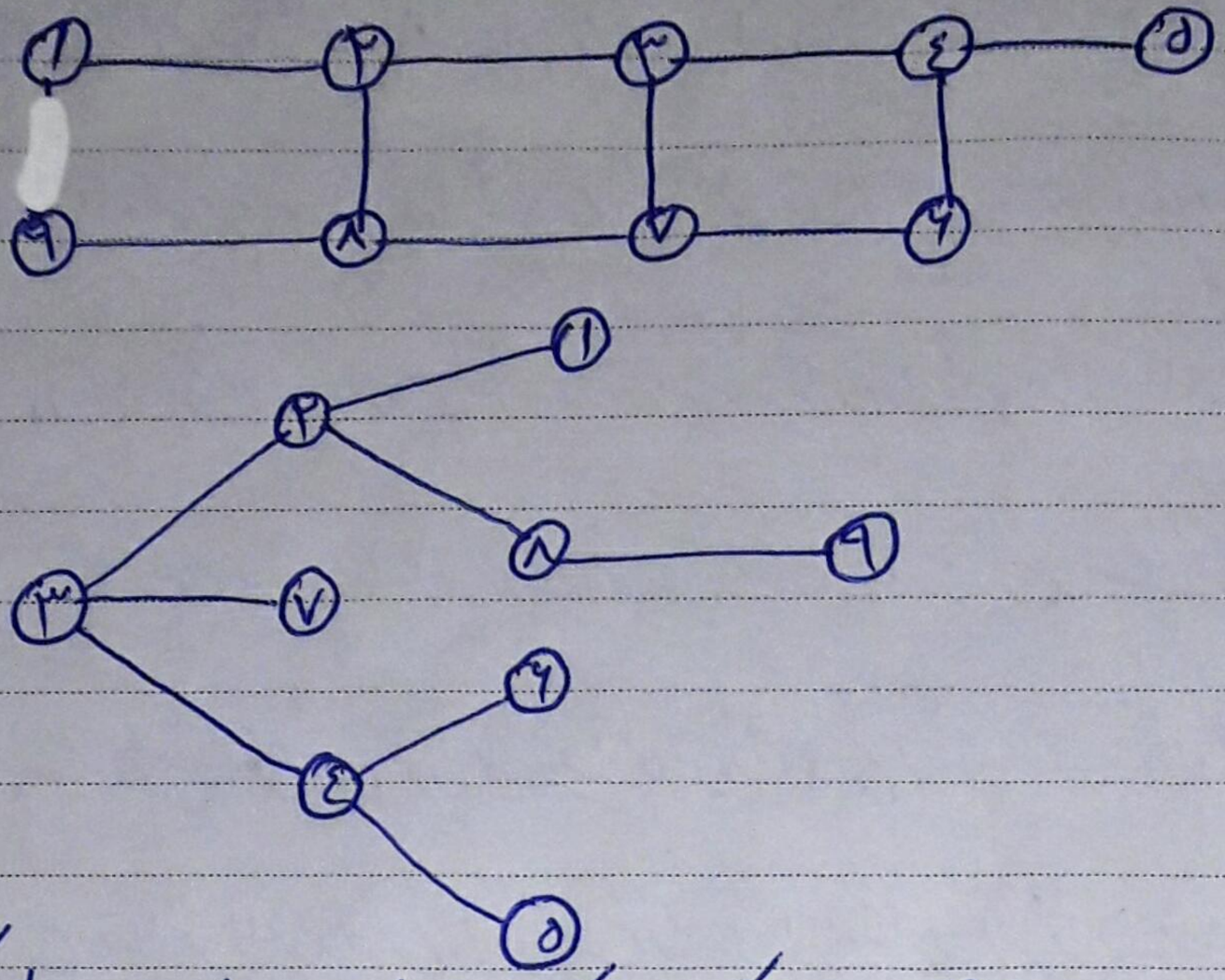
می‌گوییم یک گراف به صورت رأسی رنگ‌آمیزی شده هر گاه به هر رأس رنگی چنان نسبت داده شود که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند. اگر با استفاده از k رنگ چنین انتساب رنگ‌هایی امکان‌پذیر باشد، گراف را k-رنگ‌شدنی می‌نامند. کوچکترین مقدار k را که گراف G را k-رنگ‌شدنی باشد، عدد رنگی گراف G می‌نامند، عدد رنگی گراف یک است اگر و فقط اگر گراف هیچ یالی نداشته باشد.

عدد رنگی گراف کامل با n رأس، n است.

هر دور C_n، 2-رنگ‌شدنی است، اگر و فقط اگر n زوج باشد. در نتیجه اگر گرافی مانند G دوری فرد داشته باشد، آن‌گاه G دو رنگ‌شدنی نیست.

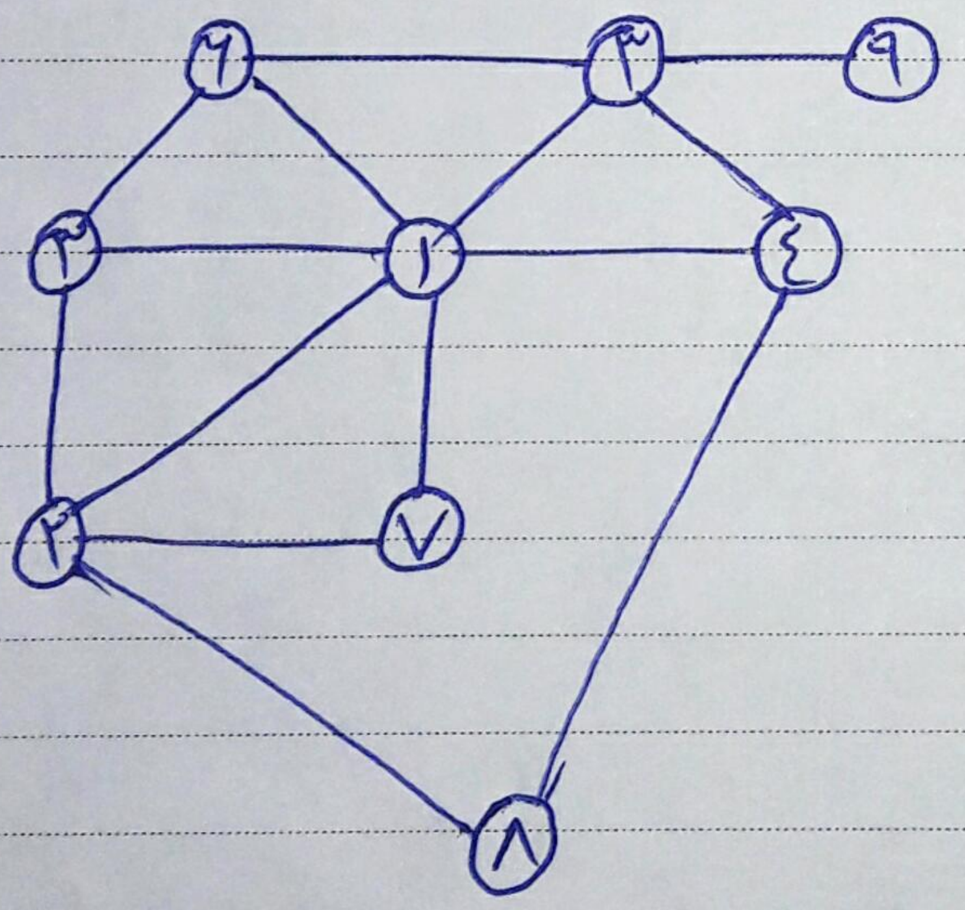
اگر گرافی داشته باشیم که دور فرد نداشته باشد، می‌توانیم آن را به صورت دو رنگ‌آمیزی کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



وقتی که $K \geq 2$ باشد، پیچ حیاط شناخته شده‌ای برای تشخیص K-رنگ‌پذیری گراف‌ها در دست نیست. به طور کلی می‌توان مسئله رنگ‌پذیری گراف دلخواه مسئله‌ای دشوار است. پیچ الگوریتمی که بتواند همواره الگوی رنگ‌آمیزی درستی بر به کارگیری کمترین تعداد رنگ‌ها را به دست دهد وجود ندارد. ولی الگوریتم‌هایی برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها وجود دارد که بهترین را تا حد به این هدف نزدیک است. راهی رنگ‌های را بیشتر آنان چه لازم است به کارگیرد

یکی از این الگوریتم‌ها الگوریتم حریصانه بزرگترها

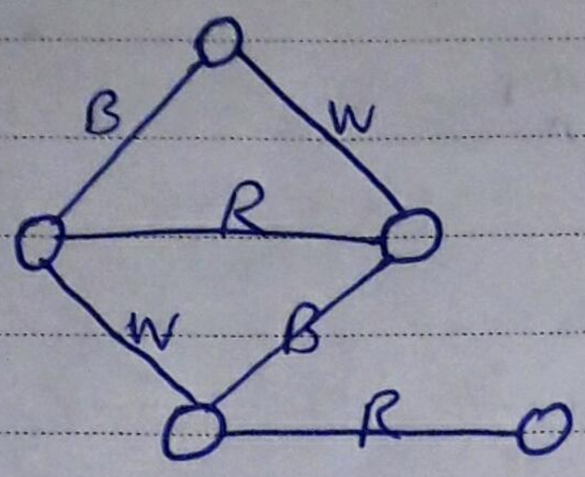


Subject:
Year. Month. Date.

ایده رنگ آمیزی گراف ها در بسیاری از مسائل زمان بندی به طور طبیعی پیش می آید. فرض کنید گروه آموزشی دانشگاه تصمیم گرفته تعدادی درس در دوره کارشناسی ارائه کند و تعدادی حفره زمانی وجود دارد که می توان طی آنها درس را ارائه کرد. هنگام زمان بندی این دروس، گروه آموزشی باید از تداخل ها اجتناب کند. اگر یک دانشجو علاقه مند به انتخاب ۲ تا از این دروس باشد، باید این دروس در ۲ وقت مختلف زمان بندی شوند. حال گراف گونه این مسئله زمان بندی به صورت زیر است: فرض کنید هر رأس یک درس را نمایش دهد. دو درس را با یک یال به هم وصل می کنیم اگر نتوان دو درس متناظر با این دو رأس را در زمان واحدی ارائه کرد. اگر گراف حاصل k-رنگ پذیر باشد، می توان دروس را در k حفره زمانی یا بیشتر زمان بندی کرد.

رنگ آمیزی یالی :

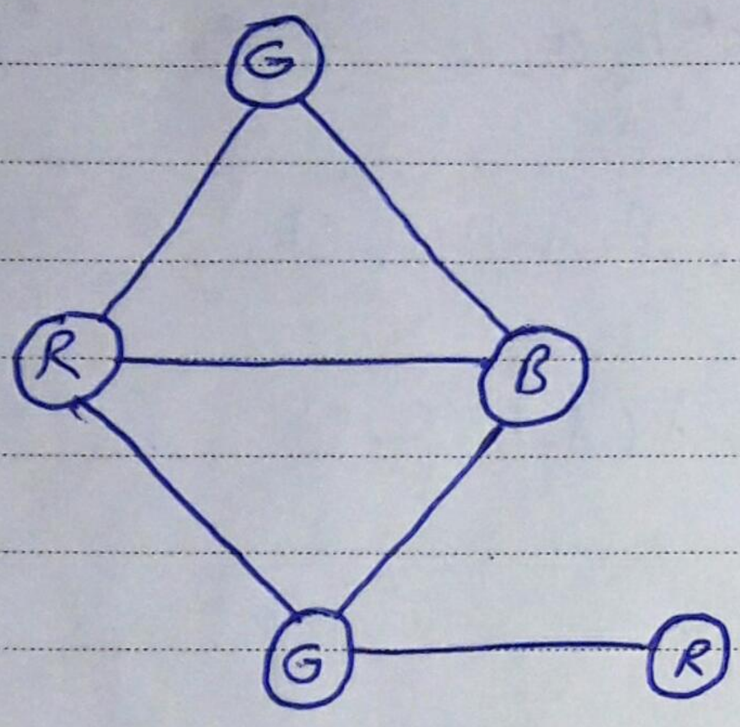
هر دو یالی که در یک رأس مشترک هستند نباید رنگ یکسان داشته باشند



بزرگترین درجه گراف $\Delta =$

عدد رنگی یالی گراف $\chi'(G) =$

قضیه) برای هر گراف ساده داریم، $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$



رنگ آمیزی تام :

۱- رئوس مجاور نباید هم رنگ باشند

۲- یال هایی که در یک رأس مشترکند، نباید هم رنگ باشند

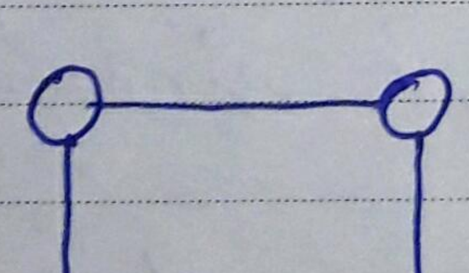
۳- رنگ رأسی که روی یال است با رنگ یال نباید یکسان باشد

عدد رنگی تام $= \chi''(G)$

حدس : $\Delta + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta + 2$

چند جمله ای رنگی :

λ رنگ در اختیار داریم می خواهیم بینیم با λ رنگ به چند طریق می توان گراف را رنگ کرد؟ (رنگ آمیزی رأسی)



$P(G,1) = 0$

$P(G,2) = 8$

$P(G,3) = 24$

$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$

$P(G,\lambda)$

اگر G گرافی فاقد یال با n رأس و λ رنگ تهی می ماند: $P(G,\lambda)=\lambda^n$

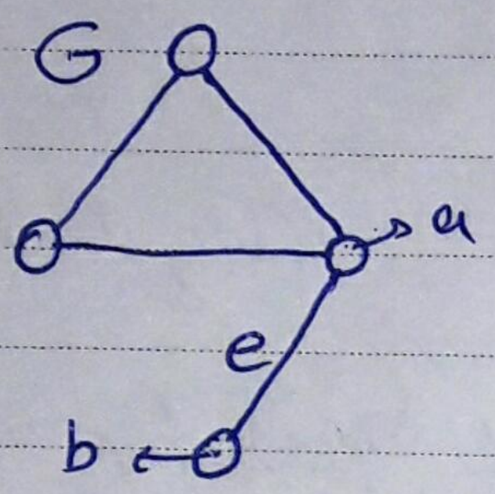
اگر G یک گراف کامل n رأسی باشد، آنگاه $P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)$

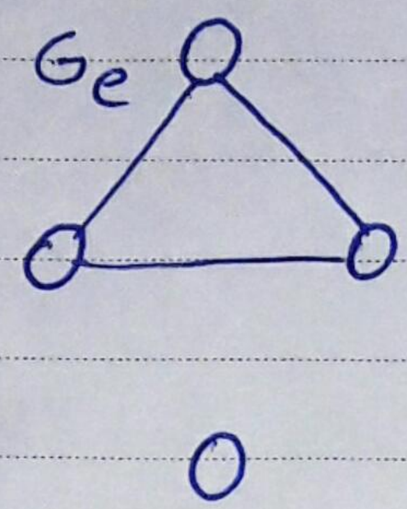
اگر G یک مسیر n رأسی (P_n) باشد آنگاه، $P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}$

قضیه) اگر G یک گراف باشد و $e=\{a,b\}\in E$ آنگاه $P(G,\lambda)=P(G_e,\lambda)-P(G'_e,\lambda)$

G_e، از حذف یال e از گراف G ایجاد می شود.

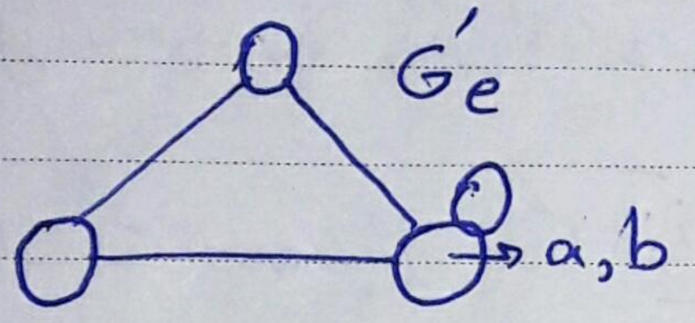
G'_e، از یکی کردن a و b ایجاد می شود.





$P(G_e,\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)$

$P(G'_e,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$



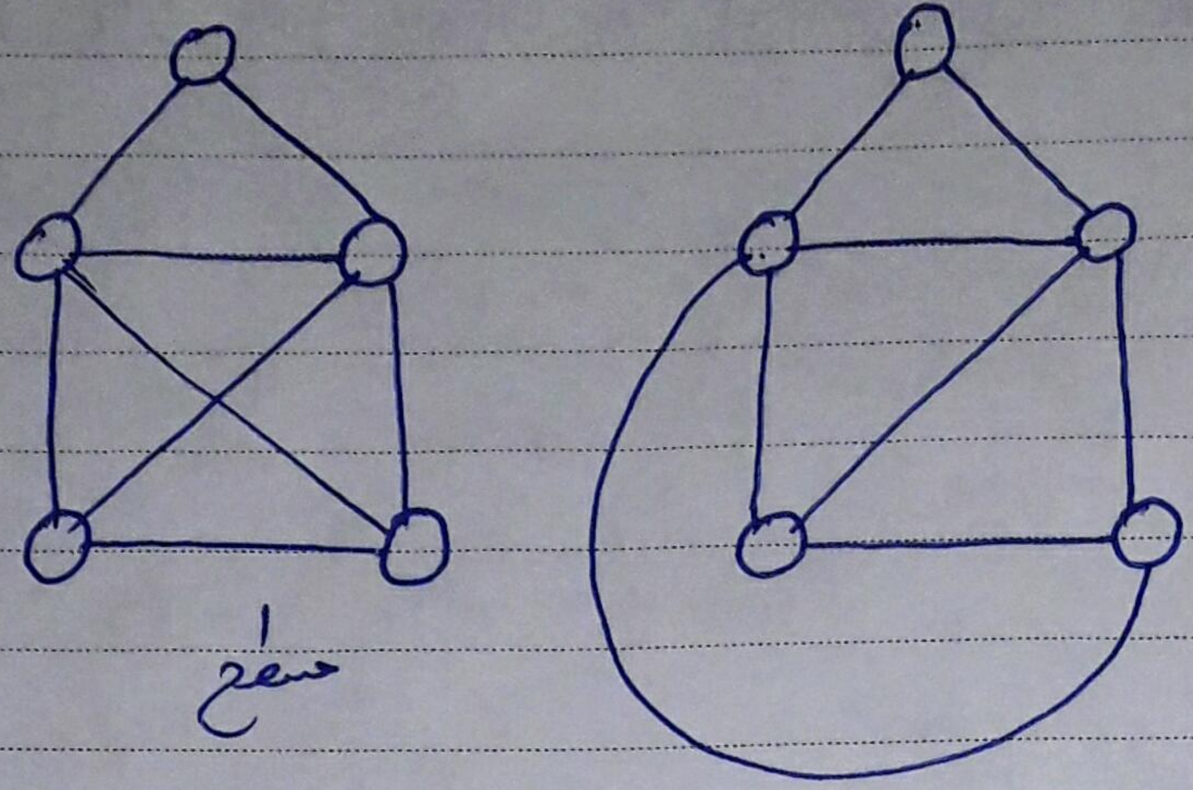
$P(G,\lambda)=P(G_e,\lambda)-P(G'_e,\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

قضیه) فرض کنیم G یک گراف باشد و G_1، G_2 دو زیرگراف از آن طوری که $G_1\cap G_2=K_n$ آنگاه،

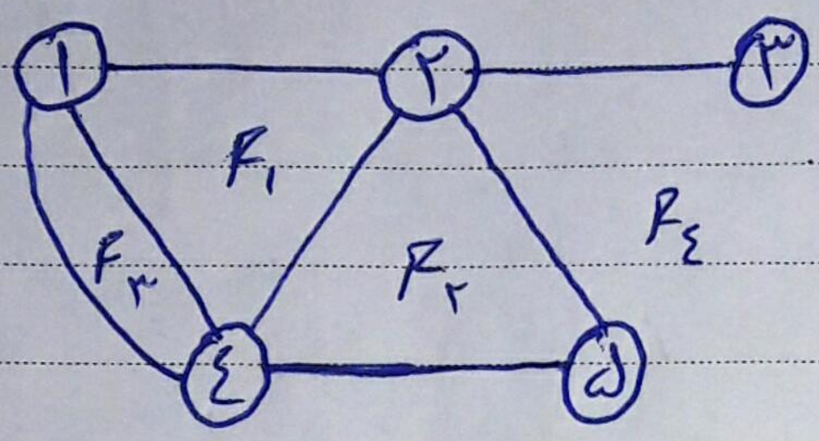
$$P(G,\lambda)=\frac{P(G_1,\lambda)\cdot P(G_2,\lambda)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}$$

گسسته بودن گراف را مسطح نگویند هرگاه بتوان آن را چنان رسم کرد که هیچ دو یالی یکدیگر را جز در یک رأس متقاطع نکنند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



نواحی دوبعدی تعریف شده به وسیله یال های یک گراف مسطح وجوه گراف نامیده می شود و مرز یال های گونا گون مرزهای این وجوه را تشکیل می دهد:



قضیه) اگر گراف مسطح G دارای n رأس و m یال باشد باشد آنگاه تعداد وجوه آن P است و داریم $n-m+P=2$

اثبات: استقرا روی m

$m=0 \Rightarrow n=1, P=1 \quad n-m+P=1-0+1=2$

فرض کنید قضیه برای $m=k-1$ درست باشد می خواهیم ثابت کنیم به ازای $m=k$ نیز حکم برقرار است.

یک گراف G، n رأس، k یال و P وجه. اگر حذف یک یال این رابطه قطعا درست است.

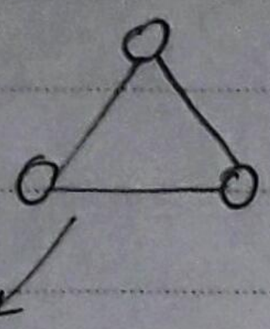
$P=1 \quad k=n-1 \quad n-(n-1)+1=2$

اگر حذف نیال فرض کنیم e یالی از یک دور باشد، اگر e را کنار بگذاریم، گراف مسطح هم بندی با n رأس $k-1$ یال و $P-1$ وجه خواهیم داشت. طبق فرض استقرا $n-(k-1)+(P-1)=2$ باشد یا

$\Rightarrow n-k+P=2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه) گراف مسطح ساده n رأسی ($n \geq 3$) حداکثر $3n-6$ یال دارد



اثبات:

$n \geq 3$ گرانی مسطح گرد رای وجوه $F_1, F_2, \ldots, F_p$ است در نظر می‌گیریم

فرض کنیم r_i تعداد یال های تشکیل دهنده وجه F_i باشند (هر r_i حداقل ۳ است) پس:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{r_1+r_2+\cdots+r_p}_{\text{این قسمت حداکثر } 2m \text{ است.}} \geq 3p \Rightarrow 3p \leq 2m \\ p = 2-n+m \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq (3n-6)$$

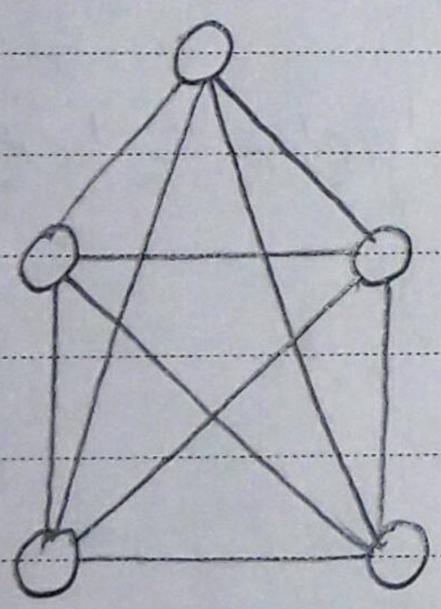
(هر یالی حداکثر ۲ بار محاسبه می‌شود.)

حداکثر $(3n-6)$ یال دارد. $\Leftarrow$ گراف مسطح ساده n رأسی

$p \Rightarrow q$

گراف مسطح نیست. $\Leftarrow$ گراف بیش از $(3n-6)$ یال داشته باشد

$\neg p \Rightarrow \neg q$



$m = 10$

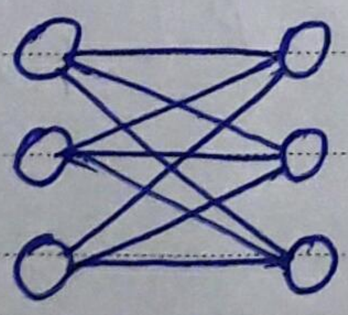
K_5 (گراف کامل ۵ رأسی)

$3n-6 = 3(5)-6 = 9$

این گراف بیشتر از ۹ یال دارد پس مسطح نیست.

جواب می‌گیریم $K_{3,3}$ نامسطح است. $n=6$ ، $m=9$ ، پس اگر گراف باشد $K_{3,3}$ مسطح باشد طبق قضیه باید

یک وجه داشته باشد. $(n-m+p=2)$

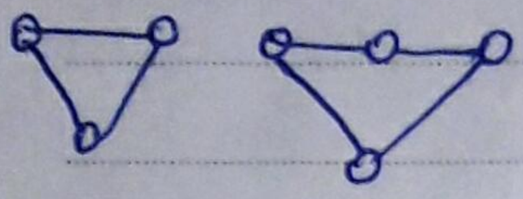


P4PCO

گراف دوبخشی هیچ دور فردی ندارد و بنابراین حداقل باید ۲۵ یال برای همبند کردن مرزهای این وجوه وجود داشته باشد، هر یال حداکثر ۲ بار شمرده می‌شود. پس حداقل ۵۰ یال برای همبند کردن مرزهای این وجوه باید وجود داشته باشد.

دو گراف را همانریخت (هموومورفیک) می‌نامند هرگاه بتوان هر دوی آن‌ها را از گرافی واحد با بستن

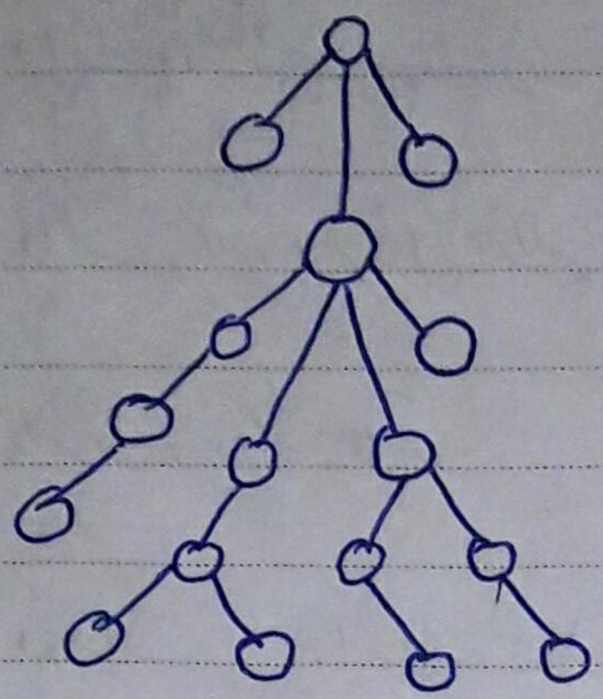
به وسیله افزودن رئوس جدید در جزء ۲ روی یال‌های آن به دست آورد.



قضیه (کوراتوفسکی)

گرافی مسطح است اگر و فقط اگر شامل هیچ زیرگراف همانریخت K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



درخت چیست؟

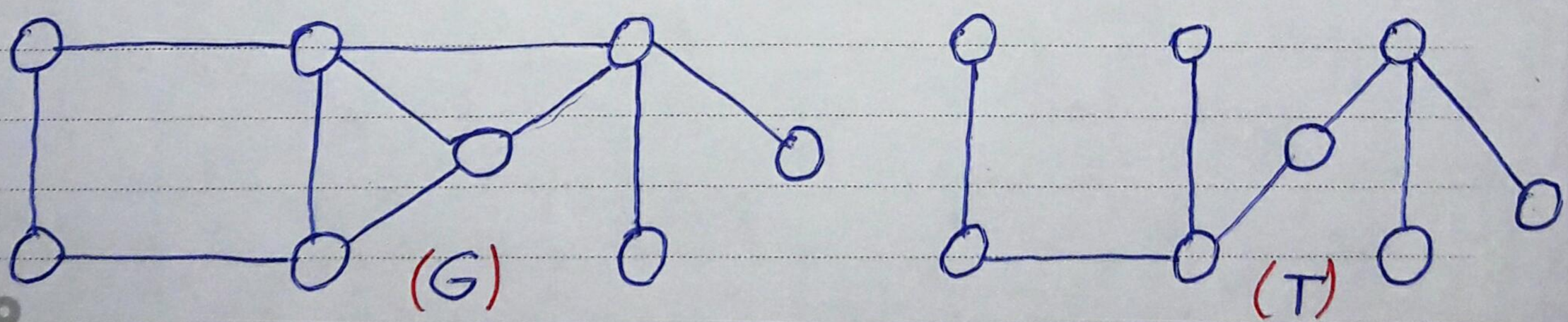
گرافی هم بند که هیچ دوری نداشته باشد درخت نامیده می شود.

در درخت بین هر جفت از رئوس حتماً یک و فقط یک مسیر ساده یکتا وجود دارد و برعکس اگر بین هر جفت از رئوس گرافی حتماً مسیر ساده یکتا وجود داشته باشد آن گراف درخت است. در درخت هر یال یک پل است. برعکس اگر G گرافی همبند باشد به گونه‌ای که هر یال یک پل باشد، آنگاه G درخت است. هر درخت n رأسی دارای $n-1$ یال است. برعکس هر گراف همبند G که دارای n رأس و $n-1$ یال باشد، درخت است. هر گراف بی دور n رأسی و $n-1$ یالی همبند و بنابراین درخت است. اگر G گرافی بی دور باشد که در آن دو رأس غیر مجاور با یالی جدید به هم وصل شوند گراف حاصل دقیقاً یک دور داشته باشد آنگاه G درخت است.

درخت فراگیر

زیرگرافی مانند T از گراف n رأسی G درختی فراگیر در گراف است. هر گاه

الف) T درخت باشد ب) T دارای n رأس باشد.



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه) گراف G همبند است اگر و فقط اگر درختی فراگیر باشد

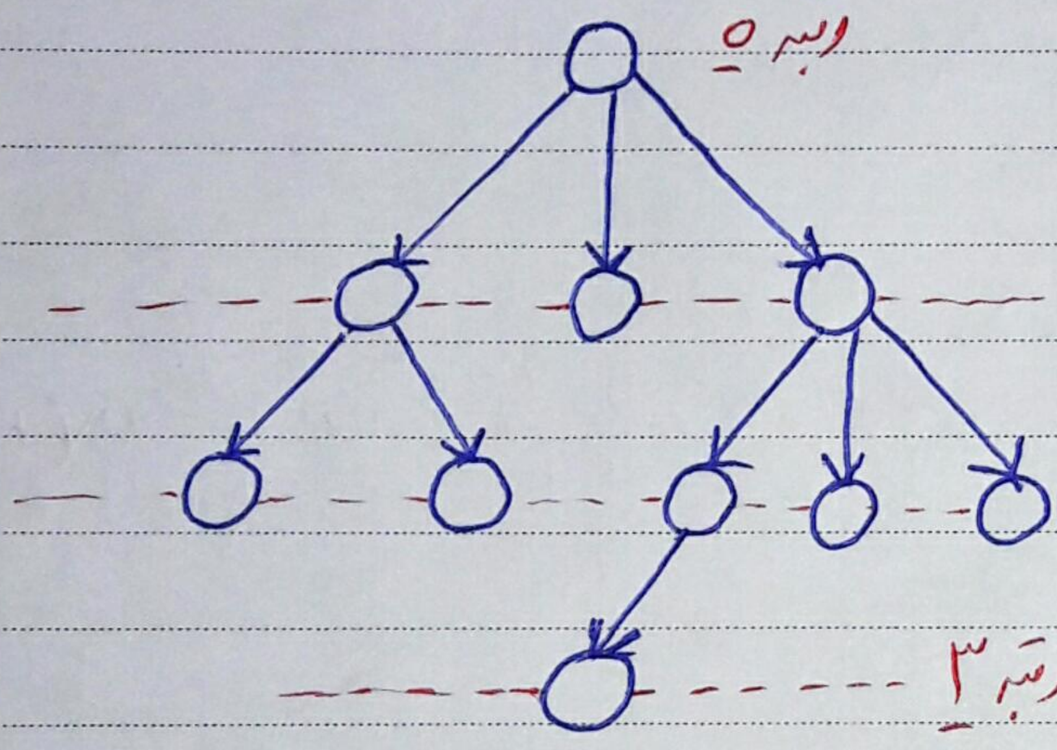
قضیه) فرض کنید G گراف ساده‌ای با n رأس باشد، اگر زیرگرافی n رأسی مانند H در دو تا از سه خاصیت زیر صدق کند، آنگاه در سومی نیز صدق خواهد کرد.

(الف) H همبند است. ب) H دارای (n-1) یال است پ) H بی دور است.

درخت های دوردی ۱

گراف جهت داررا درخت جهت دار گوییم هرگاه گراف زیربنای آن درخت باشد.

درختی جهت دار را درخت ریشه دار گوییم هرگاه ۱- دقیقاً یک رأس (ریشه) با درجه ورودی صفر داشته باشد ۲- درجه ورودی هر رأس دیگر ۱ باشد.



*) در هر درخت ریشه دار رأسی را رأس پایانی (برگ) می نامند. که درجه خروجی آن صفر باشد.

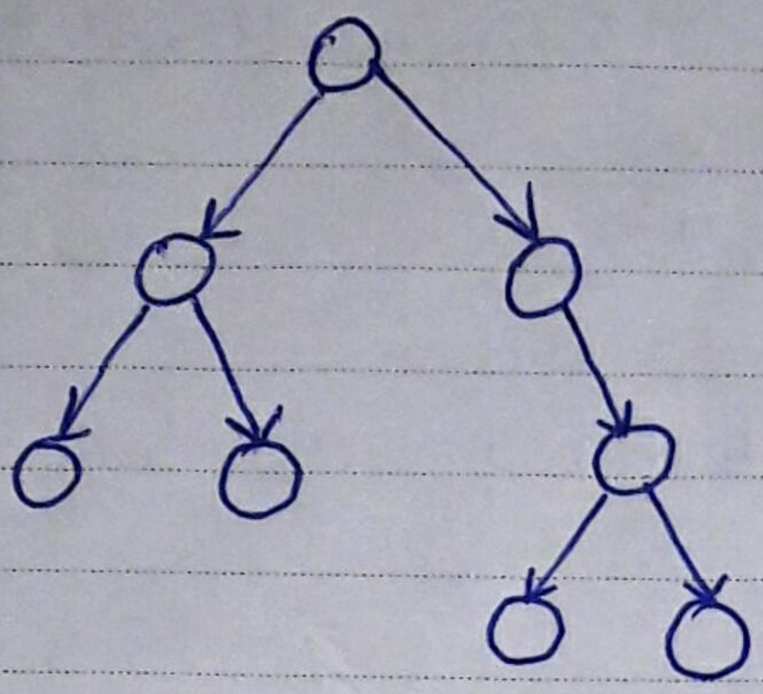
*) هر رأس غیر پایانی را رأس میانی یا داخلی می نامند.

*) تعداد کمان های موجود در مسیری که از ریشه به سمت یک رأس می رود، رتبه آن رأس نامیده می شود.

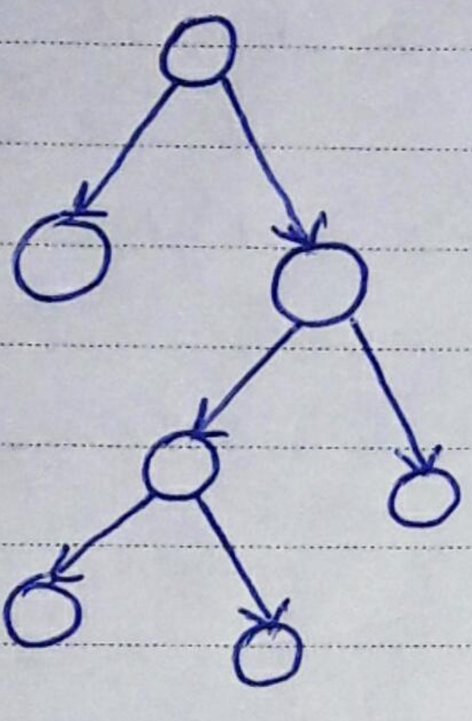
*) درختی را مرتب شده در رأس v می نامند هرگاه همه اختلاف v و همه کمان های همه مسیرهای جهت دار آغاز شده در v را کنار بگذاریم که در نتیجه v برگی از درخت مرتب شده خواهد بود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

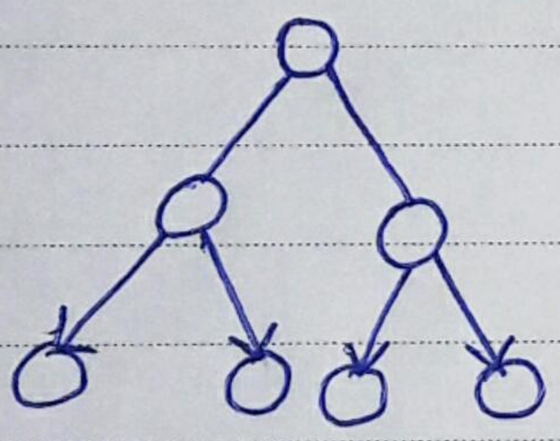
*) درختی ریشه‌دار را درخت دودویی می‌نامند هرگاه درجه خروجی هر رأس میانی آن حداکثر ۲ باشد



*) درخت دودویی منتظم درجه خروجی هر رأس میانی دقیقاً دو است.



*) درخت دودویی منتظم پر است هرگاه همه برگ‌های آن هم رتبه باشند.



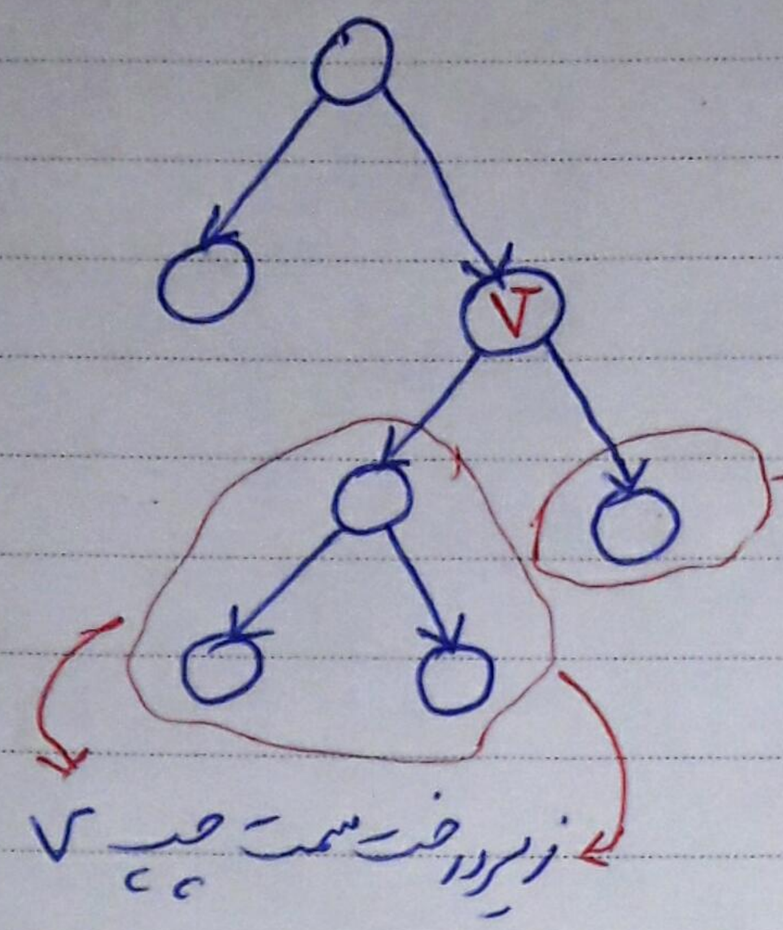
کاربردی از درخت‌های دودویی:

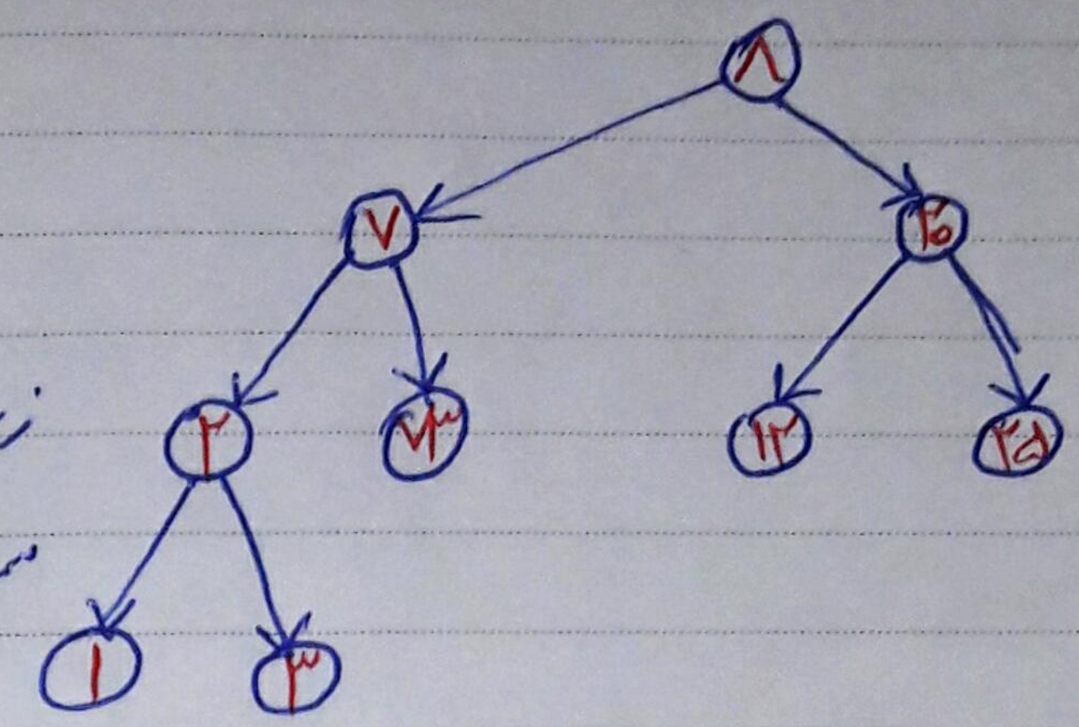
درخت‌های جستجوی دودویی:

فرض کنیم T درختی دودویی باشد. به هر رأس v این درخت عددی حقیقی مانند k(v) نسبت داده می‌شود. این عدد را کلید آن رأس می‌نامند. به ریشه T کلیدهایی چنان نسبت می‌دهیم که کلیدهای هر رأس،

۱- بزرگتر از ملیدهای رئوس زیردرخت چپ آن

۲- کوچکتر از ملیدهای رئوس زیردرخت راست آن باشد.





۱	۱۴	۱۲	۲	۱۳	٤	۲۵

